GeoJeca

Geometria plana.

Resumo teórico e exercícios.

3º Colegial / Curso Extensivo.

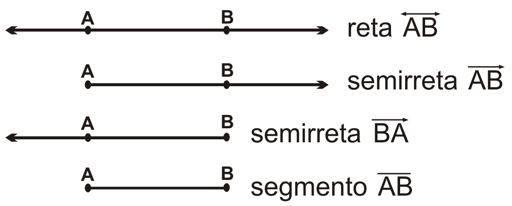
Autor - Lucas Octavio de Souza
(Jeca)

Relação das aulas.

Autor - Lucas Octavio de Souza
(Jeca)

Geometria plana
Aula 01
Conceitos iniciais de Geometria Plana.

I) Reta, semirreta e segmento de reta.



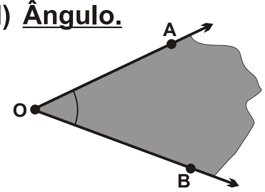
Definições.

a) Segmentos congruentes.
Dois segmentos são congruentes se têm a mesma medida.

b) Ponto médio de um segmento.
Um ponto P é ponto médio do segmento AB se pertence ao segmento e divide AB em dois segmentos congruentes.

c) Mediatriz de um segmento.
É a reta perpendicular ao segmento no seu ponto médio

II) Ângulo.



OA - lado
OB - lado
O - vértice
ângulo AÔB ou ângulo

Definições.

a) Ângulo é a região plana limitada por duas semirretas de mesma origem.

b) Ângulos congruentes.
Dois ângulos são ditos congruentes se têm a mesma medida.

c) Bissetriz de um ângulo.
É a semirreta de origem no vértice do ângulo que divide esse ângulo em dois ângulos congruentes.

IIa) Unidades de medida de ângulo.

a) Grau.
A medida de uma volta completa é 360º.

1º = 60'
1' = 60"

º - grau
' - minuto
" - segundo

b) Radiano.
A medida de uma volta completa é 2 radianos.

Um radiano é a medida do ângulo central de uma circunferência cuja medida do arco correspondente é igual à medida do raio da circunferência.

IIb) Classificação dos ângulos.

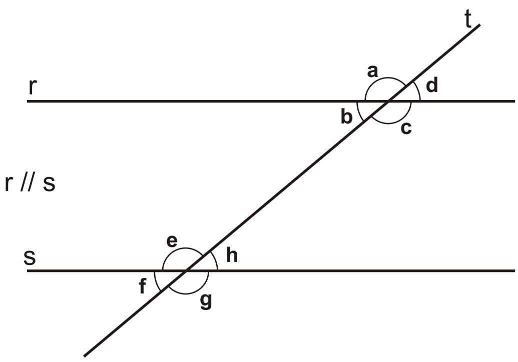
= 0º - ângulo nulo.
0º < < 90º - ângulo agudo.
= 90º - ângulo reto.
90º < < 180º - ângulo obtuso.
= 180º - ângulo raso.

Definições.

a) Ângulos complementares.
É o par de ângulos cuja soma das medidas é 90º.

b) Ângulos suplementares.
É o par de ângulos cuja soma das medidas é 180º.

IIc) Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal.

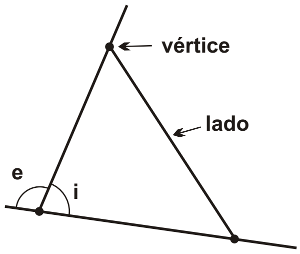


a) Ângulos correspondentes (mesma posição).
exemplo - b e f.
Propriedade - são congruentes.

b) Ângulos colaterais (mesmo lado).
exemplo de colaterais internos - h e c.
exemplo de colaterais externos - d e g.
Propriedade - são suplementares (soma = 180º)

c) Ângulos alternos (lados alternados).
exemplo de alternos internos - b e h.
exemplo de alternos externos - a e g.
Propriedade - são congruentes.

III) Triângulos.



i - ângulo interno
e - ângulo externo

Num mesmo vértice, tem-se

i + e = 180º

Ângulo externo.

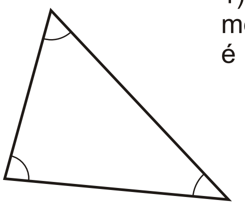
O ângulo externo de qualquer polígono convexo é o ângulo formado entre um lado e o prolongamento do outro lado.

Classificação dos triângulos.

a) quanto aos lados:
- triângulo equilátero.
- triângulo isósceles.
- triângulo escaleno.

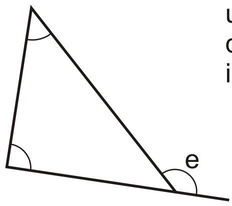
b) quanto aos ângulos:
- triângulo retângulo.
- triângulo obtusângulo.
- triângulo acutângulo.

Propriedades dos triângulos.



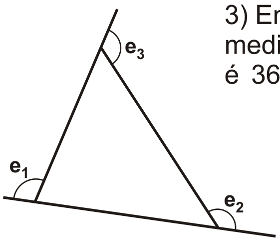
1) Em todo triângulo, a soma das medidas dos 3 ângulos internos é 180º.

+ + = 180º



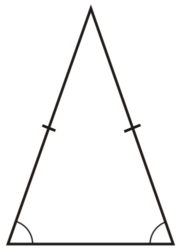
2) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos 2 ângulos internos não adjacentes.

e = +



3) Em todo triângulo, a soma das medidas dos 3 ângulos externos é 360º.

$e_1 + e_2 + e_3 = 360º$



4) Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Observação - A base de um triângulo isósceles é o seu lado diferente.

Exercícios.

01) Efetue as operações com graus abaixo solicitadas.

a) 48º 27' 39" + 127º 51' 42"	c) 90º - 61º 14' 44"	e) 4 x (68º 23' 54")
b) 106º 18' 25" + 17º 46' 39"	d) 136º 14' - 89º 26' 12"	f) 3 x (71º 23' 52")

g) $\dfrac{125^\circ\ 39'\ 46''}{4}$

h) $\dfrac{118^\circ\ 14'\ 52''}{3}$

i) $\dfrac{125^\circ\ 12'\ 52''}{5}$

j) $\dfrac{90^\circ}{13}$

02) Determine o ângulo que é o dobro do seu complemento.

03) Determine o ângulo que excede o seu suplemento em 54°

04) Determine o ângulo cuja diferença entre o seu suplemento e o triplo do seu complemento é igual a 54°.

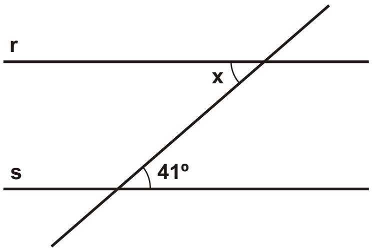
05) Dois ângulos são suplementares. O menor é o complemento da quarta parte do maior. Determine as medidas desses ângulos.

06) As medidas de dois ângulos somam 124°. Determine esses ângulos sabendo que o suplemento do maior é igual ao complemento do menor.

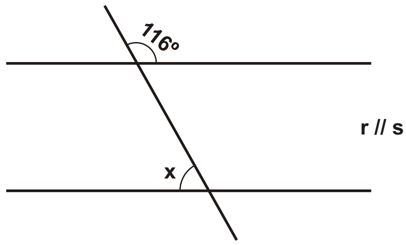
07) Determine um ângulo sabendo que o suplemento da sua quinta parte é igual ao triplo do seu complemento.

08) Em cada figura abaixo, determine a medida do ângulo x.

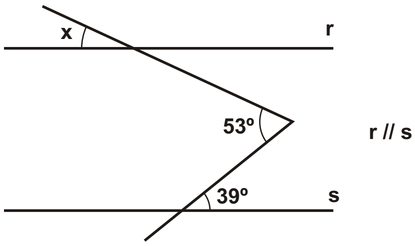
a)



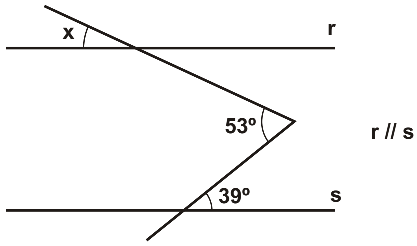
b)



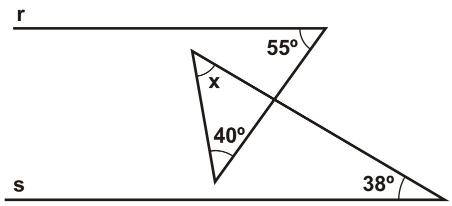
c)



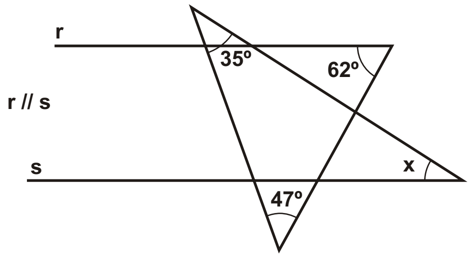
d) (Tente fazer de outra maneira)



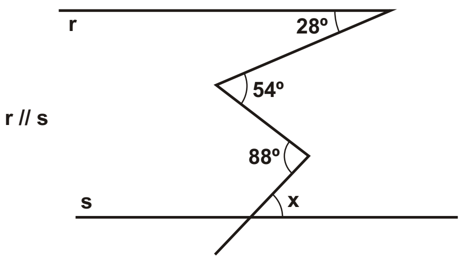
e)



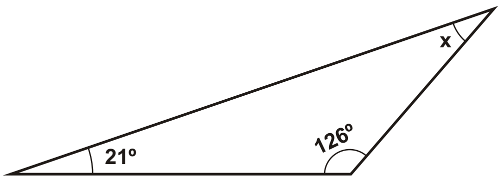
f)



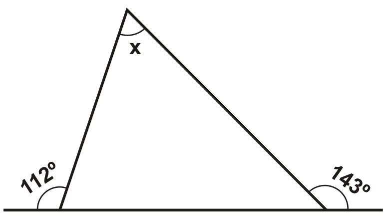
g)



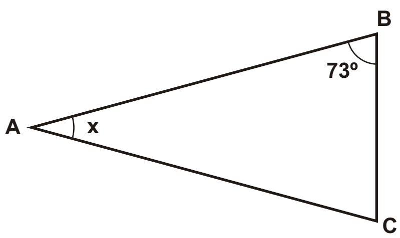
h)



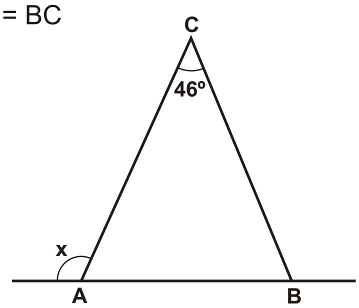
i)



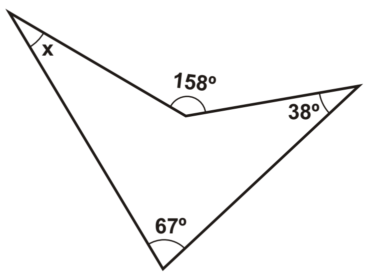
j) **AB = AC**



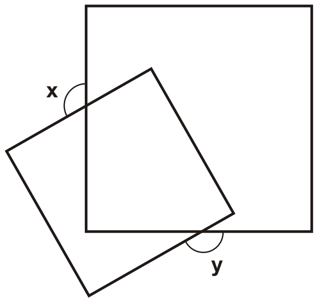
k) AC = BC



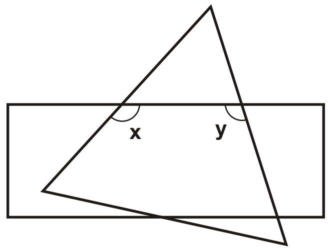
l)



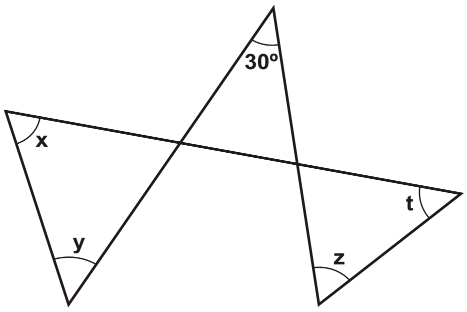
09) A figura abaixo mostra dois quadrados sobrepostos. Qual é o valor de $x + y$, em graus ?



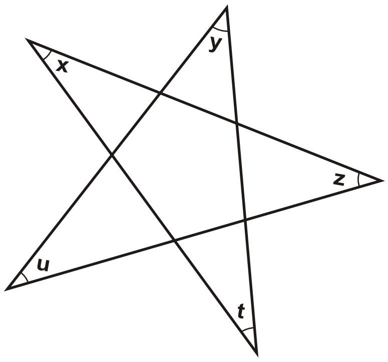
10) Na figura abaixo, estão representados um triângulo equilátero e um retângulo. Sendo x e y as medidas dos ângulos assinalados, determine a soma $x + y$.



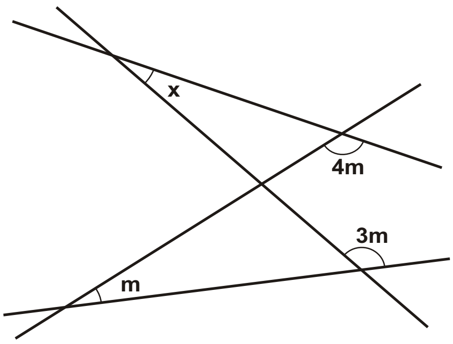
11) Na figura abaixo, determinar $x + y + z + t$.



12) Na figura abaixo, determinar o valor da soma das medidas dos ângulos x, y, z, t e u.

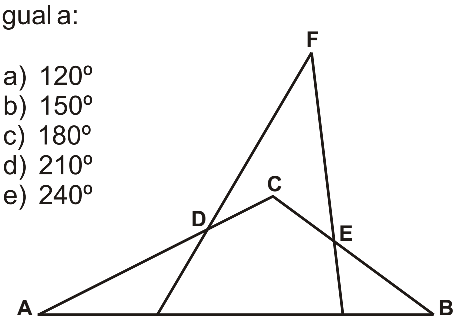


13) Na figura abaixo, calcule o valor de x em função de m.

