Ciclo 6 – Encontro 2

COMBINAÇÕES COMPLETAS

Nível 3
PO: Márcio Reis
11° Programa de Iniciação Científica Jr.

Combinações Completas

- Capítulo 4 da Apostila 2 do PIC da OBMEP "Métodos de Contagem e Probabilidade", Paulo Cezar Pinto Carvalho, exemplo 5, páginas 35 e 36.
- Material Teórico do Portal da Matemática "Módulo de Métodos Sofisticados de Contagem – Combinações completas", Ângelo Papa Neto.

Combinações Completas - Exemplo

Exemplo 5. Uma professora tem 3 bolas de gude para distribuir para 5 meninos (digamos, Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo). De quantos modos ela pode fazer essa distribuição:

(a) Supondo que ela dê as bolas para 3 alunos distintos?

(b) Supondo que os contemplados possam ganhar mais de uma bola? (Por exemplo, Carlos pode receber todas as bolas.)

Combinações Completas - Exemplo

(a) Supondo que ela dê as bolas para 3 alunos distintos?

Solução: Neste caso, ela deve escolher 3 dentre os 5 meninos para receber as bolas, o que pode ser feito de $C_5^3 = 10$ modos.

Combinações Completas - Exemplo

(b) Supondo que os contemplados possam ganhar mais de uma bola? (Por exemplo, Carlos pode receber todas as bolas.)

Solução: Listamos abaixo algumas possíveis escolhas dos contemplados:

Alfredo, Bernardo, Eduardo
Alfredo, Alfredo, Diogo
Alfredo, Diogo, Diogo
Carlos, Carlos, Carlos

Combinações Completas - Exemplo

Esses grupamentos são chamados de *combinações completas* (ou *com repetição*) dos 5 meninos tomados 3 a 3. Note que o que distingue as diferentes distribuições é o número de bolas que cada aluno recebe. Portanto, o número de possibilidades é igual ao número de listas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de números inteiros não negativos (representando o número de objetos dados a Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo, respectivamente) que satisfazem a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$.

Combinações Completas - Exemplo

Neste caso simples, podemos resolver o problema separando a contagem em casos. A primeira possibilidade é a de que haja três premiados, cada um ganhando uma bola. Como vimos acima, isto pode ser feito de $C_5^3 = 10$ modos. A segunda possibilidade é de que haja dois premiados, um ganhando 1 bola e outro 2 bolas. O primeiro menino pode ser escolhido de 5 modos, e o segundo, de 4; logo, há $4 \times 5 = 20$ maneiras de distribuir as bolas para dois dos meninos. Finalmente, as bolas podem ir todas para um só menino, que pode ser escolhido de 5 modos. Portanto, o número total de possibilidades é $10 + 20 + 5 = 35$.

Combinações Completas - Exemplo

No entanto, dividir a contagem em casos, como fizemos acima, não vai ser prático caso o número de bolas e meninos seja maior. Para contar de modo eficiente o número de distribuições, vamos recorrer a um truque, que nos permite transformar este problema em outro mais simples. Para formar as diferentes distribuições, colocamos as bolas em fila e as separamos em cinco lotes (correspondentes a cada um dos meninos), através de traços verticais. É claro que, neste caso, alguns desses lotes estarão vazios.

Combinações Completas - Exemplo

Vejamos alguns exemplos:

- $0||0|0|$ corresponde a dar 1 bola para Alfredo, para Carlos e para Diogo, enquanto Bernardo e Eduardo não ganham bolas.

- $||00||0$ corresponde a dar 2 bolas para Carlos e 1 para Eduardo, enquanto Alfredo, Bernardo e Carlos não ganham bolas.

Note que há uma correspondência perfeita entre as possíveis distribuições e as listas formadas por 3 bolas e 4 traços. Mas estas últimas nós já sabemos contar! Basta escolher 3 das 7 posições para colocar as bolas, o que pode ser feito de $C_7^3 = 35$ maneiras, como encontramos acima.

