Ciclo 4 – Encontro 3

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS ELEMENTARES

Nível 3
PO: Márcio Reis
11° Programa de Iniciação Científica Jr.

Construções geométricas elementares.

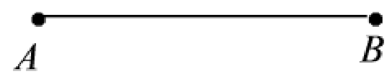
- Capítulo 1 da Apostila 8 do PIC da OBMEP “Uma Introdução às Construções Geométricas”, Eduardo Wagner.

Introdução

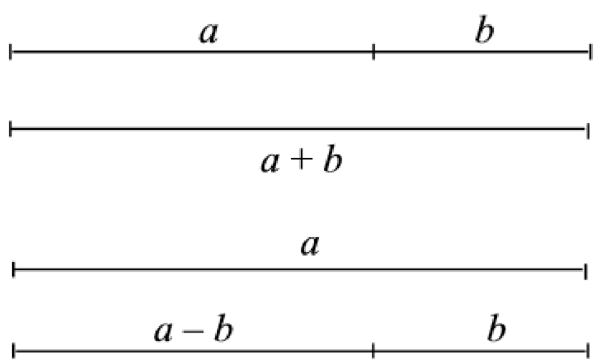
As construções geométricas aparecem na antiguidade e tiveram enorme importância no desenvolvimento da Matemática. Há 2 000 anos a palavra número significava número natural. Não havia números negativos e as frações não eram consideradas números, eram apenas razões entre números. Era de fato complicado. Se não havia ainda a noção de número racional, os números reais então estavam a séculos de distância. Entretanto os gregos tiveram uma ideia engenhosa. A de representar uma grandeza qualquer por um segmento de reta. Esta ideia é equivalente a dizer que todo número real positivo está associado a um ponto de uma semirreta graduada. Hoje, visualizamos o número real x assim:

Introdução

Antigamente, a mesma ideia era vista assim:



As operações de adição e subtração de segmentos são inteiramente intuitivas.



Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Introdução

A multiplicação de dois segmentos podia ser visualizada como a área de um retângulo e a razão entre dois segmentos era ... Bem, era simplesmente isso mesmo, a razão entre dois segmentos.

Um problema comum hoje é, por exemplo, o de calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são 2 e 3. A solução é simples e usa o teorema de Pitágoras.

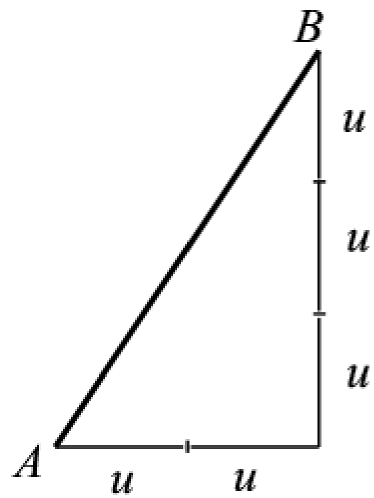
Se x é o comprimento da hipotenusa então

$$x = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Introdução

O mesmo problema antigamente era enunciado assim: construir o triângulo retângulo cujos catetos medem 2 unidades e 3 unidades. A solução era completamente geométrica. Era dado um segmento unitário u e o triângulo era construído com as medidas dadas.

Introdução



Observe a figura acima. Se associarmos o segmento u ao número 1, o segmento AB é a visualização do número real $\sqrt{13}$.

Introdução

Observe a figura acima. Se associarmos o segmento u ao número 1, o segmento AB é a visualização do número real $\sqrt{13}$.

Desta forma, *calcular* de hoje é sinônimo do *construir* de antigamente e as dificuldades são equivalentes. Se hoje achamos difícil calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo conhecendo o perímetro e a altura relativa à hipotenusa, é igualmente difícil desenhar o triângulo retângulo onde o perímetro e a altura são dados através de dois segmentos.

Paralelas e Perpendiculares

Nas construções geométricas são permitidos apenas a régua (não graduada) e o compasso. A régua serve apenas para desenhar uma reta passando por dois pontos dados e o compasso serve apenas para desenhar uma circunferência cujo raio é dado por um segmento e cujo centro é um ponto dado. Estes instrumentos não podem ser utilizados de nenhuma outra maneira.

A pureza das construções com régua e compasso é a mesma da geometria analítica que também resolve, de forma equivalente, problemas de geometria usando as coordenadas (pontos dados), a equação da reta (régua) e a equação da circunferência (compasso).

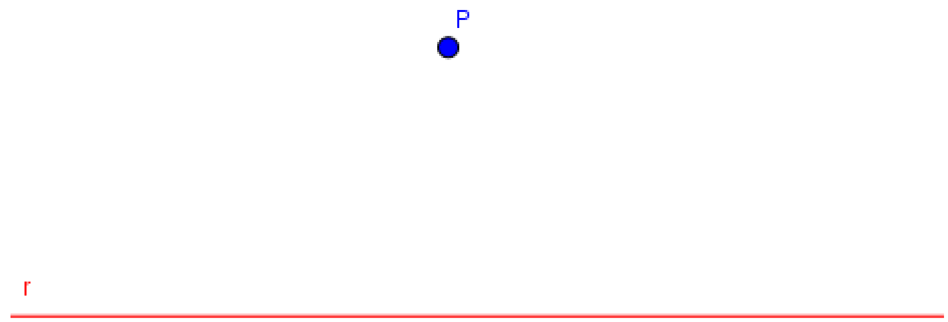
Paralelas e Perpendiculares

Para começar a desenhar, há dois problemas básicos que precisamos aprender.