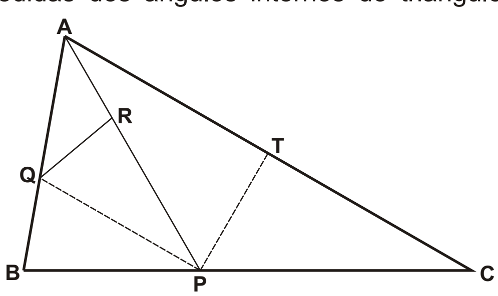


14) (IBMEC-SP) Sejam , , , e as medidas em graus dos ângulos BAC, ABC, CDF, CEF e DFE da figura, respectivamente. A soma + + + + é igual a:

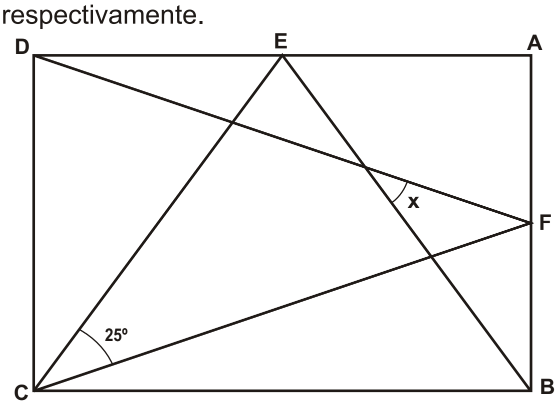
a) 120º
b) 150º
c) 180º
d) 210º
e) 240º



15) (ITA-SP) Em um triângulo de papel ABC fazemos uma dobra PT de modo que o vértice C coincida com o vértice A, e uma dobra PQ de modo que o vértice B coincida com o ponto R de AP. Sabemos que o triângulo AQR formado é isósceles com ARQ = 100º; calcule as medidas dos ângulos internos do triângulo ABC.



16) Determine x, sabendo-se que ABCD é um retângulo e que F e E são pontos médios dos lados AB e AD, respectivamente.



Respostas desta aula.

01)
a) 176º 19' 21" b) 124º 05' 04"
c) 28º 45' 16" d) 46º 47' 48"
e) 273º 35' 36" f) 214º 11' 36"
g) 31º 24' 56" h) 39º 24' 57"
i) 25º 02' 34" j) 06º 55' 23"

02) 60º

03) 117º

04) 72º

05) 60º e 120º

06) 17º e 107º

07) 225º / 7

08)
a) 41º b) 64º c) 14º d) 14º e) 47º
f) 36º g) 62º h) 33º i) 75º j) 34º
k) 113º l) 53º

09) 270º

10) 240º

11) 210º

12) 180º

13) 2m

14) c

15) 70º, 80º e 30º

16) 25º

Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

Obrigado.

Jeca

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

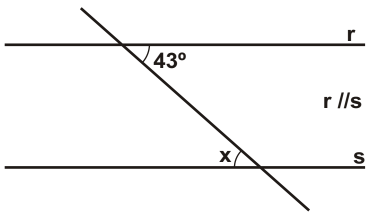
Geometria plana

Conceitos iniciais de Geometria Plana.

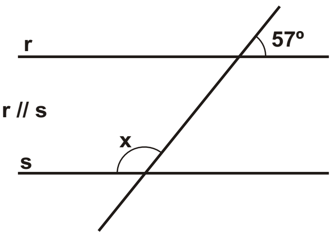
Exercícios complementares da aula 01.

01) Nas figuras abaixo, determinar o valor de x.

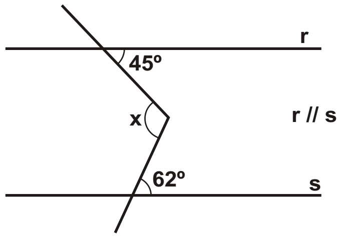
a)



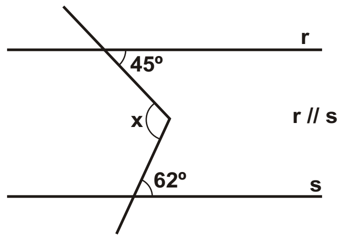
b)



c)

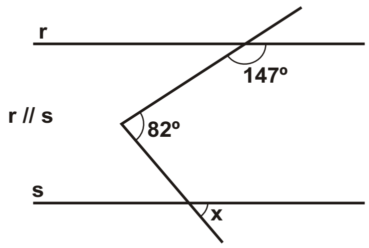


d)

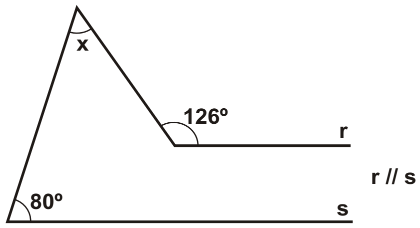


(Resolver de forma diferente da letra c))

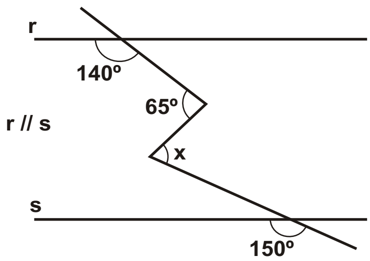
e)



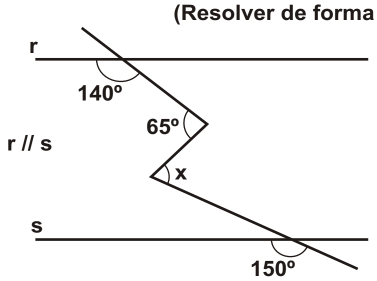
f)



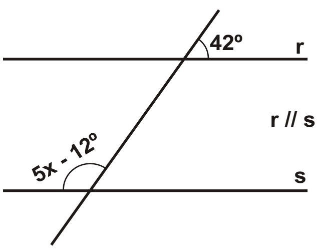
g)



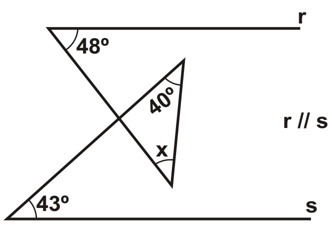
h) (Resolver de forma diferente da letra g))



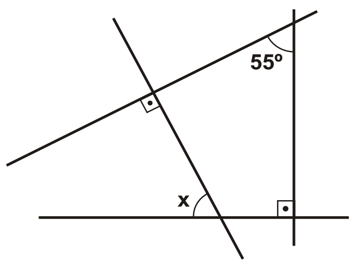
i)



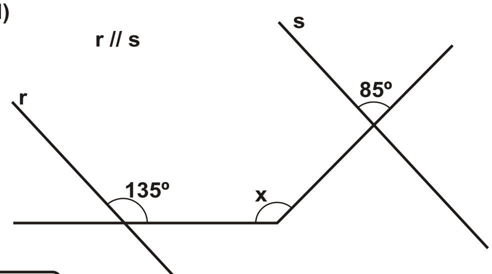
j)



k)

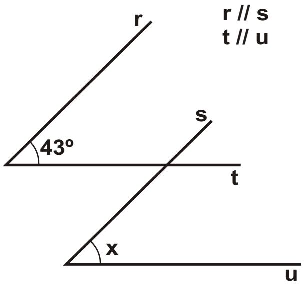


l)



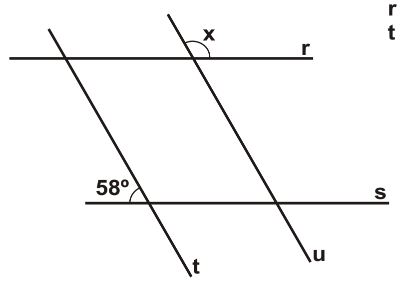
m)

r // s
t // u

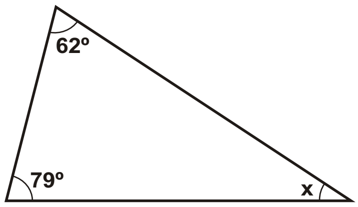


n)

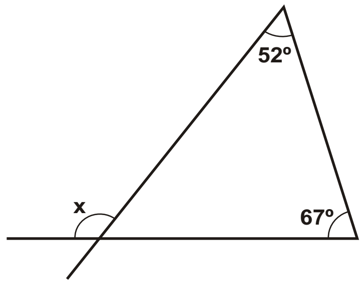
r // s
t // u



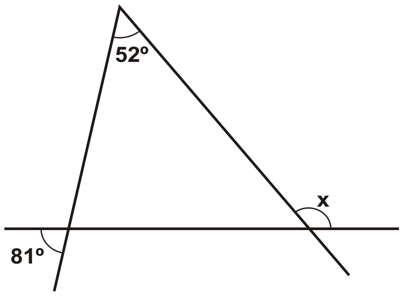
o)



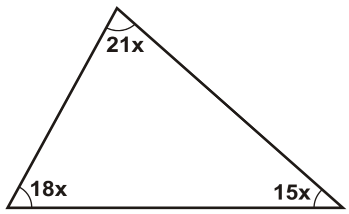
p)



q)

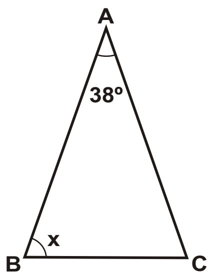


r)



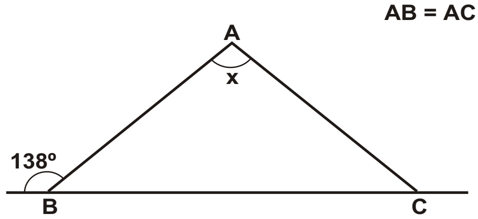
s)

(Triângulo isósceles)
AB = AC



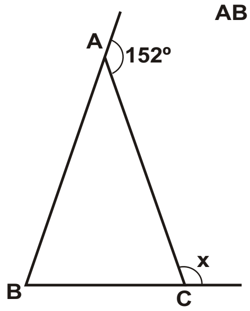
t)

(Triângulo isósceles)
AB = AC

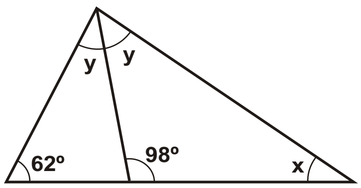


u)

AB = AC

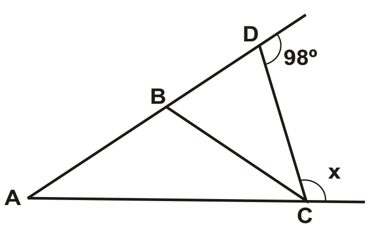


v)



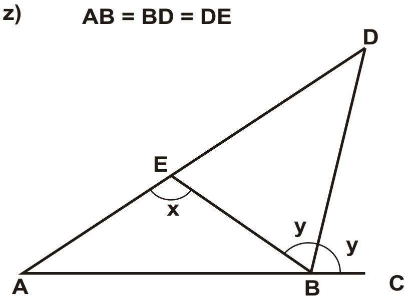
x)

AB = BC = CD



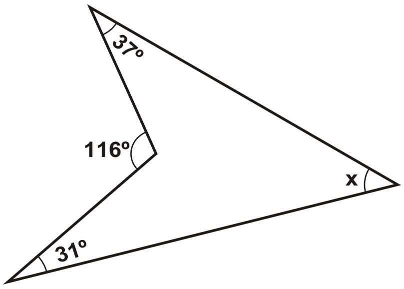
z)

AB = BD = DE

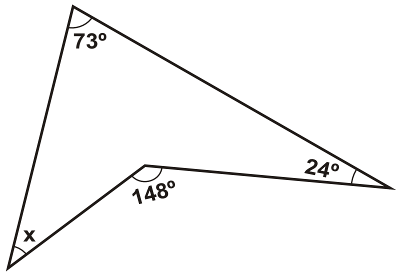


02) Nas figuras abaixo, determinar o valor de x.

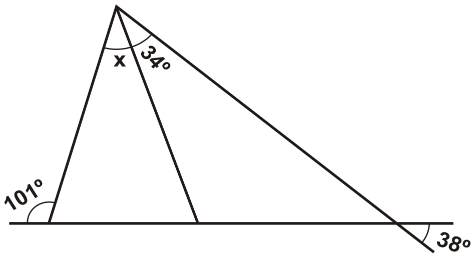
a)



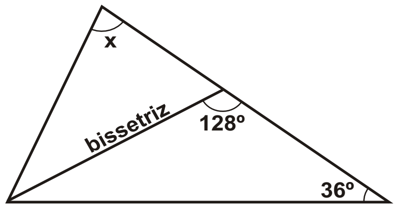
b)



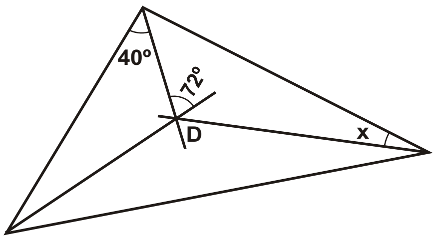
c)



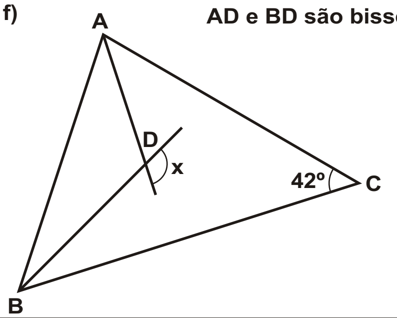
d)



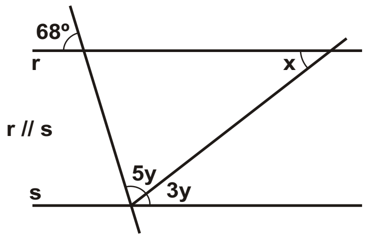
e) D é o ponto de encontro das 3 bissetrizes.



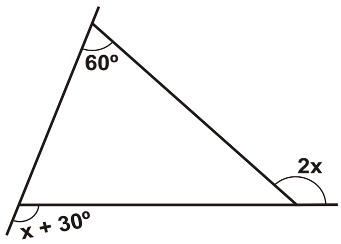
f) AD e BD são bissetrizes.



