Sistema posicional de numeração

Exercício 1: Determine o menor número com 10 algarismos tal que a soma dos seus algarismos seja igual a 40.

Solução: Para o número ser o menor possível, devemos colocar o menor algarismo mais a esquerda do número. Assim vamos colocar o algarismo 1 à esquerda do número. Logo à direita desse algarismo 1, vamos colocar a maior quantidade possível de algarismos zero. Mas como a soma dos algarismos deve ser 40, devemos ter algarismos não nulos mais a direita do número que será formado. Quanto mais noves forem colocados à direita do número, mais destes algarismos zero poderão ser utilizados. Dividindo 40 por 9 obtemos $40 = 4 \times 9 + 4$. Portanto podemos colocar 4 algarismos 9 mais a direita do número. Como a soma dos dez algarismos deve ser 40, o número procurado é 1000039999.

Exercício 2: Considere dois números naturais, cada um deles com três algarismos diferentes. O maior deles só tem algarismos pares e o menor só tem algarismos ímpares. Se a diferença entre eles é a maior possível, qual é esta diferença?

Solução: Para que a diferença seja a maior possível devemos escolher o maior número de 3 algarismos pares diferentes e o menor número de 3 algarismos ímpares diferentes. O maior número de 3 algarismos pares diferentes é 864 e o menor número de 3 algarismos ímpares diferentes é 135. A diferença entre eles é $864 - 135 = 729$.

Exercício 3: Domingos usou 1002 algarismos para numerar as páginas do livro que acabou de escrever. Quantas páginas tem o livro do Domingos?

Solução:

- Das páginas 1 até 9 são utilizados 9 algarismos.

- Das páginas 10 até 99 existem 90 números com dois algarismos, totalizando aqui $2 \times 90 = 180$ algarismos. Assim, nas páginas com 1 ou 2 algarismos são utilizados $9 + 180 = 189$ algarismos.

- Das páginas 100 até 999 existem 900 números com três algarismos, totalizando aqui $3 \times 900 = 2700$ algarismos. Como $189 < 1002 < 2700$ concluímos que a última página do livro de Domingos é um número de três algarismos.

- Efetuando a diferença $1002 - 189 = 813$, vemos que foram gastos 813 algarismos em números de 3 algarismos. Dividindo por três, vemos que o livro de Domingos possui $\frac{813}{3} = 271$ páginas com três algarismos.

- Como a primeira página de três algarismos é o número 100, e como existem 271 páginas com três algarismos, concluímos que a última página do livro de Domingos é a de número $100 + 271 - 1 = 370$.

Critérios de divisibilidade

Exercício 4: Critério de divisibilidade por 3

Solução: Um número é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos é divisível por 3.Para entender este critério de divisibilidade, primeiramente precisamos observar que todas as potências de 10 deixam resto 1 quando divididas por 3:

$$10 = 3 \times 3 + 1.$$

$$100 = 3 \times 33 + 1.$$

$$1000 = 3 \times 333 + 1.$$

Desta observação, vamos verificar, sem efetuar a divisão, se o número 457 é ou não é divisível por 3. O número 457 pode ser escrito como $457 = 4 \times 100 + 5 \times 10 + 7$ ou ainda, $457 = 4(3 \times 33 + 1) + 5(3 \times 3 + 1) + 7$. Colocando o fator 3 em evidência, vemos que $457 = 3(4 \times 33 + 5 \times 3) + (4 + 5 + 7)$. Como o número $3(4 \times 33 + 5 \times 3)$ é divisível por 3, precisamos somente verificar se $4 + 5 + 7 = 16$ é divisível por 3. Como este número não é divisível por 3, concluímos que 457 também não é divisível por 3. Mais ainda, como 16 deixa resto 1 quando dividido por 3, podemos até concluir que 457 também deixa resto 1 quando dividido por 3.

Exercício 5: Critério de divisibilidade por 9

*Solução:*Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é divisível por 9. Como no caso da divisibilidade por 3, primeiramente observe que todas as potências de 10 deixam resto 1 quando divididas por 9: $10 = 9 \times 1 + 1$.
$100 = 9 \times 11 + 1$.
$1000 = 9 \times 111 + 1$.

Vejamos, sem efetuar a divisão, se o número 2345 é ou não é divisível por 9. Podemos escrever $2345 = 2 \times 1000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 5$, ou ainda, $2345 = 2(9 \times 111 + 1) + 3(9 \times 11 + 1) + 4(9 + 1) + 5$. Colocando o fator 9 em evidência, $2345 = 9(2 \times 111 + 3 \times 11 + 4) + (2 + 3 + 4 + 5)$. Como o número $9(2 \times 111 + 3 \times 11 + 4)$ é divisível por 9, precisamos somente verificar se o número $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ é divisível por 9. Como este número não é divisível por 9, podemos concluir que 2345 também não é divisível por 9. Mais ainda, como 14 deixa resto 5 quando dividido por 9, concluímos que 2345 também deixa resto 5 quando dividido por 9.

Exercício 6: Critério de divisibilidade por 4

Solução: Um número natural é divisível por 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos é divisível por 4. Vamos explorar este critério escrevendo, por exemplo, o número 23562 do seguinte modo: $23562 = 235 \times 100 + 62$. E como $100 = 4 \times 25, 23562 = 235 \times 4 \times 25 + 62 = 4(235 \times 25) + 62$. Como $4(235 \times 25)$ é divisível por 4, é suficiente analisar o número 62. Como $62 = 4 \times 15 + 2$ vemos que 62 e, portanto, $23562 = 4(235 \times 25) + 62$ não são divisívies por 4. Além disso, estes números deixam resto 2 quando divididos por 4. Agora vamos relembrar os critérios mais fáceis. Um número é divisível por 2 quando é par e um número é divisível por 6 quando é divisível, ao mesmo tempo, por 2 e por 3. Um número é divisível por 5 quanto termina em 0 ou em 5, e um número é divisível por 10 quando termina em zero.

Exercício 7:

- Qual é o menor múltiplo positivo de 9 que é escrito apenas com os algarismos 0 e 1?
  Solução: Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 9. Logo, o número deve ter 9 algarismos iguais a 1. Assim, o menor número é: 111111111. Se alguém entender que o algarismo 0 deve obrigatoriamente

  figurar no número procurado, então a resposta é: 1011111111.

- Qual é o menor múltiplo positivo de 9 que é escrito apenas com os algarismos 1 e 2?

  Solução: Devemos usar o maior número possível de algarismos iguais a 2, que devem ficar nas casas mais à direita. Assim, o menor número é: 12222.

Exercício 8: O dobro de um número, quando dividido por 5, deixa resto 1. Qual é o resto da divisão deste número por 5?

Solução 1: O dobro do número procurado é um múltiplo de 5 acrescido de 1. Como os múltiplos de 5 terminam em 0 ou 5, o dobro termina em 1 ou 6. Mas o dobro é um número par, logo termina em 6. Assim, o número termina em 3 ou 8 e, portanto, dividido por 5, deixa resto 3.

Solução 2: Sabemos que o número inteiro n procurado satisfaz $2n = 5m+1$, para algum inteiro m. Então o produto $5m = 2n - 1$ de 5 por m é ímpar, o que implica que m é ímpar. Assim, $m = 2k + 1$, para algum inteiro k e, portanto,

$$2n = 5m + 1 = 5(2k + 1) + 1 = 10k + 6 = 2(5k + 3)$$

; ou seja, $n = 5k + 3$ deixa resto 3 na divis ao por 5.