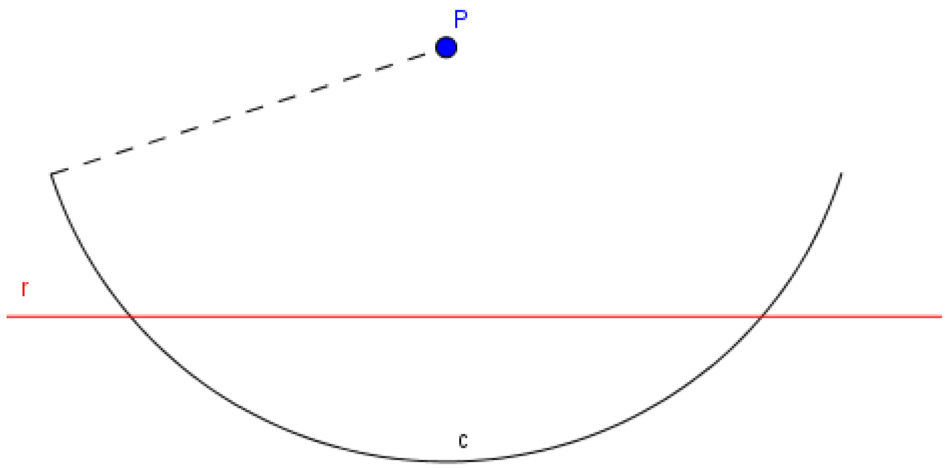
1. Traçar por um ponto dado uma reta perpendicular a uma reta dada.