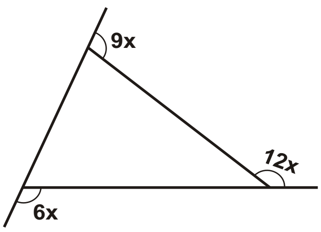
g)



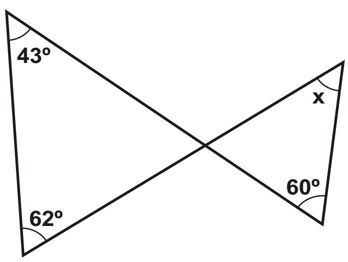
h)



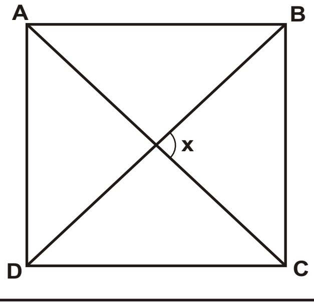
i)



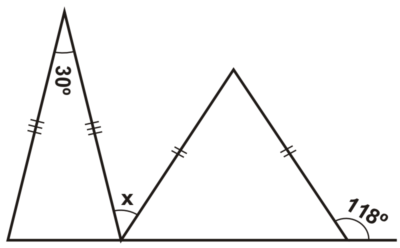
j)



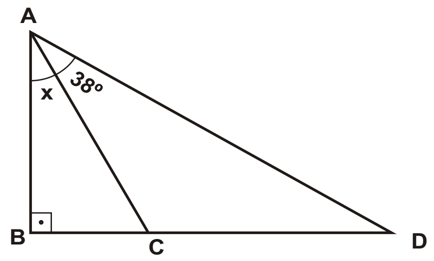
k) ABCD é um quadrado.



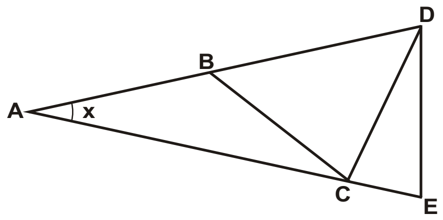
l)



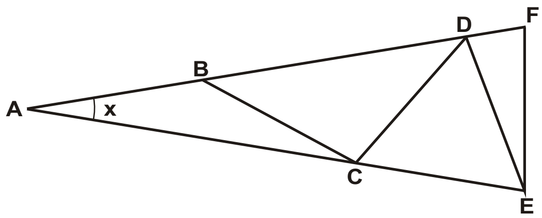
m) AC = CD



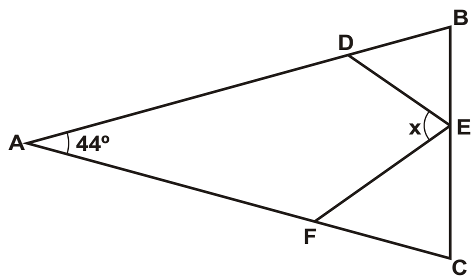
n) AB = BC = CD = DE e AD = AE



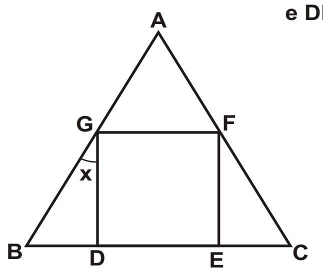
o) AB = BC = CD = DE = EF e AE = AF



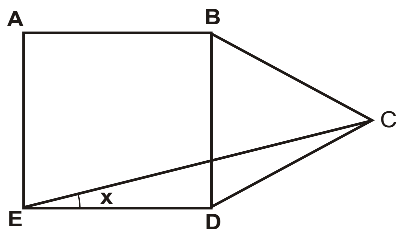
p) AB = AC , BD = BE e CE = CF.



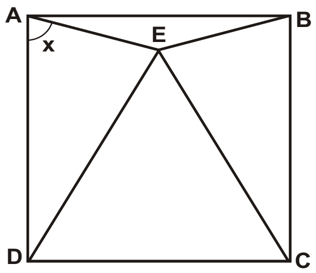
q) ABC é um triângulo equilátero e DEFG é um quadrado.



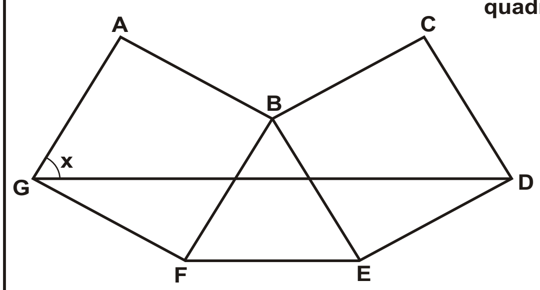
r) BCD é um triângulo equilátero e ABDE é um quadrado.



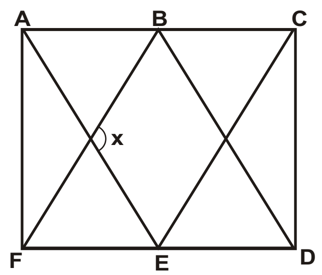
s) CDE é um triângulo equilátero e ABCD é um quadrado.



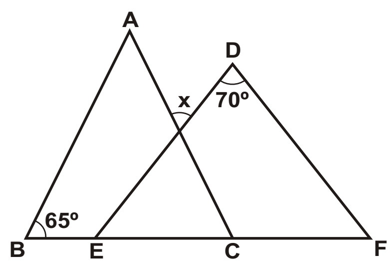
t) BFE é um triângulo equilátero, ABFG e BCDE são quadrados.



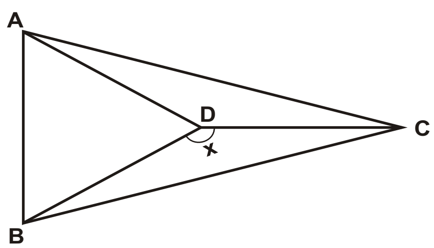
u) ACE e BDF são triângulos equiláteros.



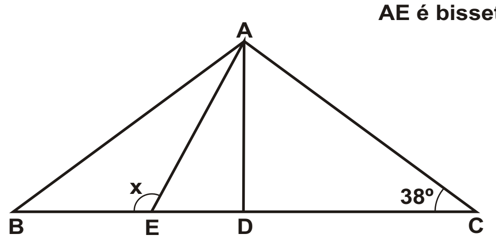
v) AB = AC e DE = DF.



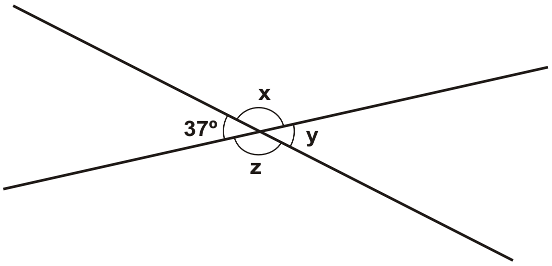
x) AB = AD = BD = DC e AC = BC.



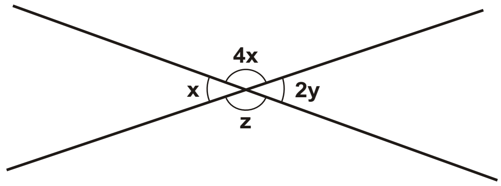
z) AB = AC
AD é bissetriz de BÂC
AE é bissetriz de BÂD.



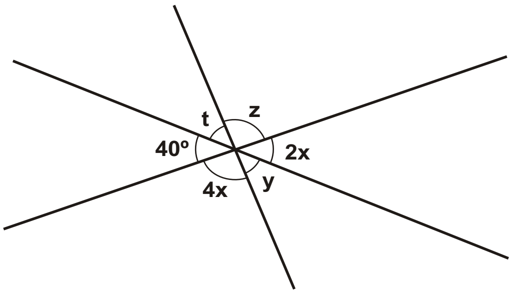
03) Na figura abaixo, determine x, y e z.



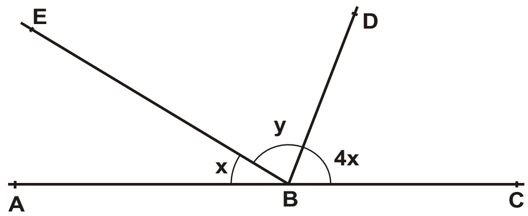
04) Na figura abaixo, determinar x, y e z.



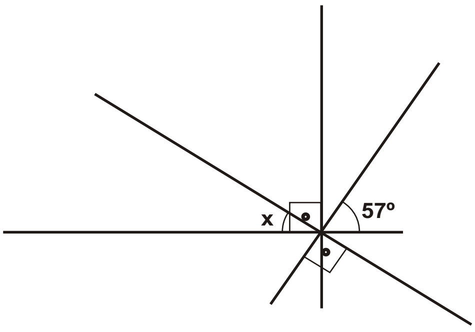
05) Na figura abaixo, determinar x, y, z e t.



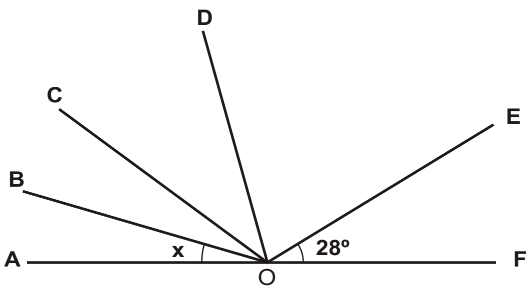
06) Na figura abaixo, sendo BD a bissetriz do ângulo CBE, determinar x + y.



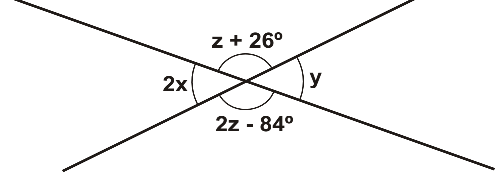
07) Na figura abaixo, determinar o valor de x.



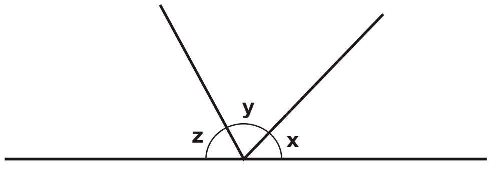
08) Na figura abaixo, determinar o valor do ângulo x, sabendo-se que OD é bissetriz de AOE, OC é bissetriz de AOD e OB é bissetriz de AOC.



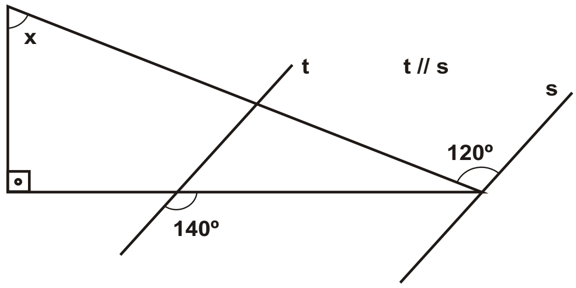
09) Na figura abaixo, determine os valores de x, y e z.



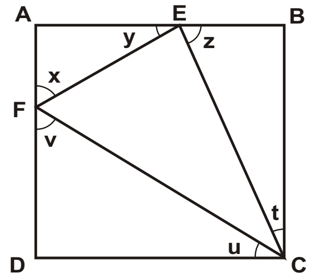
10) Determinar os valores de x, y e z, sabendo que os mesmos formam uma progressão aritmética de razão 10º.



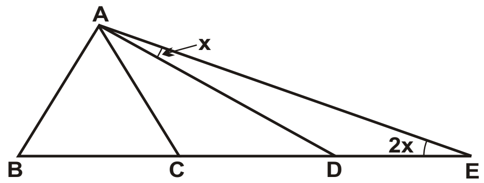
11) (FUVEST) Na figura abaixo, determine o valor de x.



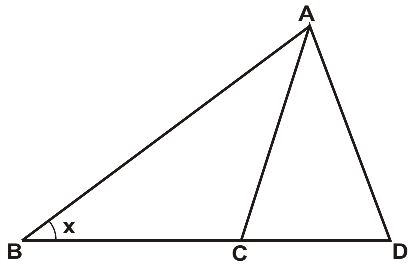
12) Na figura abaixo, determinar o valor da soma x + y + z + t + u + v, sabendo-se que CEF é um triângulo inscrito no quadrado ABCD.



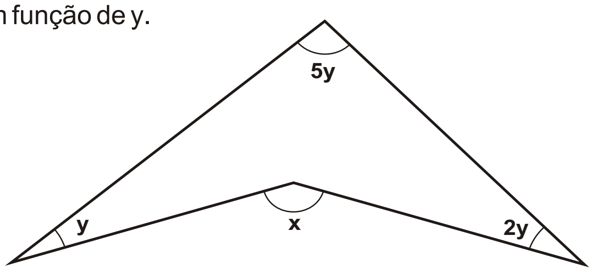
13) Na figura abaixo, AB = AC = BC = CD. Determine o valor de x.



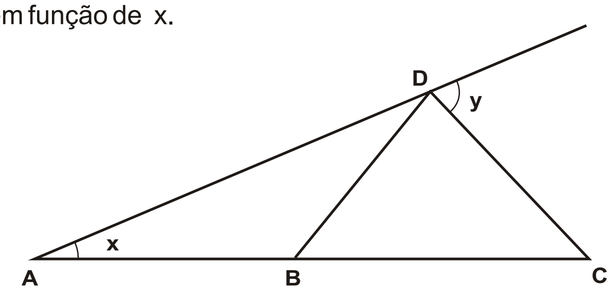
14) Na figura abaixo, AD = AC = BC e AC é a bissetriz do ângulo BAD. Determine o valor de x.



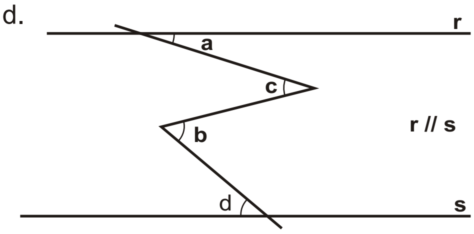
15) Na figura abaixo, determine a medida do ângulo x em função de y.