Combinações Completas - Exemplo

Naturalmente, podemos aplicar esta solução para o problema geral de contar o número de maneiras de distribuir p objetos para n pessoas (ou seja, de calcular o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$, ou ainda, de calcular o número CR_n^p de combinações completas de n elementos tomados p a p). Temos p bolas, que devem ser separadas por $n - 1$ tracinhos. Ou seja, precisamos escolher p das $n + p - 1$ posições para as bolas. A resposta, portanto, é $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$.

Combinações Completas

Dado um conjunto de n objetos (distintos), o número de maneiras de escolher r dentre eles, onde podemos escolher várias vezes o mesmo elemento e de forma que a ordem em que os r elementos são escolhidos não é importante, é chamado de número de combinações completas de n escolhe r, sendo denotado por $CR_{n,r}$.

Combinações Completas

Exemplo 1. *Uma loja possui duas caixas, cada uma com um grande número de bolinhas. Uma caixa tem somente bolinhas azuis e a outra tem somente bolinhas verdes, sendo que as bolinhas de uma mesma caixa são todas idênticas. Queremos comprar 6 bolinhas para montar um saquinho de presentes. De quantas maneiras isso pode ser feito, observando-se que a ordem em que as bolinhas são colocadas no saquinho é irrelevante?*

Combinações Completas

Solução. Assuma que temos pelo menos 6 bolinhas de cada cor (já que cada caixa possui um número grande de bolinhas). Assim não precisamos nos preocupar se é possível terminar de montar um saquinho. Há apenas dois tipos de objetos distintos a serem escolhidos (as bolinhas verdes e as bolinhas azuis), dentre os quais queremos escolher 6 (com possíveis repetições). Assim, a resposta do problema é, por definição, $CR_{2,6}$. Mas, como podemos calcular esse número?

Combinações Completas

Veja que, como a posição das bolinhas no saquinho não importa, basta determinarmos quantas bolinhas verdes e quantas bolinhas azuis iremos comprar. Denotando por x_1 a quantidade de bolinhas verdes e por x_2 a quantidade de bolinhas azuis, temos que $x_1 + x_2 = 6$. Assim, nesse caso, basta escolhermos x_1 que x_2 estará completamente determinado por $x_2 = 6 - x_1$. Como $x_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ele pode assumir apenas 7 valores, o que nos dá apenas 7 soluções, a saber: $\{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 3), (5, 1), (6, 0)\}$. Logo, há 7 maneiras de realizarmos a compra. $\square$

Distribuindo objetos em caixas

Consideraremos quatro casos aqui, dependendo de se os objetos e as caixas forem idênticos ou não. Ilustraremos cada caso com um exemplo. Uma observação importante é que, em todos os casos abaixo, a ordem dos objetos dentro de cada caixa não é relevante. Estaremos interessados apenas em saber quais objetos pertecem a cada caixa. E, no caso de objetos idênticos, apenas a quantidade de objetos em cada caixa é relevante.

Objetos distintos em caixas distintas

Digamos que temos r objetos distintos, os quais devem ser distribuídos em n caixas distintas. Esse caso pode ser resolvido diretamente, usando o princípio fundamental da contagem. Para cada um dos r objetos, temos de escolher um dentre n possíveis locais para colocá-lo. Assim, temos n escolhas para cada objeto, o que nos dá um total de

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{n \text{ vezes.}} = n^r$$

maneiras de distribuí-los.

Objetos idênticos em caixas distintas

O número de formas de distribuir r objetos idênticos em n caixas distintas (em que cada caixa pode ficar vazia ou receber um ou mais objetos), é precisamente $CR_{n,r}$. Observe que devemos realizar r escolhas, já que temos que determinar, para cada objeto, em qual caixa ele será colocado. Numerando as caixas de 1 a n, e chamando de $x_1, \ldots, x_n$ as quantidades de objetos nas respectivas caixas, vemos que o número de maneiras de distribuir os objetos corresponde ao número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + \cdots + x_n = r$. Mas, como vimos anteriormente, tal número de maneiras é igual a $CR_{n,r}$.