2. Traçar por um ponto dado uma reta paralela a uma reta dada.

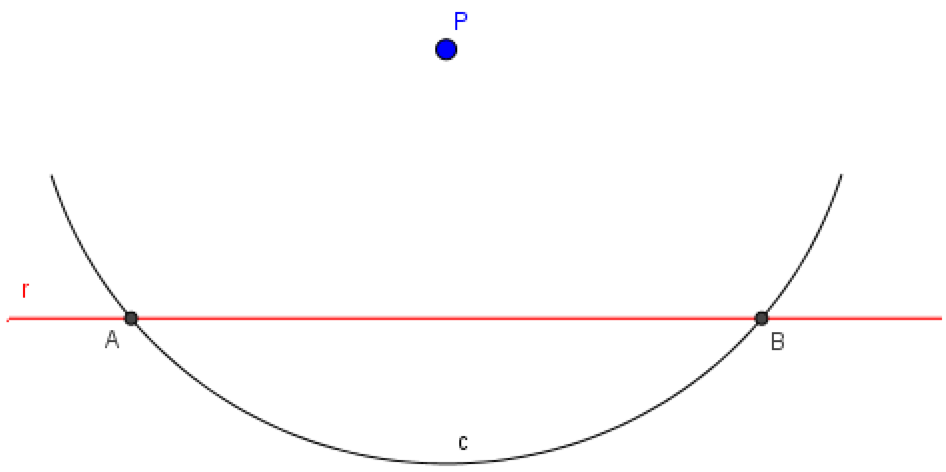
Paralelas e Perpendiculares



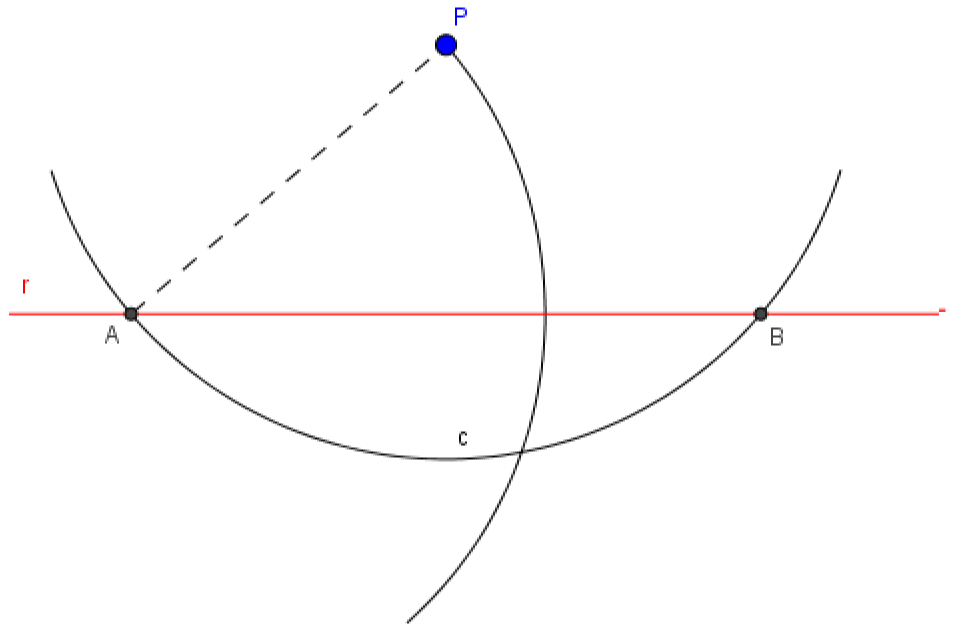
Paralelas e Perpendiculares



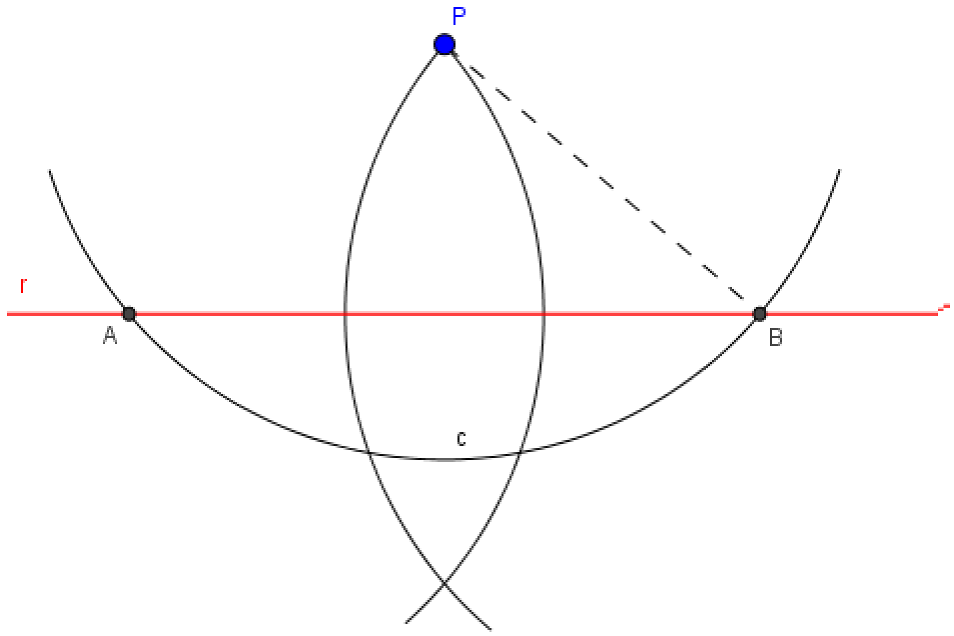
Paralelas e Perpendiculares



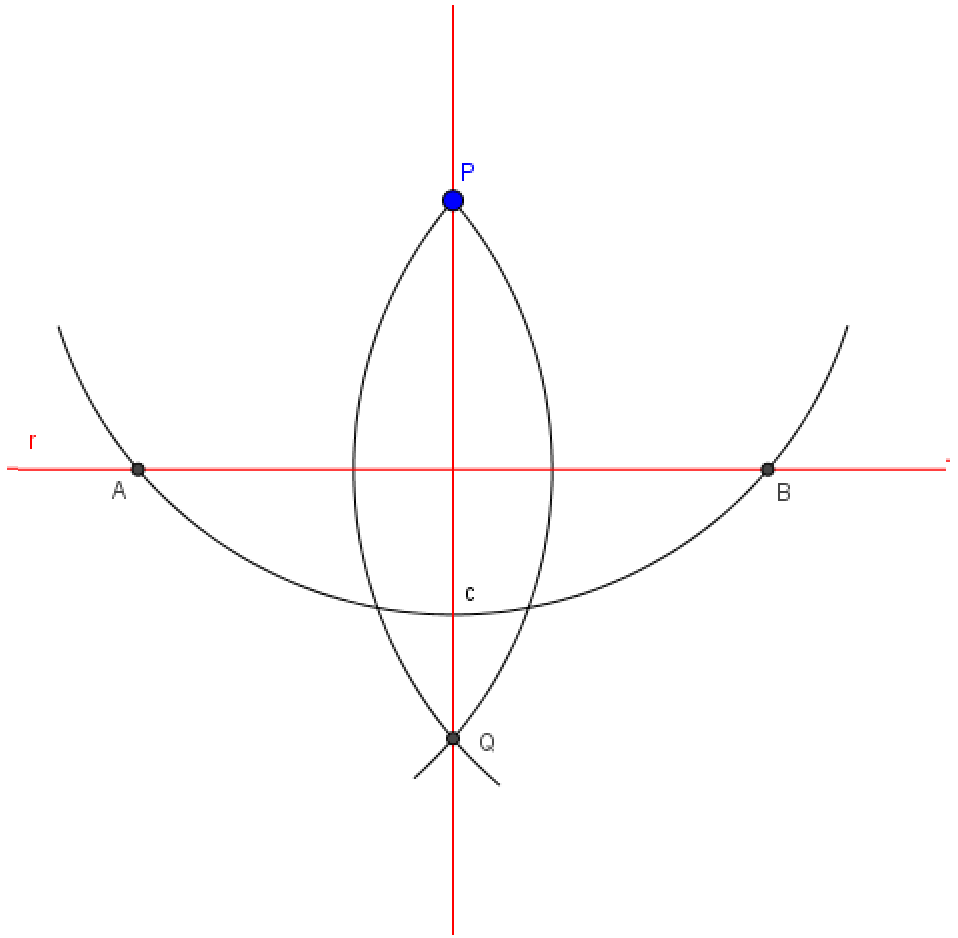
Paralelas e Perpendiculares



Paralelas e Perpendiculares

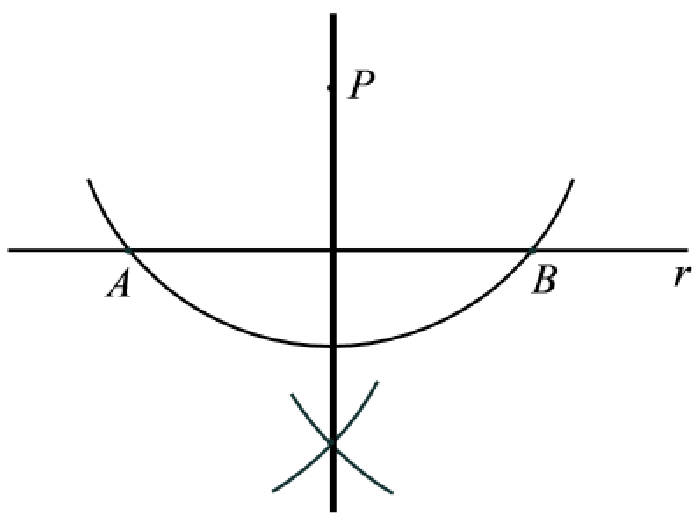


Paralelas e Perpendiculares



Paralelas e Perpendiculares

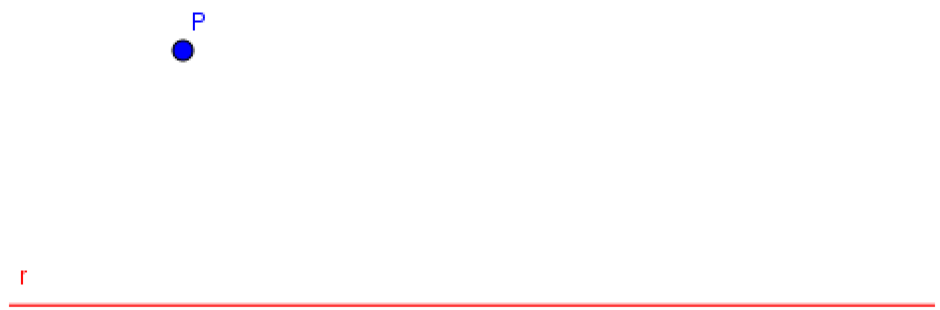