16) (FUVEST) Na figura, AB = BD = CD. Determine y em função de x.

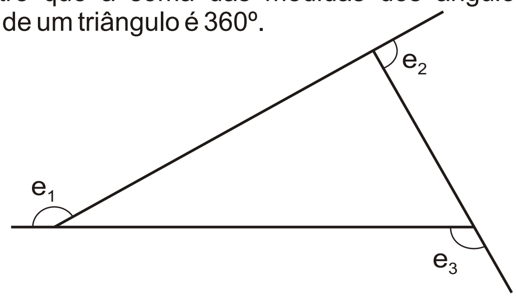


17) Na figura abaixo mostre que vale a relação :
a + b = c + d.

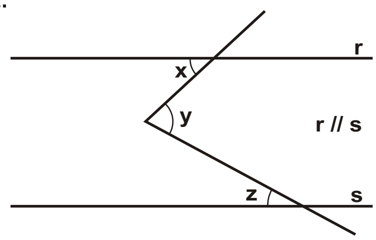


18) Um dos ângulos internos de um triângulo isósceles mede 100º. Determinar a medida do ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos outros dois ângulos internos.

19) Mostre que a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo é 360º.

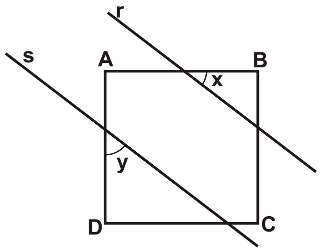


20) Na figura abaixo, determinar x em função de y e de z.

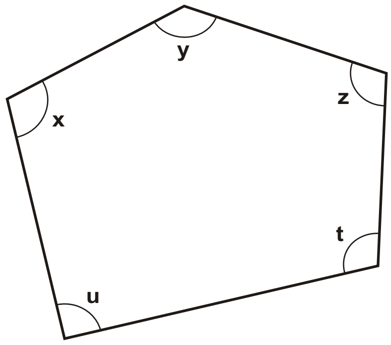


21) Na figura abaixo, o quadrado ABCD é cortado por duas retas paralelas, r e s. Com relação aos ângulos x e y podemos afirmar que :

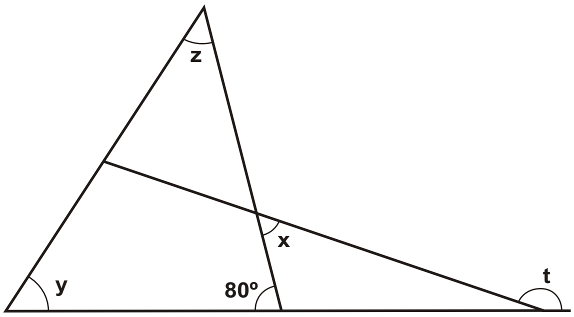
a) x = y
b) x = -y
c) x + y = 90º
d) x - y = 90º
e) x + y = 180º



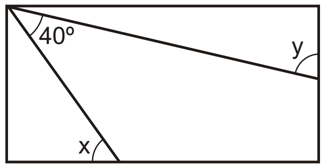
22) Na figura abaixo, determinar o valor da soma das medidas dos ângulos x, y, z, t e u.



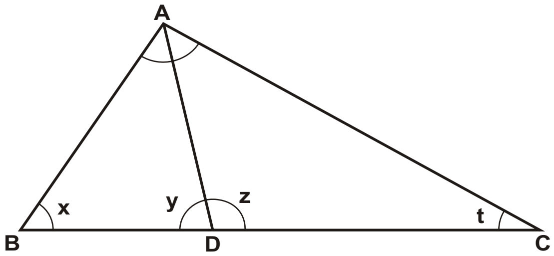
23) Na figura abaixo, calcule o ângulo x, sendo y o triplo de z e t o sêxtuplo de z.



24) (FUVEST-SP) No retângulo abaixo, qual o valor em graus de x + y ?

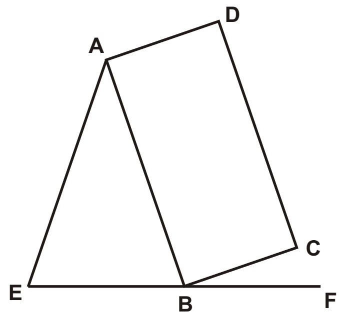


25) Na figura abaixo, sendo AD a bissetriz do ângulo Â, demonstre que vale a relação z - y = x - t.

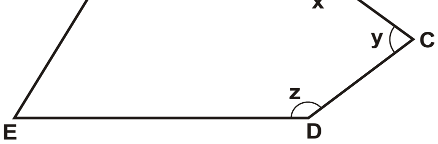


26) Na figura abaixo, o ângulo EAB mede 38º, ABCD é um retângulo e AB é congruente a AE. A medida do ângulo CBF é :

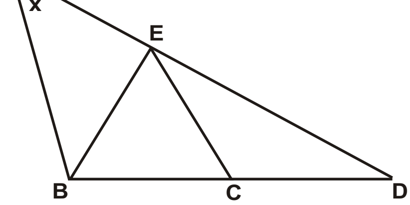
a) 38º
b) 27º
c) 18º
d) 19º
e) 71º



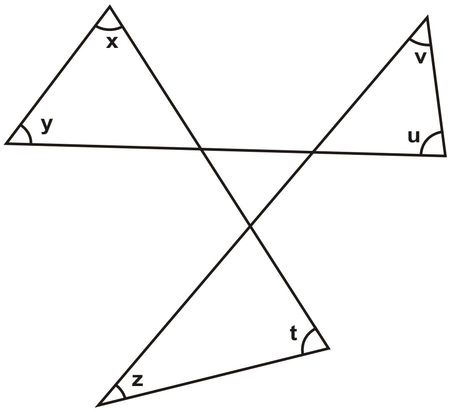
27) Na figura abaixo, sendo AB // DE, determinar a soma das medidas dos ângulos x, y e z.



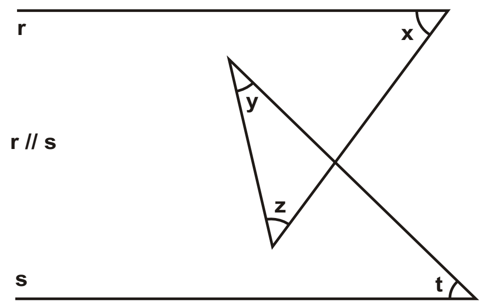
28) Determinar a medida do ângulo x, sabendo-se que os triângulos ABE e CDE são isósceles e que o triângulo BCE é equilátero.



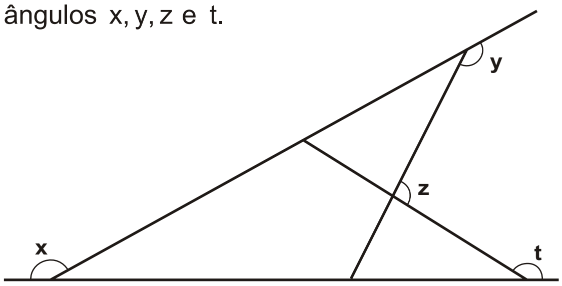
29) Na figura abaixo, determine a soma das medidas dos ângulos x, y, z, t, u e v.



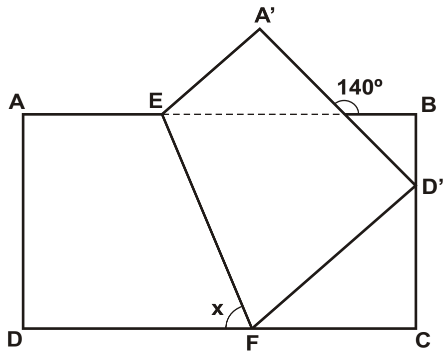
30) Na figura abaixo, determine a soma das medidas dos ângulos x, y, z e t.



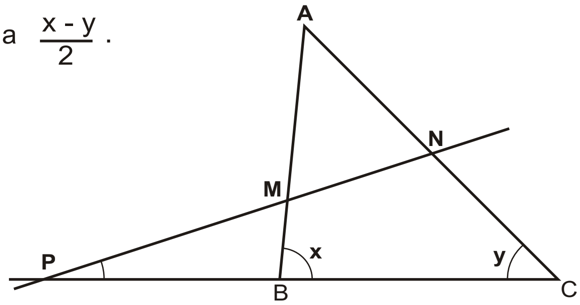
31) Na figura abaixo, determine a soma das medidas dos ângulos x, y, z e t.



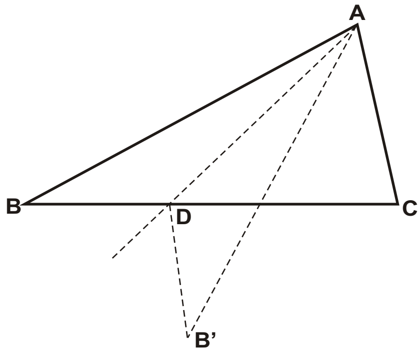
32) Um retângulo de papel é dobrado de forma que o vértice D pertença ao lado BC, conforme a figura. Sendo EF a dobra feita, calcule a medida do ângulo x, conhecendo a medida de 140º do ângulo assinalado.



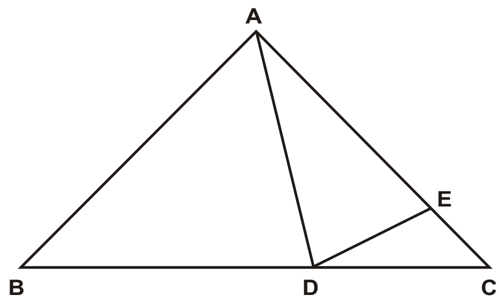
33) Na figura, AM = AN, x > y e as reta MN e BC interceptam-se em P. Mostre que o ângulo MPB é igual a $\frac{x - y}{2}$.



34) Na figura abaixo, os ângulos ABC, ACB e CAB' medem respectivamente 30º, 80º e 30º. Sendo AD uma dobra de tal forma que o lado AB' é simétrico do lado AB em relação a AD, determine a medida do ângulo ADB.



35) Na figura, sendo AB congruente a AC, AE congruente a AD, calcule a medida do ângulo CDE, sabendo-se que BAD = 48º.



Respostas desta aula.

01)
a) 43º b) 123º c) 107º d) 107º e) 49º
f) 46º g) 55º h) 55º i) 30º j) 49º
k) 55º l) 130º m) 43º n) 122º o) 39º
p) 119º q) 133º r) 10º/3 s) 71º t) 96º
u) 104º v) 46º x) 123º z) 108º

02)
a) 48º b) 51º c) 29º d) 112º e) 18º
f) 111º g) 42º h) 70º i) 40º/3 j) 45º
k) 90º l) 43º m) 14º n) 180º/7 o) 20º
p) 68º q) 30º r) 15º s) 75º t) 60º
u) 120º v) 60º x) 150º z) 116º

03) 143º, 37º e 143º

04) 36º, 18º e 144º

05) 20º, 60º, 80º e 60º

06) 100º

07) 33º

08) 19º

09) 22º, 44º e 110º

10) 50º, 60º e 70º

11) 70º

12) 270º

13) 10º

14) 36º

15) x = 8y

16) y = 3x

17) demonstração

18) 40º

19) demonstração

20) x = y - z

21) c

22) 540º

23) 50º

24) 130º

25) demonstração

26) d

27) 360º

28) 45º

29) 360º

30) 180º

31) 540º

32) 65º

33) demonstração

34) 130º

35) 24º

Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.
Obrigado.

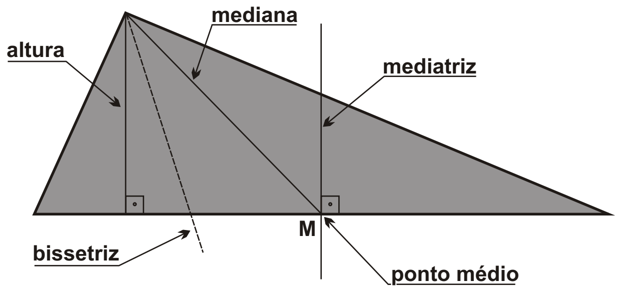
Jeca

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria plana
Aula 02
Pontos notáveis de um triângulo.

Segmentos notáveis do triângulo.



Mediana - É o segmento que une o vértice ao ponto médio do lado oposto.

Mediatriz - É a reta perpendicular ao lado do triângulo pelo seu ponto médio.

Bissetriz - É a semi-reta de origem no vértice que divide o ângulo em dois ângulos congruentes.

Altura - É a distância entre o vértice e a reta suporte do lado oposto.

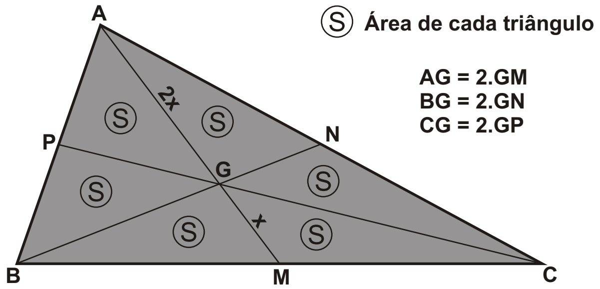
Todo triângulo tem:
- 3 medianas
- 3 mediatrizes
- 3 bissetrizes
- 3 alturas

Pontos notáveis do triângulo
- **B - baricentro**
- **I - incentro**
- **C - circuncentro**
- **O - ortocentro**

Baricentro (G).
É o ponto de encontro das 3 *medianas* do triângulo.

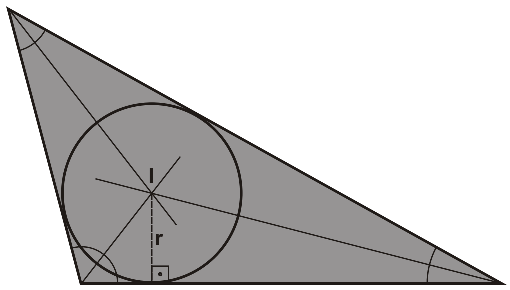
Propriedade.
O baricentro divide cada mediana em 2 segmentos. O segmento que contém o vértice é o dobro do segmento que contém o ponto médio do lado oposto.
(razão 2 : 1)

Observação - As três medianas dividem o triângulo original em seis triângulos de mesma área.