Objetos idênticos em caixas distintas

Vejamos uma outra forma de entender isso. Tome uma coleção de n tipos de objetos e vamos escolher r deles, permitindo que sejam escolhidos vários de um mesmo tipo. O número de maneiras pelas quais podemos fazer isso é, por definição, $CR_{n,r}$. Agora, digamos que você tenha n caixas, numeradas de 1 até n, e tenha também r bolinhas idênticas. Para cada um dos r objetos escolhidos anteriormente, observe qual o seu tipo e, caso ele seja do tipo i (onde $1 \leq i \leq n$), coloque um bolinha na i-ésima caixa. Procedendo dessa forma, vemos que a quantidade de maneiras de escolher os r objetos é igual ao número de maneiras de distribuir as bolinhas nas caixas.

Objetos distintos em caixas idênticas e Objetos idênticos em caixas idênticas

Ler o material: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c7ulccajve8sc.pdf

Exercício 1

Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w = 6$.

Dica: pense que você possui seis bolas e quatro caixas diferentes.

Exercício 1 - Solução

Este problema pode ser representado no esquema bola-traço. Devemos encontrar o número de formas de permutar 6 bolas e 3 traços. Isto pode ser feito de $CR_4^6 = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$.

Exercício 2

Quantas são os anagramas da palavra “PIRACICABA” que não possuem duas letras “A” adjacentes?

Exercício 2

Primeiro colocamos as letras “A” de um único modo: “ __ A __ A __ A __”. Agora devemos decidir quantas letras colocaremos em cada um dos quatro espaços. Devemos escolher x_1, x_2, x_3, x_4 (x_i = nº de letras que colocaremos no i-ésimo espaço) inteiros não negativos tais que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$, com $x_2 \geq 1$ e $x_3 \geq 1$ (para não ter duas letras “A” adjacentes). Fazendo $x_2 = y_2 + 1$ e $x_3 = y_3 + 1$ obtemos a equação $x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + x_4 = 7$, ou seja $x_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 5$, onde x_1, y_2, y_3, x_4 são inteiros não negativos. Este problema pode ser representado no esquema bola-traço. Devemos encontrar o número de formas de permutar 5 bolas e 3 traços. Isto pode ser feito de $CR_4^5 = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} = 56$. Cada uma dessas soluções corresponde a uma configuração de número de letras entre as letras “A”. Agora devemos permutar as letras “P,I,R,C,I,C,B” nos espaços, o que pode ser feito de $\frac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 1260$. Portanto, o número de anagramas procurado é $56 \cdot 1260 = 70\,560$.

Exercício 3

De quantos modos podem ser pintados 9 objetos iguais usando 3 cores diferentes?

Exercício 3 - Solução

Chamemos as cores pelos números 1, 2, 3. Seja x_i o número de objetos pintados usando a cor i. Dessa forma devemos achar o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Novamente podemos representar este problema no esquema bola-traço. Devemos encontrar o número de formas de permutar 9 bolas e 2 traços. Isto pode ser feito de $CR_3^9 = \frac{11!}{9! \cdot 2!} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$.

Exercício 4

De quantas formas podemos distribuir 25 livros diferentes em 4 caixas que possuem cores diferentes?

Exercício 4 - Solução

Solução. Para cada um dos 25 livros, basta escolher em qual das 4 caixas ele será colocado. Logo, temos um total de 25^4 maneiras de distribuir os livros. $\square$

Estudar para o próximo encontro!

Próximo encontro: 10/12, sábado, às **8h30**

Módulo: "Construções geométricas com régua e compasso"
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=67
Vídeoaulas:

Aula 12- Quadrado inscrito em um triângulo
Aula 13 - Segmento medindo raiz de n
Aula 16 - Construções impossíveis com régua e compasso