Para resolver o primeiro, seja P um ponto dado fora de uma reta r dada. A construção é a seguinte. Com centro em P trace uma circunferência qualquer cortando a reta r nos pontos A e B como mostra a figura a seguir.



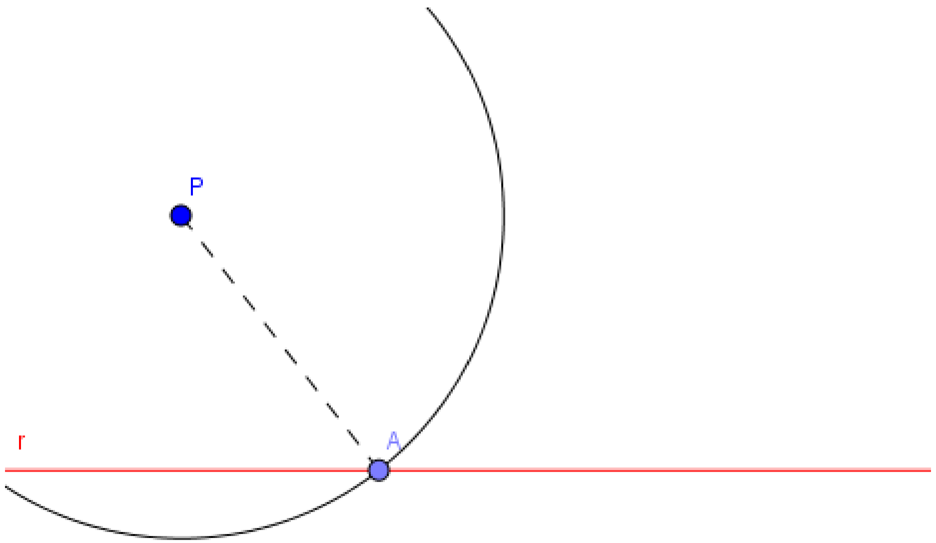
Paralelas e Perpendiculares

O fato importante das construções geométricas é que não basta encontrar a solução. É preciso justificar por que ela é correta. Neste primeiro problema, a primeira circunferência desenhada garante que $PA = PB$ e as duas seguintes, garantem que $QA = QB$. Assim, os pontos P e Q equidistam de A e B. Portanto, eles pertencem à mediatriz do segmento AB que é a reta perpendicular a AB passando pelo seu ponto médio.