Incentro (I).
É o ponto de encontro das 3 *bissetrizes* do triângulo.

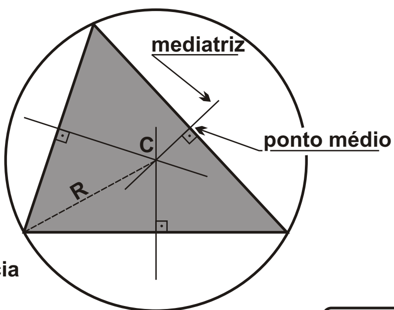
Propriedade.
O incentro é o centro da circunferência inscrita (interna) no triângulo.
O incentro é o ponto do plano eqüidistante dos 3 lados do triângulo.



r - raio da circunferência inscrita.

Circuncentro (C).
É o ponto de encontro das 3 *mediatrizes* do triângulo.

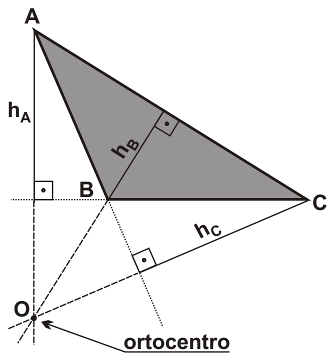
Propriedade.
O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita (externa) ao triângulo.
O circuncentro é o ponto do plano eqüidistante dos 3 vértices do triângulo.

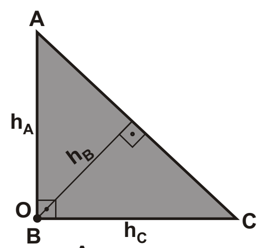


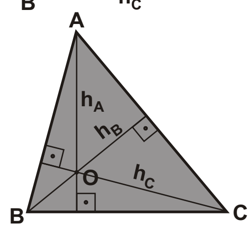
R - raio da circunferência circunscrita.

Ortocentro (O).
É o ponto de encontro das 3 *alturas* do triângulo.

Propriedade.
Não tem.





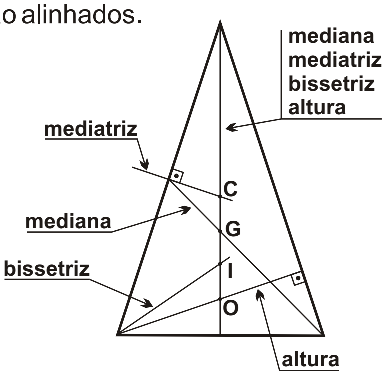


Observações.

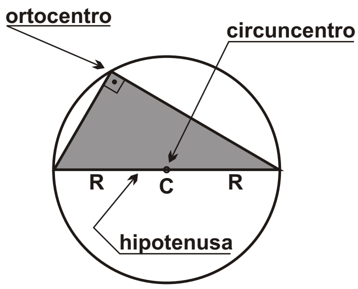
1) O baricentro e o incentro sempre estão localizados no interior do triângulo.

2) O circuncentro e o ortocentro podem estar localizados no exterior do triângulo.

3) Num triângulo isósceles, os quatro ponto notáveis (BICO: baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro) estão alinhados.



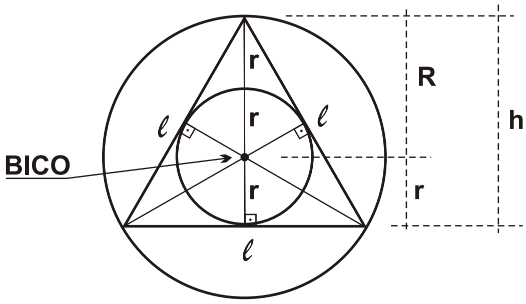
4) No triângulo retângulo, o ortocentro é o vértice do ângulo reto e o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa.



Triângulo eqüilátero.
(importante)

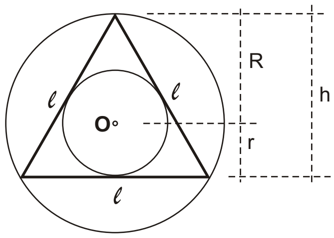
Em todo triângulo eqüilátero, os quatro pontos notáveis (baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro) estão localizados num único ponto.

ℓ - lado do triângulo eqüilátero.
r - raio da circunferência inscrita.
R - raio da circunferência circunscrita.
h - altura do triângulo.

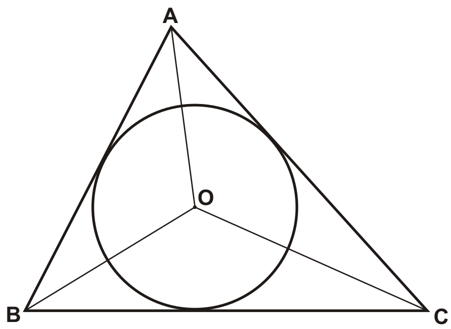


R = 2r
e
h = 3r

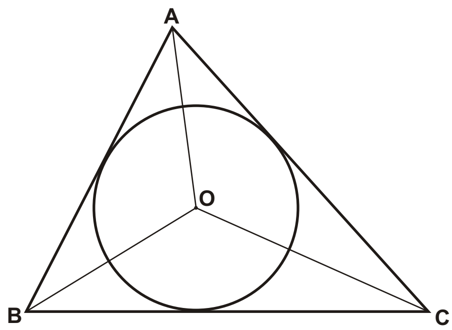
01) Sabendo-se que o lado de um triângulo equilátero é 10 cm, determinar :
a) a altura do triângulo.
b) o raio da circunferência inscrita no triângulo.
c) o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.
d) o que o ponto O é do triângulo.



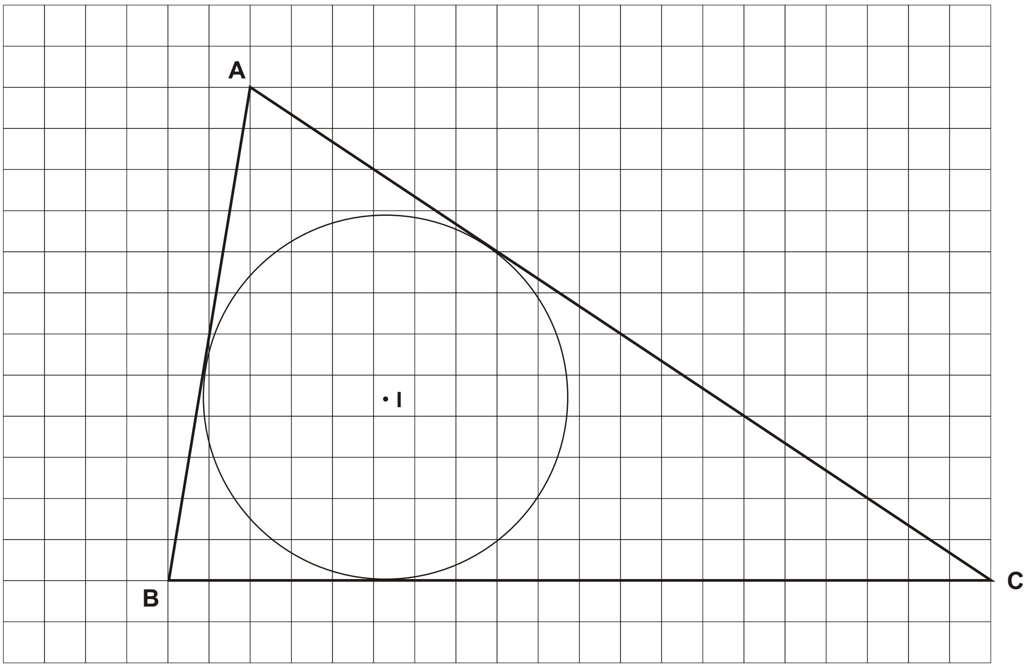
02) Na figura abaixo, a circunferência de centro O está inscrita no triângulo ABC. Sabendo que o ângulo BAO mede 33º e que o ângulo ABC mede 56º, determine a medida do ângulo AOC.



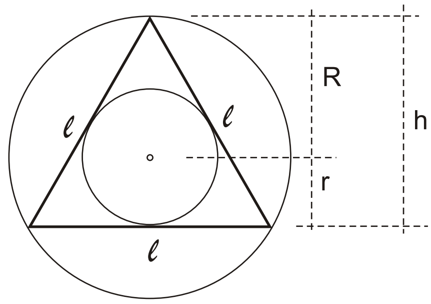
03) Na figura abaixo, a circunferência de centro O está inscrita no triângulo ABC. Sabendo que o ângulo BOC mede 126º , encontre a medida do ângulo BAC.



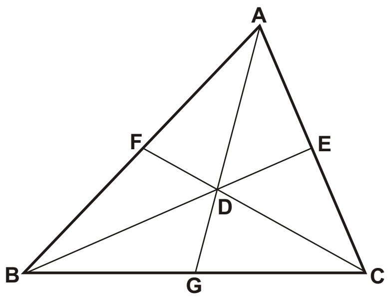
04) Na figura abaixo, o ponto I é o incentro do triângulo. Utilizando o quadriculado, traçar as três medianas, as três mediatrizes, as três bissetrizes e as três alturas e determinar o baricentro, o circuncentro e o ortocentro do triângulo.



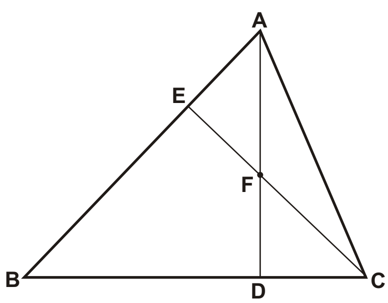
05) Sabendo-se que a altura de um triângulo equilátero é 3 cm, determinar :
a) o raio da circunferência inscrita no triângulo.
b) o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.
c) o lado do triângulo.



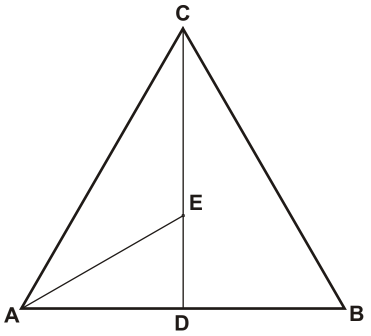
06) Na figura abaixo, os pontos E, F e G são os pontos médios dos lados do triângulo ABC. Se AB = 2x, AC = 2y, BC = 2z, AG = 3w, BE = 3k e FC = 3n, determine o perímetro do triângulo BDG, em função de x, y, z, w, k e n.



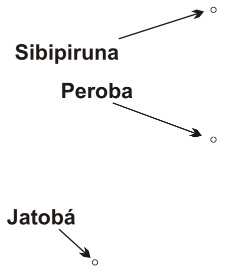
07) Na figura abaixo, F é o ortocentro do triângulo ABC. Determine a medida do ângulo DFE sabendo que os ângulos BAC e BCA medem, respectivamente, 58º e 70º.



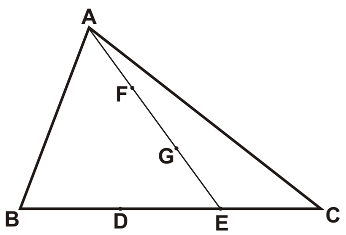
08) Na figura abaixo, E é o ortocentro do triângulo equilátero ABC. Sabendo que CD = k, determine, em função de k, as medidas dos segmentos CE, ED e AE.



09) Um tesouro foi enterrado num campo aberto e o mapa da localização faz menção a três grandes árvores do local. O tesouro foi enterrado no terceiro vértice de um triângulo, onde o jatobá é o primeiro, a sibipiruna é o segundo e a peroba é o ortocentro do triângulo. Como é possível localizar o tesouro no local ?



10) O triângulo ABC da figura tem área 120 cm^2. Sendo BD = DE = EC e AF = FG = GE, avalie se as afirmações abaixo são verdadeiras (V) ou falsas (F).

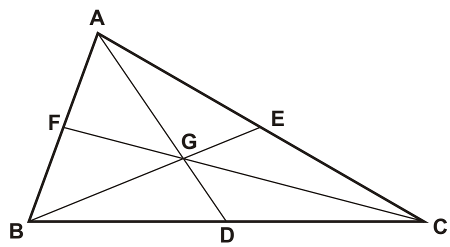


( ) G é o baricentro do triângulo ABC.

( ) A área do triângulo AEC é 40 cm^2.

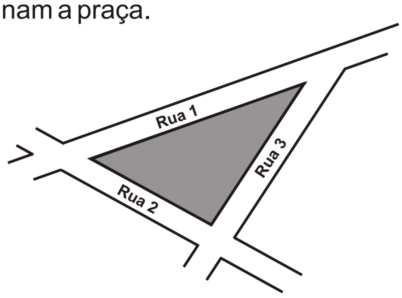
( ) A área do triângulo BFG é 40 cm^2.

11) No triângulo ABC abaixo, F, D e E são os pontos médios dos respectivos lados. Sendo 30º a medida do ângulo BCA, BC = 14 cm e AC = 12 cm, determine:
a) a área do triângulo ABC;
b) a área do triângulo AFG;
c) a área do quadrilátero BCAG.



12) Joel, Pedro e Manoel moram em suas respectivas casas, sendo que as casa não são colineares e estão localizadas na mesma fazenda. Eles desejam abrir um poço de modo que ele fique à mesma distância das três casas. Supondo que a fazenda é "plana", com seus conhecimentos de geometria, que sugestão poderia das a eles ? Justifique o seu raciocínio.

13) A prefeitura de uma cidade mandou colocar, na praça central, uma estátua em homenagem a Tiradentes. Descubra, na planta a seguir, em que local essa estátua deve ser colocada, sabendo que ela deverá ficar a uma mesma distância das três ruas que determinam a praça.



Respostas desta aula.

01)
a) $(5\sqrt{3}/2)$ cm
b) $(5\sqrt{3}/6)$ cm
c) $(5\sqrt{3}/3)$ cm
d) Baricentro, Incentro, Circuncentro e Ortocentro.