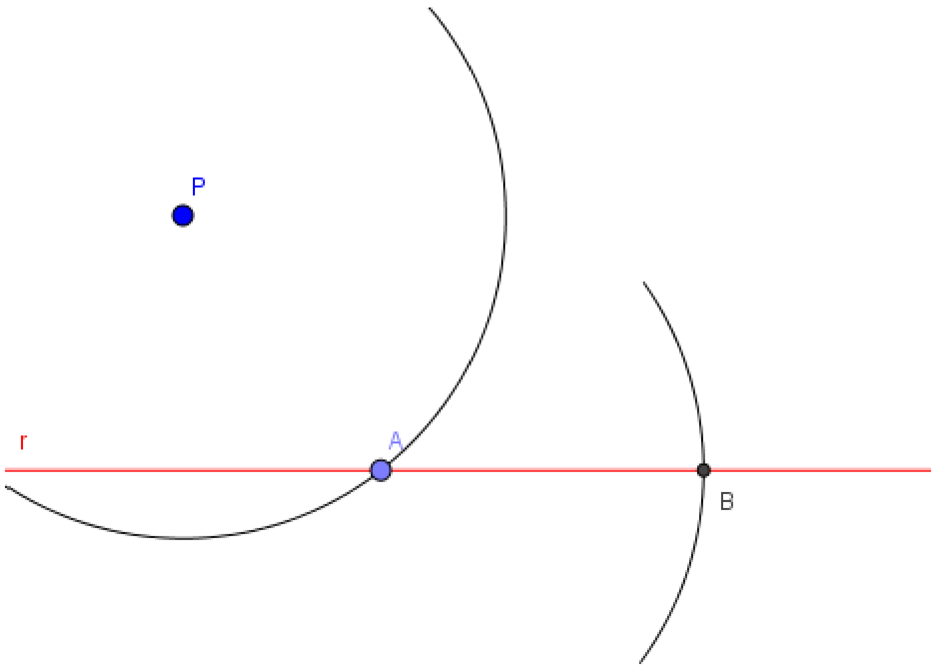
Paralelas e Perpendiculares



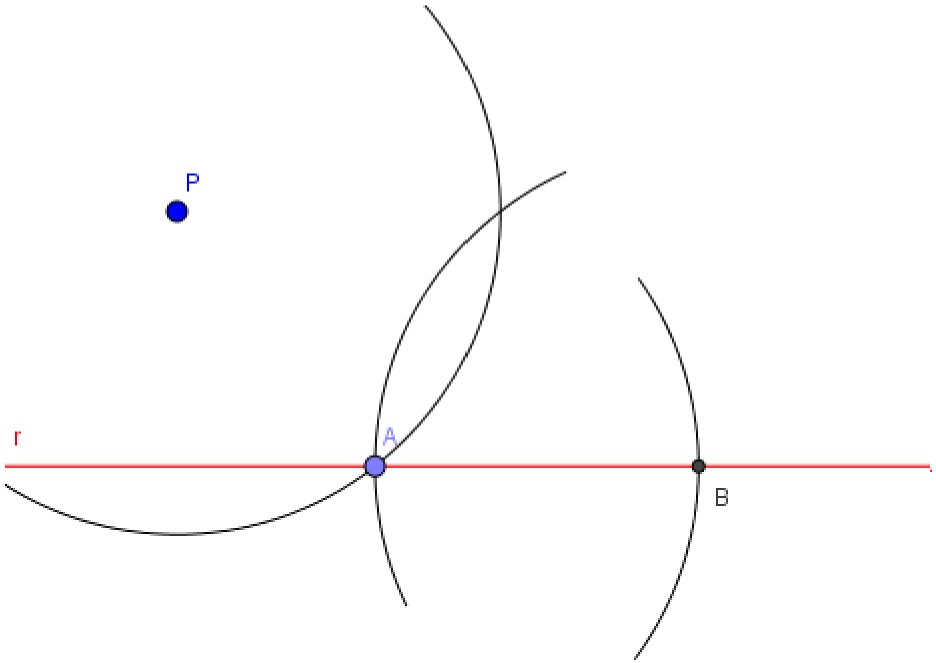
Paralelas e Perpendiculares



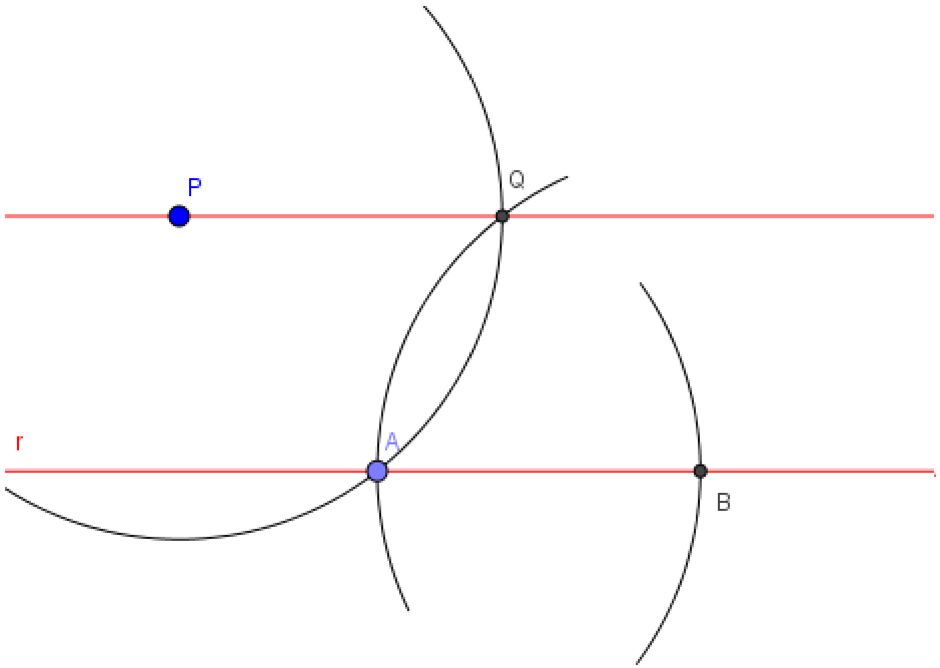
Paralelas e Perpendiculares



Paralelas e Perpendiculares



Paralelas e Perpendiculares

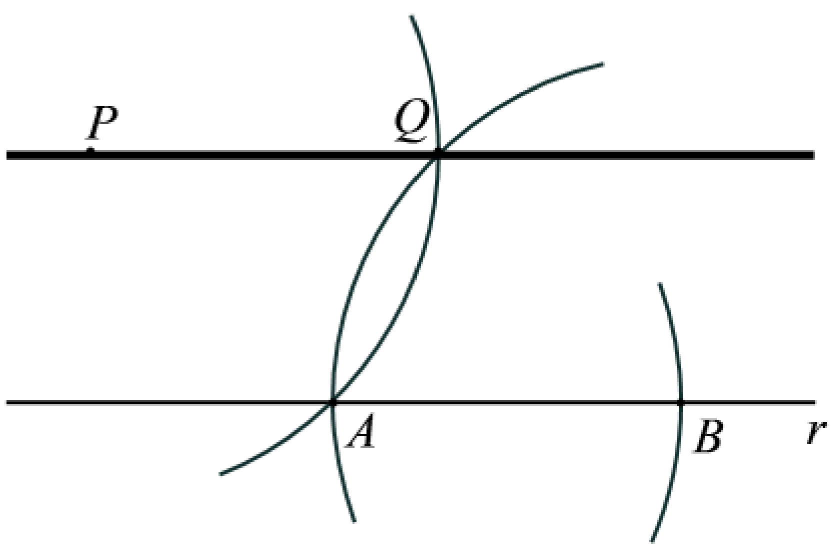


A reta PQ é paralela à reta r e o problema está resolvido.

Para justificar, observe que, pelas construções efetuadas, $PABQ$ é um losango e, portanto seus lados opostos são paralelos.

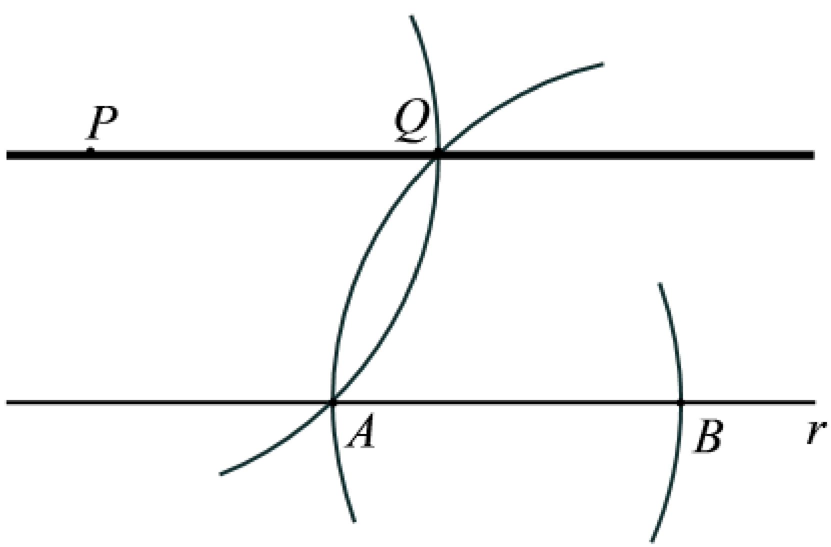
Paralelas e Perpendiculares

Para resolver o segundo problema, seja P um ponto dado fora de uma reta r dada. A construção é a seguinte. Traçamos três circunferências com mesmo raio: a primeira com centro em P cortando a reta r em A; a segunda com centro em A cortando a reta r em B e a terceira com centro em B cortando a primeira circunferência em Q.



Paralelas e Perpendiculares

Para resolver o segundo problema, seja P um ponto dado fora de uma reta r dada. A construção é a seguinte. Traçamos três circunferências com mesmo raio: a primeira com centro em P cortando a reta r em A; a segunda com centro em A cortando a reta r em B e a terceira com centro em B cortando a primeira circunferência em Q.

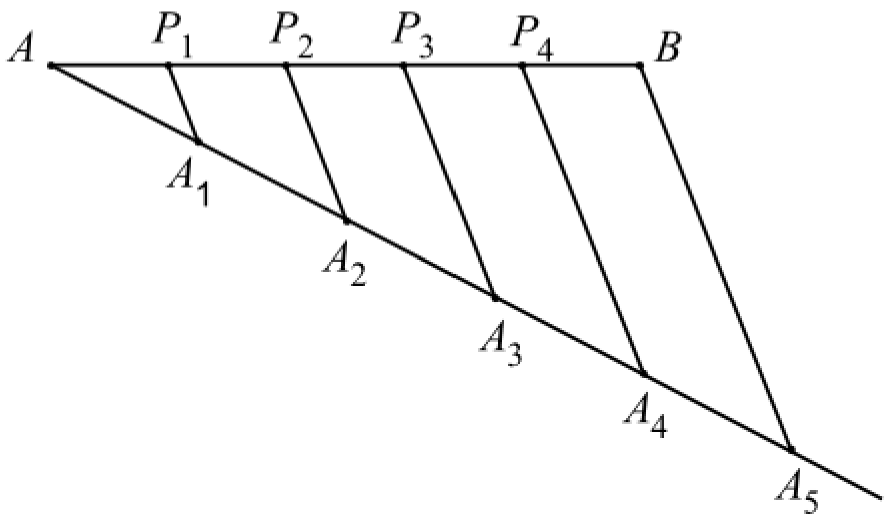


Divisão de um segmento em partes iguais

Dividir um segmento dado em um número qualquer de partes iguais é uma das construções básicas e, frequentemente, precisaremos usá-la.

Dado o segmento AB, para dividi-lo, por exemplo, em 5 partes iguais, traçamos uma semirreta qualquer AX e sobre ela, com o compasso, determinamos 5 segmentos iguais: $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,$ A_4A_5

Divisão de um segmento em partes iguais



Trace agora a reta A_5B. As paralelas a esta reta traçadas pelos pontos A_1, A_2, A_3, A_4 determinam sobre AB os pontos P_1, P_2, P_3, P_4 que o dividirão em 5 partes iguais.

Exercício 1

Construir o triângulo ABC sendo dados os três lados:

Exercício 1 - Solução

Solução: Desenhe uma reta r e sobre ela assinale um ponto que chamaremos B. Para transportar o segmento a, pegue o compasso, ponha a ponta seca em uma das extremidades e abra até que a ponta do grafite coincida com a outra extremidade. Ponha agora a ponta seca em B e trace um pequeno arco cortando a reta r. Este é o ponto C tal que $BC = a$.