02) 118º

03) 72º

04) Desenho ao lado.

05)
a) 1 cm
b) 2 cm
c) $2\sqrt{3}$ cm

06) 2k + w + z

07) 128º

08) 2k / 3, k / 3 e 2k / 3

09) Desenho ao lado.

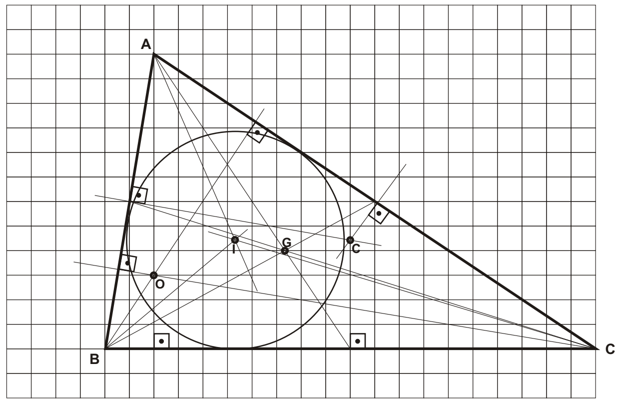
10) F, V e F

11)
a) 42 cm^2
b) 7 cm^2
c) 28 cm^2

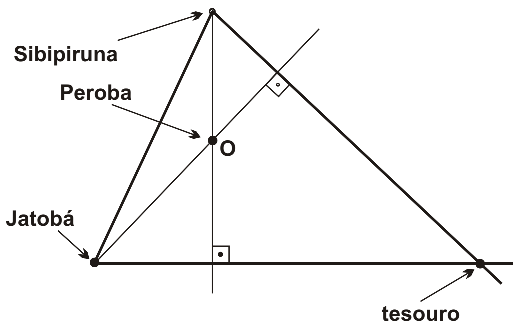
12) O poço deve localizar-se no circuncentro do triângulo cujos vértices são as três casas.

13) A estátua deve ser colocada no incentro do triângulo formado pelas três ruas.

04)



09)

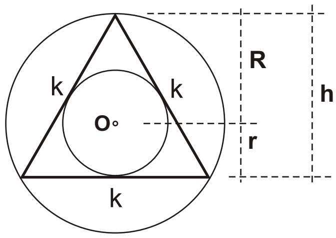


Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.
Obrigado.

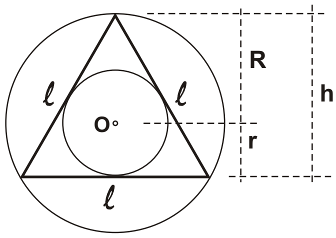
Jeca

Geometria plana
Pontos notáveis de um triângulo.
Exercícios complementares da aula 02.

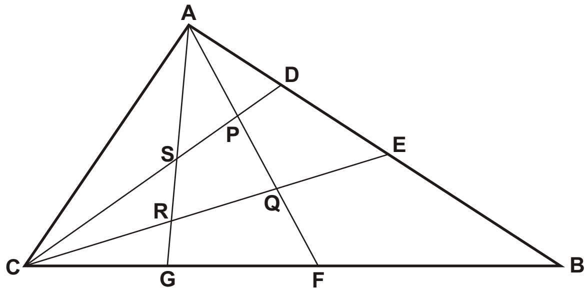
01) Sabendo-se que o lado de um triângulo equilátero é k, determinar :
a) a altura do triângulo;
b) o raio da circunferência inscrita no triângulo;
c) o raio da circunferência circunscrita ao triângulo;
d) o que o ponto O é do triângulo.



02) Sabendo-se que o raio da circunferência circunscrita de um triângulo eqüilátero mede 5 cm, determinar :
a) o raio da circunferência inscrita no triângulo;
b) a altura do triângulo;
c) o lado do triângulo;
d) o perímetro do triângulo;
e) o que o ponto O é do triângulo.

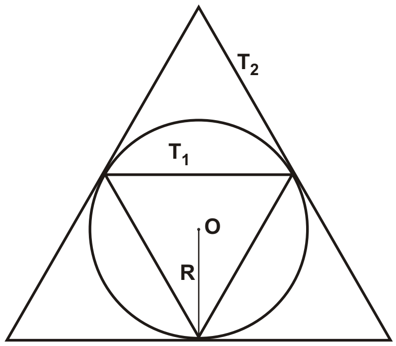


03) Na figura, AG e AF, dividem o ângulo BAC em três ângulos congruentes. Da mesma forma, CD e CE, dividem o ângulo ACB em três ângulos congruentes. Assinale a alternativa correta.

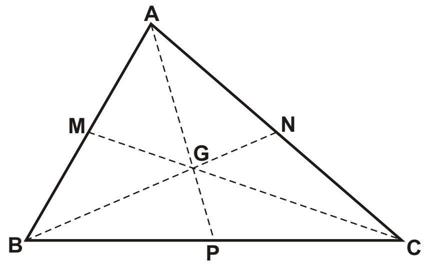


a) P é incentro de algum triângulo construído na figura.
b) Q é incentro de algum triângulo construído na figura.
c) R é incentro de algum triângulo construído na figura.
d) S é incentro de algum triângulo construído na figura.
e) Nenhuma das alternativas anteriores é verdadeira.

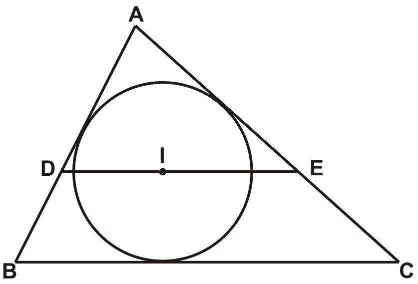
04) (Unifesp) Numa circunferência de raio R > 0 e centro O consideram-se, como na figura, os triângulos equiláteros T_1, inscrito, e T_2, circunscrito. Determine a razão entre a altura de T_2 e a altura de T_1.



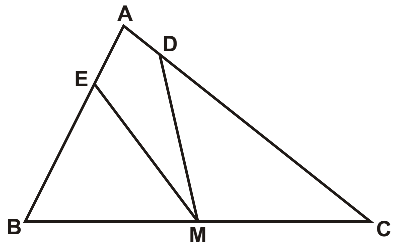
05) Na figura abaixo, os pontos M, N e P são médios dos lados a que pertencem. Provar que G é o baricentro do triângulo ABC e que BG = 2.GN.



06) Na figura abaixo, o ponto I é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC. Sendo DE paralelo a BC, AB = 8 cm e AC = 11 cm, determinar o perímetro do triângulo ADE.

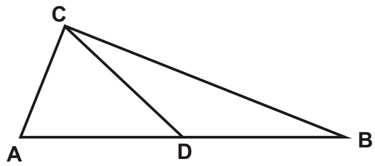


07) No triângulo ABC da figura, BC = 10 cm e M é o ponto médio de BC. Sabendo que D e E são os pés das alturas BD e CE, determine o valor de EM + DM.

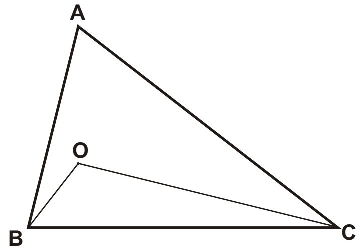


RESOLUÇÃO - Todo triângulo retângulo pode ser inscrito em uma semi-circunferência.

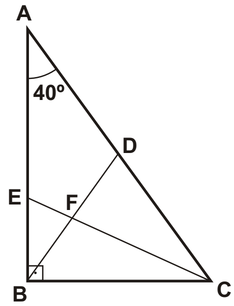
08) Na figura, o triângulo ABC é retângulo em C, os segmentos AD e DB são congruentes e o ângulo CAD mede 65º. Determine a medida do ângulo BDC.



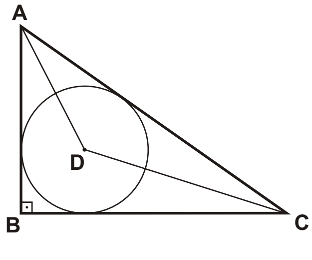
09) No triângulo ABC abaixo, ABC = 70º e ACB = 40º. Determine a medida do ângulo BOC, sabendo-se que o ponto O é o ortocentro do triângulo ABC.



10) No triângulo ABC abaixo, D é ponto médio do lado AC e CE é a bissetriz do ângulo ACB. Determine a medida do ângulo BFC.

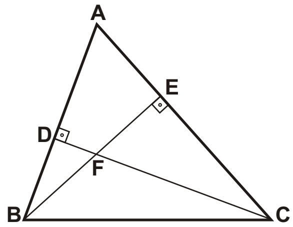


11) Na figura abaixo, D é o centro da circunferência inscrita no triângulo retângulo ABC. Determine a medida do ângulo ADC.



12) (Fuvest) Um triângulo ABC, tem ângulos A = 40º e B = 50º. Qual é a medida do ângulo formado pelas alturas relativas aos vértices A e B desse triângulo?
a) 30º
b) 45º
c) 60º
d) 90º
e) 120º

13) Considere o triângulo ABC da figura e assinale a afirmativa ***falsa***.



a) F é o ortocentro do ABC.

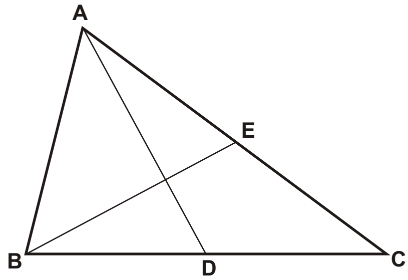
b) A é o ortocentro do FBC.

c) Os circuncentros do BDC e do BEC coincidem.

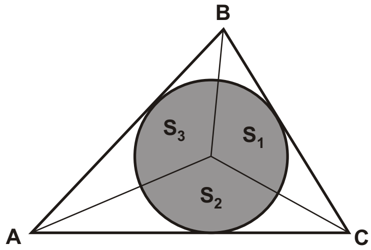
d) BF = 2.FE.

e) O ABC é acutângulo.

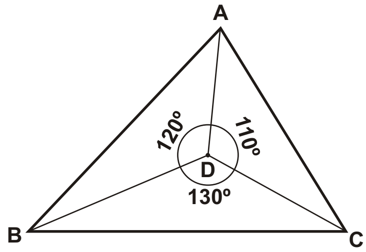
14) No triângulo ABC da figura abaixo, as medianas AD e BE são perpendiculares entre si. Sabendo que BC = 6 e AC = 8, determine a medida de AB.



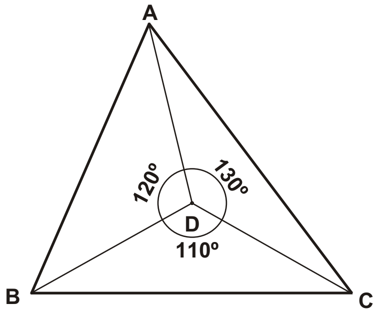
15) Na figura abaixo, o círculo inscrito no triângulo ABC tem área S e os ângulos A e B medem 50º e 70º, respectivamente. Determine as áreas dos setores circulares S_1, S_2 e S_3, em função de S.



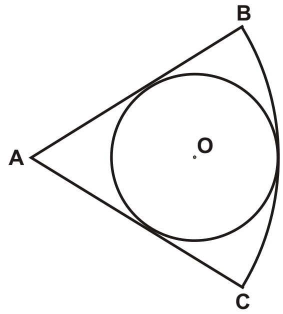
16) Determine as medidas dos ângulos A, B e C, no triângulo ABC abaixo, sabendo que D é o incentro do triângulo.



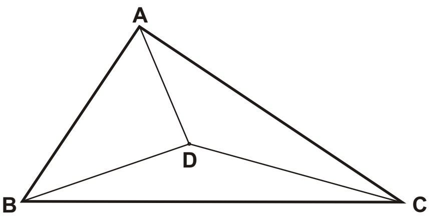
17) Determine as medidas dos ângulos A, B e C, no triângulo ABC abaixo, sabendo que D é o circuncentro do triângulo.



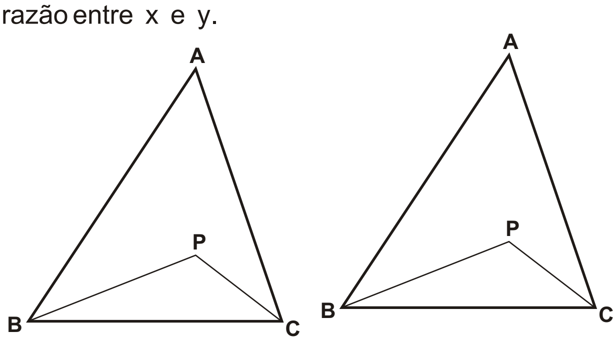
18) Na figura, a circunferência de centro O está inscrita no setor circular de centro A, raio AB = 15 cm e ângulo central BAC = 60º. Determine o raio da circunferência.



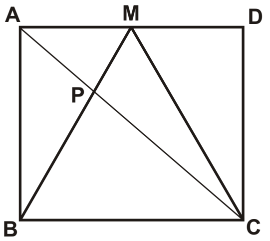
19) O triângulo ABC da figura é retângulo em A e os triângulos ABD, BCD e ACD são equivalentes (têm a mesma área). Sendo BC = 18 cm, determine a medida do segmento AD.



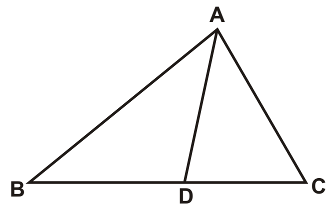
20) No triângulo ABC da figura, BAC = 50º. Se P for o incentro do triângulo ABC, a medida do ângulo BPC é x; no entanto, se P for o ortocentro do triângulo ABC, a medida do ângulo BPC é y. Determine a razão entre x e y.



21) Na figura, ABCD é um retângulo, M é ponto médio de AD e o triângulo BMC é equilátero. Determine a medida do segmento PM, sabendo que BC = 12 cm.



22) (UFMG) Na figura abaixo, AD = BD, ACD = 60º e o ângulo DAC é o dobro do ângulo DBA. Determine a razão AC / BC.