Exercício 1 - Solução

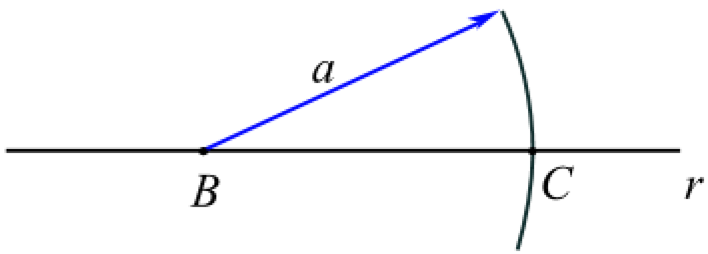
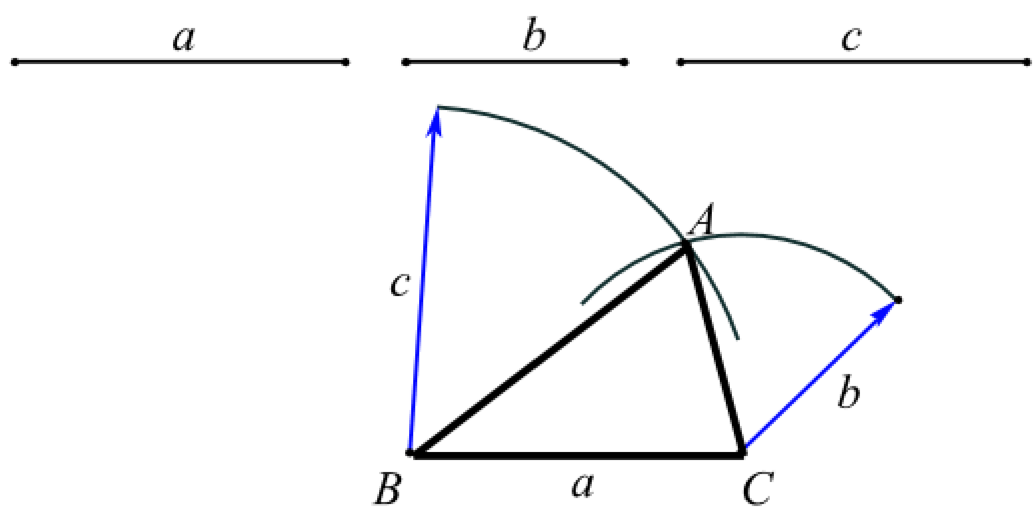


Figura 4

Pegue agora o segmento b com o compasso. Com centro em C desenhe, acima da reta r um arco de circunferência de raio b. Pegue o segmento c com o compasso e, com centro em B desenhe um arco de raio c. A interseção desses dois arcos é o vértice A do triângulo.

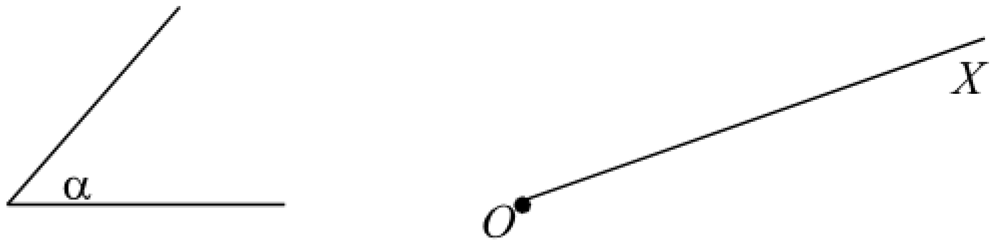
Exercício 1 - Solução

O exemplo anterior mostrou como transportar segmentos de um lugar para outro. Vamos mostrar agora como transportar ângulos.



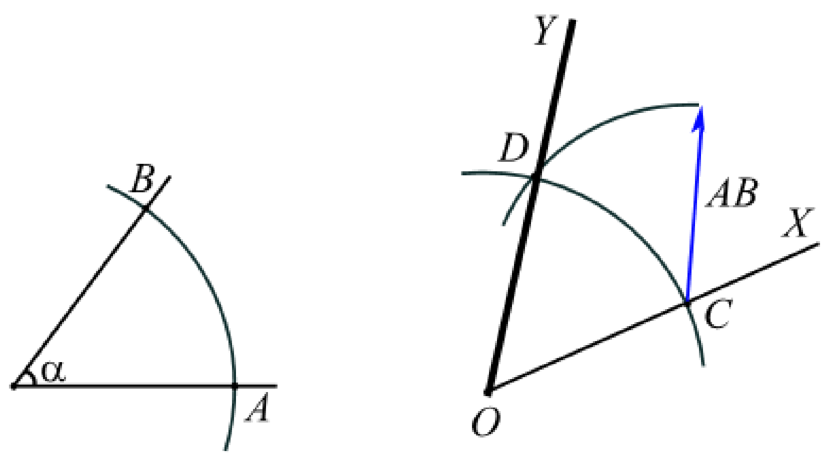
Exercício 2

Dado o ângulo α, e a semirreta OX construir o ângulo $XOY = \alpha$.



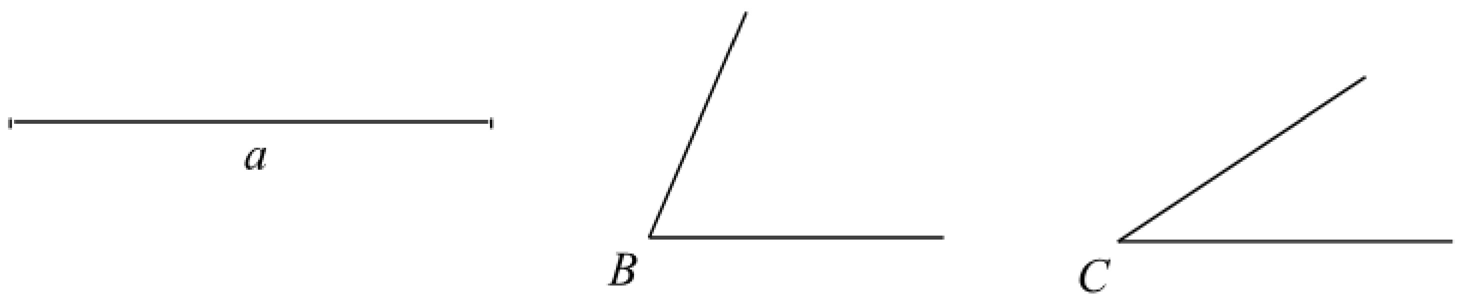
Exercício 2 - Solução

Solução: Com centro no vértice do ângulo dado trace um arco de circunferência cortando seus lados nos pontos A e B (veja figura 6). Sem modificar a abertura do compasso trace um arco com centro O cortando OX em C. Pegue com o compasso a distância AB e trace, com centro em C e com este raio, um arco determinando sobre o primeiro o ponto D. A semirreta OY que passa por D é tal que $XOY = \alpha$.