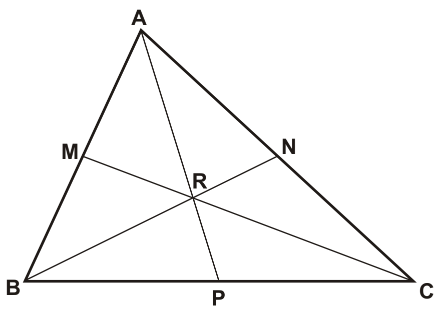


23) No triângulo ABC ao lado, sendo M, N e P pontos médios dos respectivos lados e MR = 7 cm, NR = 6 cm e AR = 10 cm, determinar :

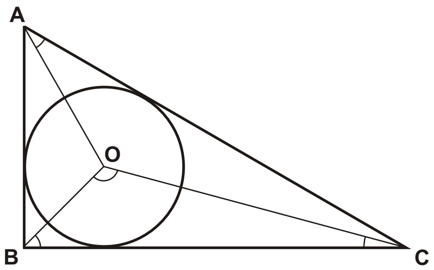
a) O que são os segmentos AP, BN e CM para o triângulo ABC.

b) Que ponto notável do triângulo é o ponto R.

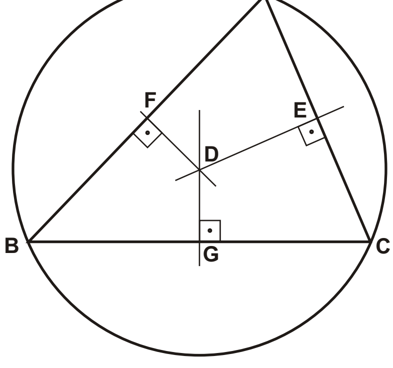
c) Quais as medidas dos segmentos CR, BR e PR.



24) Na figura ao lado, O é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC que é retângulo em B. Sendo m(ACB) = 30º, determinar as medidas dos ângulos , , e e dizer o que a semirreta CO significa para o ângulo ACB.



25) Na figura abaixo, as retas FD, ED e GD encontram-se no ponto D, e os pontos E, F e G são os pontos médios dos lados do triângulo ABC. Para o triângulo ABC, dizer como se denomina o ponto D e o que é a reta FD.



26) (UEM-PR) Em um plano , a mediatriz de um segmeno de reta AB é a reta r que passa pelo ponto médio do segmento de reta AB e é perpendicular a esse segmento. Assinale a alternativa **incorreta**.

a) Tomando um ponto P qualquer em r, a distância de P ao ponto A é igual à distância de P ao ponto B.

b) A intersecção das mediatrizes de dois lados de um triângulo qualquer em é o circuncentro do triângulo.

c) Qualquer ponto do plano que não pertença à reta r não equidista dos extremos do segmento AB.

d) As mediatrizes dos lados de um triângulo podem se interceptar em três pontos distintos.

e) A reta r é a única mediatriz do segmento de reta AB em .

Respostas desta aula.

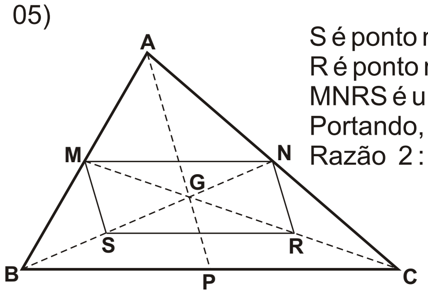
01)
a) $k\sqrt{3}/2$
b) $k\sqrt{3}/6$
c) $k\sqrt{3}/3$
d) BICO

02)
a) (5 / 2) cm
b) (15 / 2) cm
c) $5\sqrt{3}$ cm
d) $15\sqrt{3}$ cm
e) BICO

03) d

04) 2

05)



S é ponto médio de BG
R é ponto médio de CG
MNRS é um paralelogramo
Portando, SG = GN = BS
Razão 2 : 1

06) 19 cm

07) 10 cm

08) 130º

09) 110º

10) 105º

11) 135º

12) d

13) d

14) $2\sqrt{5}$

15) 23 S / 72

16) 80º, 40º e 60º

17) 55º, 65º e 60º

18) 5 cm

19) 6 cm

20) 23 / 26

21) 4 cm

22) 1 / 2

23)
a) medianas
b) baricentro
c) 14 cm, 12 cm e 5 cm

24) 15º, 45º, 120º, 30º e bissetriz

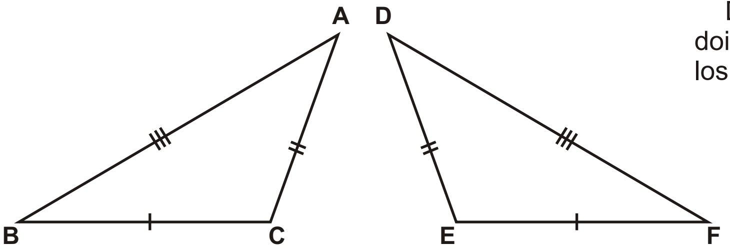
25) circuncentro e mediatriz

26) d

Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.
Obrigado.

Jeca

Geometria plana
Aula 03
Congruência de triângulos.



Dois triângulos são congruentes se têm os lados dois a dois ordenadamente congruentes e os ângulos dois a dois ordenadamente congruentes.

$$ABC \equiv DEF \implies \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \\ \overline{AB} \equiv \overline{DE} \\ \overline{AC} \equiv \overline{DF} \\ \overline{BC} \equiv \overline{EF} \end{cases}$$

<u>Casos de congruência.</u>

1) L.A.L.
2) A.L.A.
3) L.L.L.
4) L.A.A_O
5) Caso especial (CE)

Onde:
L - lado.
A - ângulo junto ao lado.
A_O - ângulo oposto ao lado.

<u>Caso especial (CE).</u>

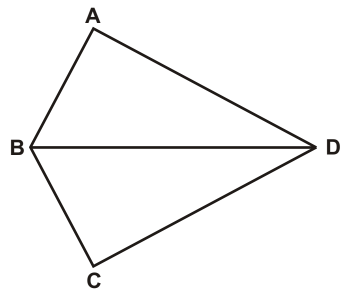
Dois triângulos ***retângulos*** são congruentes se têm as hipotenusas congruentes e um cateto de um triângulo é congruente a um cateto do outro triângulo

<u>Observação.</u>

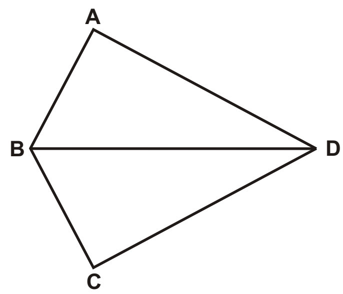
A posição de cada elemento do triângulo (lado ou ângulo) no desenho é muito importante na caracterização do caso de congruência.

L.A.L. - dois lados e o ângulo entre eles.
A.L.A. - dois ângulos e o lado entre eles.

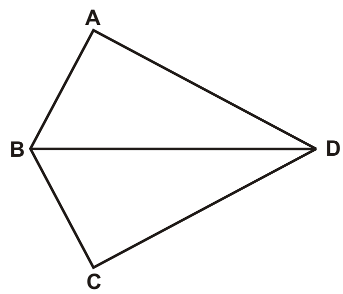
01) Na figura ao lado, A e C são ângulos retos e os segmentos AD e CD são congruentes. Prove que os triângulos ABD e CBD são congruentes.



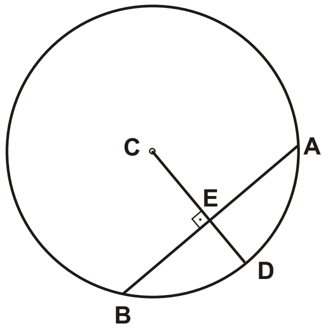
02) Na figura ao lado, A e C são ângulos retos e BD é a bissetriz do ângulo ABC. Prove que os ângulos ABD e CBD são congruentes.



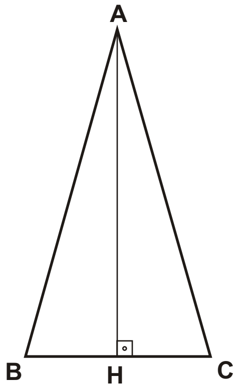
03) Na figura ao lado, os segmentos AB e BC são congruentes e os segmentos AD e CD também. Prove que os ângulos A e C são congruentes.



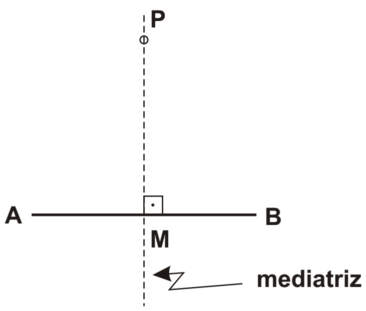
04) (importante) Na figura abaixo, AB é uma corda da circunferência de centro C. Provar que se o raio CD é perpendicular à corda AB, então E é ponto médio de AB.



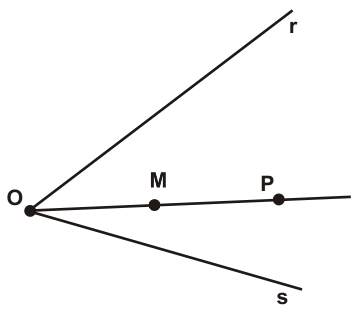
05) (Importante) Provar que em todo triângulo isósceles a altura relativa à base também é bissetriz, mediana e mediatriz.



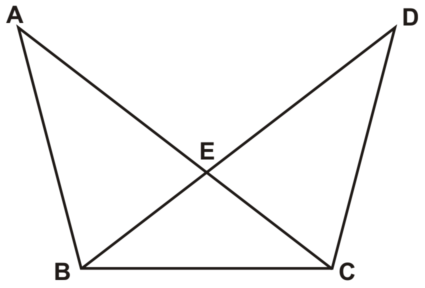
06) Sabendo-se que a mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio, provar que qualquer ponto da mediatriz é eqüidistante das extremidades A e B do segmento.



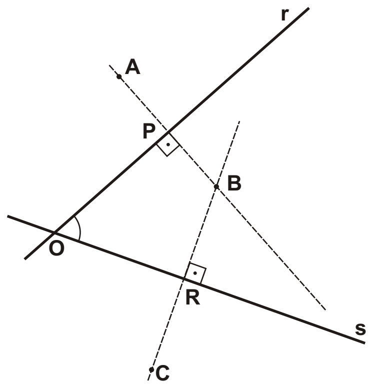
07) Dadas as retas r e s, e os pontos O, M e P, tal que M seja ponto médio do segmento OP, determine os pontos A pertencente a r e B pertencente a s, de modo que o ponto M também seja ponto médio do segmento AB.



08) Na figura abaixo, os segmentos AE e DE são congruentes. Sabendo-se que o triângulo BCE é isósceles de base BC, prove que os segmentos AB e DC são congruentes.

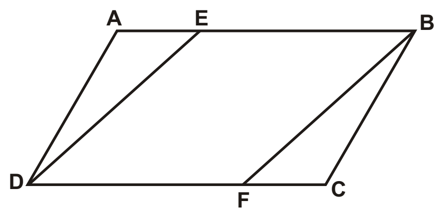


09) (UFMG) Observe a figura:

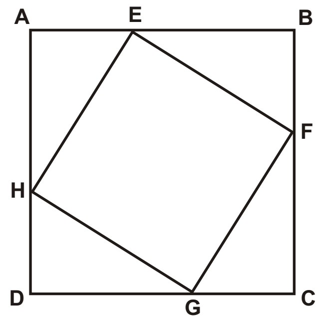


Nessa figura, os segmentos AB e BC são perpendiculares, respectivamente, às retas r e s. Além disso, AP = PB, BR = CR e a medida do ângulo POR é . Determine, em função de , a medida do ângulo interno AOC do quadrilátero AOCB.

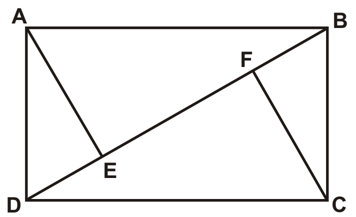
10) Na figura, ABCD é um paralelogramo e os segmentos AE e CF são congruentes. Prove que os segmentos DE e FB são congruentes e paralelos entre si.



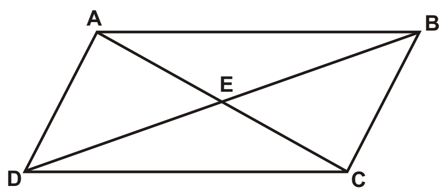
11) Na figura abaixo, o quadrado EFGH está inscrito no quadrado ABCD. Prove que os triângulos AEH, BFE, CGF e GDH são congruentes entre si.



12) Na figura abaixo, ABCD é um retângulo e os segmentos AE e CF são perpendiculares ao segmento BD. Prove que os segmentos DE e BF são congruentes entre si.

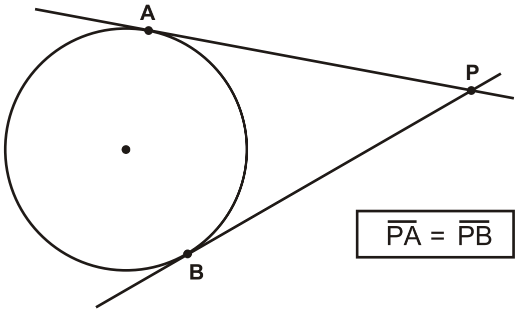


13) Provar que se ABCD é um paralelogramo e AC e BD são as diagonais, então o ponto de intersecção das diagonais é o ponto médio da diagonal AC.



Teorema do ponto exterior.

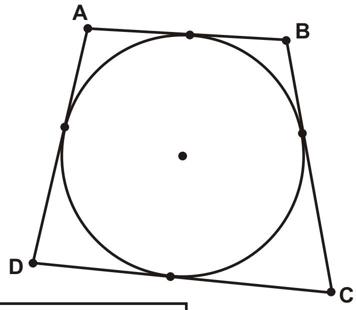
Dada uma circunferência e um ponto P, P exterior a , se A e B são os pontos de tangência das retas tangentes a por P, então $\overline{PA} = \overline{PB}$.