Exercício 3

Construir o triângulo ABC dados o lado a e os ângulos B e C:



Exercício 3 - Solução

Desenhe na sua folha de papel o segmento $BC = a$ e, em seguida transporte os ângulos dados construindo as semirretas BX e CY de forma que os ângulos CBX e BCY sejam iguais aos ângulos dados. A interseção das duas semirretas é o vértice A.

A partir de agora, vamos permitir, por comodidade, utilizar a régua graduada para fornecer as medidas dos segmentos e o transferidor para as medidas dos ângulos.

Assim o problema anterior poderia ser enunciado assim: construir o triângulo ABC sabendo que o lado BC mede $5\,\mathrm{cm}$ e que os ângulos B e C medem $62°$ e $38°$ respectivamente.

Exercício 4

Construir o triângulo ABC *conhecendo o lado* $BC = 5{,}3\,cm$, *e as medianas* $m_b = 4\,cm$ *e* $m_c = 5\,cm$.

Exercício 4 - Solução

Solução: Sabemos que a distância do baricentro a um vértice é igual a $2/3$ da respectiva mediana. Assim, se G é o baricentro do triângulo ABC, o triângulo GBC pode ser construído porque o lado BC é conhecido e são também conhecidas as distâncias $GB = \frac{2}{3}m_b$ e $GC = \frac{2}{3}m_c$.

Observe, na figura 9 que dividimos cada mediana em três partes iguais para obter $2/3$ de cada uma.

Exercício 4 - Solução

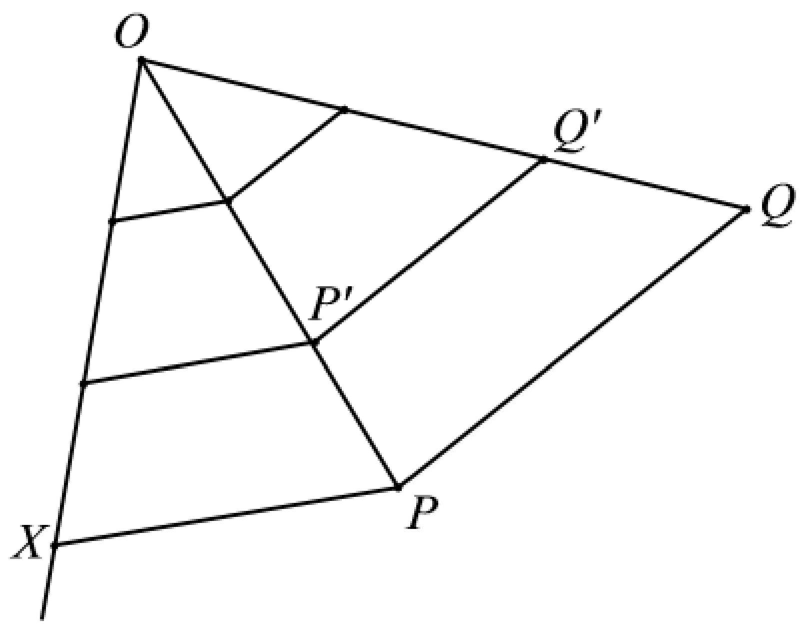
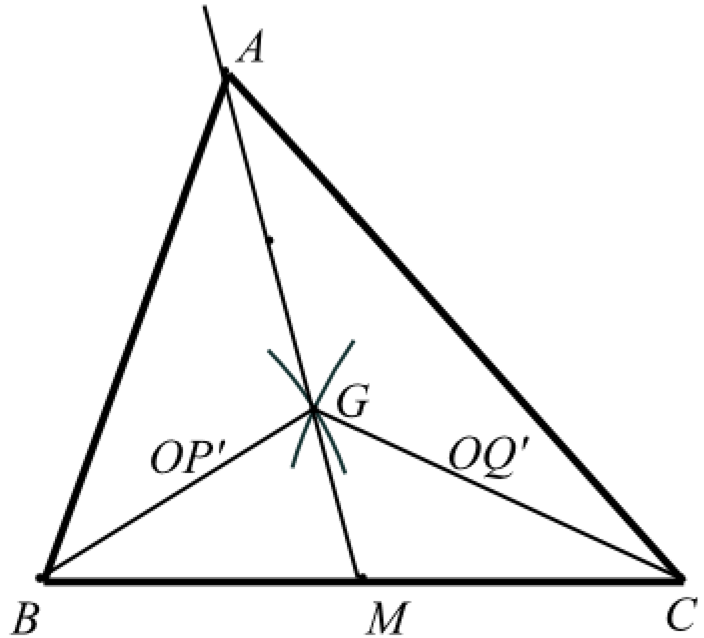


Figura 9

Exercício 4 - Solução

Uma vez construído o triângulo GBC, determinamos (com régua e compasso) o ponto médio de BC e, sobre a reta MG determinamos o ponto A tal que $MA = 3MG$. O problema está resolvido.



Estudar para o próximo encontro!

Próximo encontro: 29/10, sábado, às 08h30

Vídeo aulas do Portal da Matemática:
Módulo: "Aritmética dos Restos"
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=63
Vídeo aulas: "Aritmética Modular", "Cuidado! Cortes nem sempre valem em congruências. Classe inversa módulo n" e "Caso em que vale a lei do corte".