$\overline{PA} = \overline{PB}$

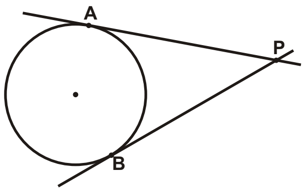
Consequência do Teorema do ponto exterior.

Em todo quadrilátero circunscrito numa circunferência a soma das medidas dos lados opostos é constante.

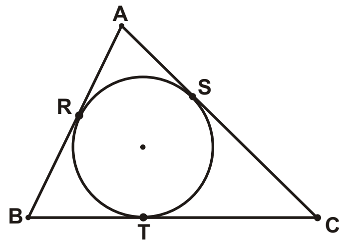


$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

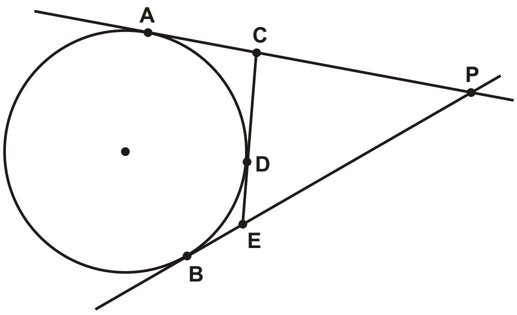
14) Prove o Teorema do ponto exterior.



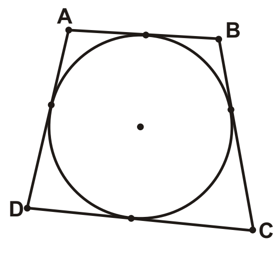
15) Na figura abaixo, a circunferência está inscrita no triângulo ABC, AB = 10, AC = 12 e BC = 14. Determine a medida do segmento CT.



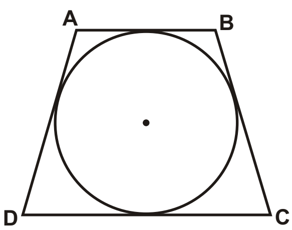
16) Na figura abaixo, A, B e D são pontos de tangência. Determinar o perímetro do triângulo CEP, sabendo que a distância PB mede 17 cm.



17) Determine o valor de x na figura abaixo, sabendo-se que $AB = 2x + 2$, $CD = 4x - 3$, $AD = 3x - 2$ e $BC = 3x + 1$.



18) Determinar a medida da base média de um trapézio isósceles sabendo-se que os lados não paralelos desse trapézio medem 15 cm cada.



19) Determine a medida do raio da circunferência inscrita no triângulo retângulo cujos lados medem 8 cm, 15 cm e 17 cm.

Respostas desta aula.

Observação - Dependendo dos dados, um exercício pode ser provado por mais de um caso de congruência. Levando em conta essa possibilidade nas respostas aqui registradas, em cada caso, foi considerado o caso de congruência mais evidente.

01) Caso especial (CE)

02) L.A.A_O.

03) L.L.L.

04) Caso especial

05) É possível provar por vários casos.

06) L.A.L.

07) Demonstração ao lado.

08) L.A.L.

09) Pelo caso L.A.L. prova-se que os triângulos APO e BPO são congruentes.
Pelo mesmo caso, prova-se que os triângulos BRO e CRO também são congruentes.
AOP = BOP = e COR = BOR =
Portanto AOC = 2

10) L.A.L.

11) A.L.A.

12) L.A.A_O.

13) L.A.A_O.

14) Caso especial (Una o ponto P ao centro)

15) 8

16) 34 cm

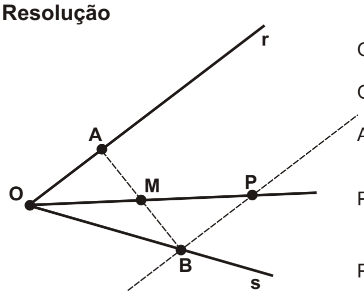
17) S = {∀ x ∈ R | x > 3 / 4}

18) 15 cm

19) 3 cm

07)

Resolução



Seja BP // OA

OM = MP (L) - por hipótese

OMA = PMB (A) - OPV

AOM = BPM (A) - alternos internos

Pelo caso A.L.A., temos
OAM = PBM

Portanto AM = MB
CQD

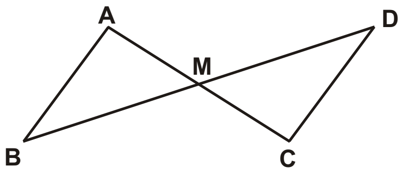
Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

Obrigado.

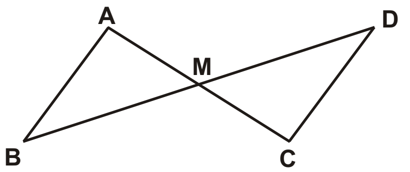
Jeca

Geometria plana
Congruência de triângulos.
Exercícios complementares da aula 03.

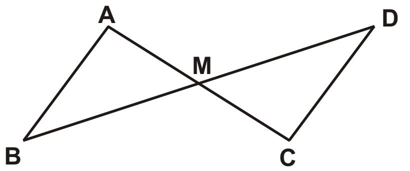
01) Na figura abaixo, M é ponto médio de AC e de BD. Provar que o triângulo ABM é congruente ao triângulo CDM.



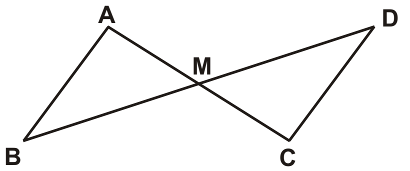
02) Na figura abaixo, M é ponto médio do segmento AC e os ângulos A e C são congruentes. Provar que M também é ponto médio do segmento BD.



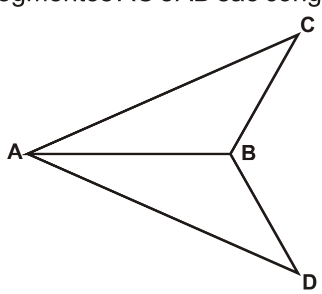
03) Na figura abaixo, M é ponto médio do segmento BD e os ângulos A e C são congruentes. Provar que os segmentos AB e CD são congruentes.



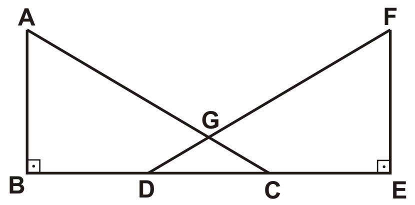
04) Na figura abaixo, M é ponto médio dos segmentos AC e BD. Provar que as retas AB e CD são paralelas.



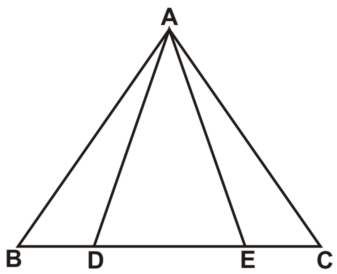
05) Na figura abaixo, AB é bissetriz do ângulo CAD e os ângulos ACB e ADB são congruentes. Provar que os segmentos AC e AD são congruentes.



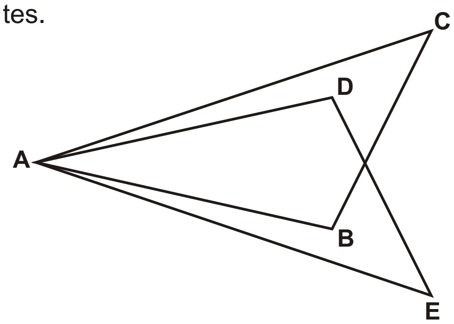
06) Na figura abaixo, AC ≡ FD e BD ≡ CE. Provar que o triângulo DCG é isósceles.



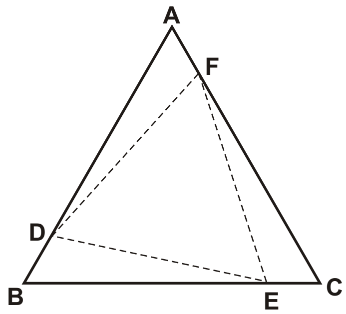
07) Na figura abaixo, ADE é um triângulo isósceles de base DE. Sabendo-se que BD ≡ CE, provar que ABC também é um triângulo isósceles.



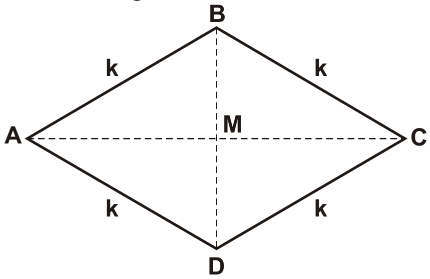
08) Na figura abaixo, DAC ≡ BAE, ADE ≡ ABC e AD ≡ AB. Provar que os triângulos ABC e ADE são congruentes.



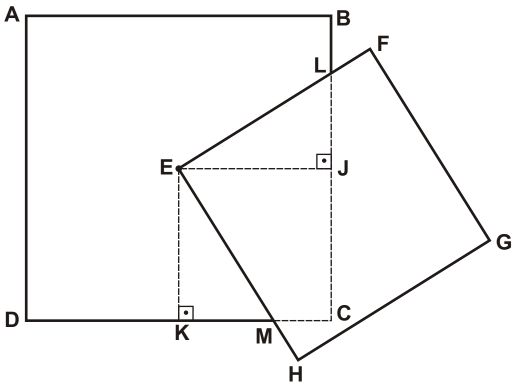
09) Na figura abaixo, ABC é um triângulo eqüilátero e os pontos D, E e F pertencem aos lados AB, BC e AC, respectivamente. Sabendo-se que os segmentos AF, BD e CE são congruentes, provar que o triângulo DEF é eqüilátero.



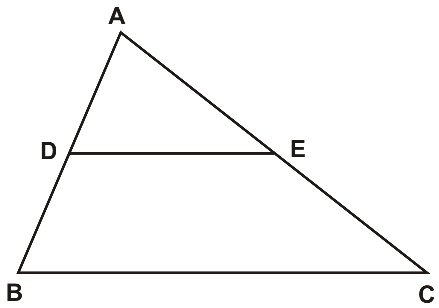
10) Provar que em todo losango as diagonais são perpendiculares entre si e bissetrizes dos ângulos internos desse losango.



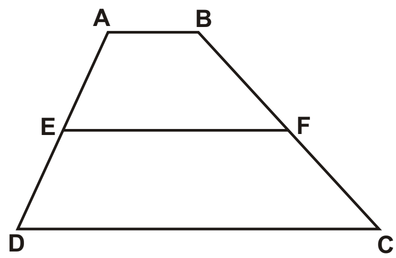
11) Na figura, ABCD e EFGH são quadrados. O centro do quadrado ABCD localiza-se no vértice E do outro quadrado. Prove que os triângulos EJL e EKM são congruentes.



12) Provar que em todo triângulo, o segmento que une os pontos médios de dois lados é paralelo ao terceiro lado e vale a metade desse terceiro lado.



13) Provar que em todo trapézio, o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos é paralelo às bases e vale a semi-soma dessas bases.



Respostas desta aula.

Observação - Dependendo dos dados, um exercício pode ser provado por mais de um caso de congruência. Levando em conta essa possibilidade nas respostas aqui registradas, em cada caso, foi considerado o caso de congruência mais evidente.

01) LAL

02) ALA

03) LAA_O

04) LAL

05) LAA_O

06) Caso especial

07) LAL

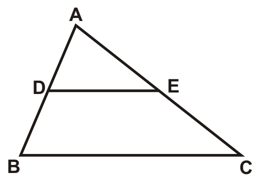
08) ALA

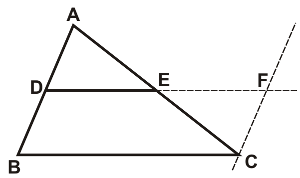
09) LAL

10) LLL

11) ALA

Demonstração do exercício nº 12.





Seja CF // AB (por construção) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ DAE $\equiv$ FCE (alternos internos)
AE $\equiv$ CE (E é ponto médio)
AED $\equiv$ CEF (opostos pelo vértice)

Pelo caso ALA, temos: ADE $\equiv$ CFE $\Longrightarrow$ CF $\equiv$ AD

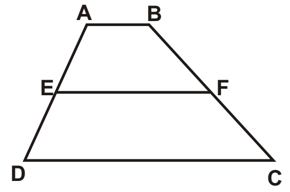
Mas D é ponto médio de AB $\Longrightarrow$ CF $\equiv$ AD $\equiv$ DB

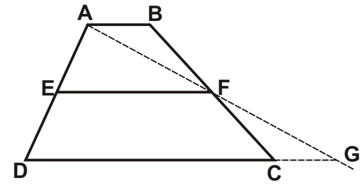
Se BD //CF e BD $\equiv$ CF $\Longrightarrow$ BCFD é um paralelogramo $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ DF // BC e DF $\equiv$ BC

Mas DE $\equiv$ EF $\Longrightarrow$ DE = $\frac{BC}{2}$ e DE // BC (CQD)

Demonstração do exercício nº 13.

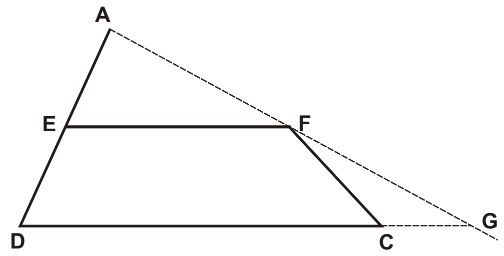




AFB $\equiv$ CFG (A) (opostos pelo vértice)
BF $\equiv$ FC (L) (F é ponto médio de BC)
BAF $\equiv$ CGF (A) (alternos internos)

Pelo caso LAA_O, temos: ABF $\equiv$ CGF $\Longrightarrow$ AF $\equiv$ FG e AB $\equiv$ CG

Considerando apenas o triângulo ADG, temos:



DG = DC + CG = DC + AB

Pelo teorema demonstrado no exercício 12, temos:

EF //AB //CD e EF = $\frac{AB + CD}{2}$

(CQD)

Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

Obrigado.

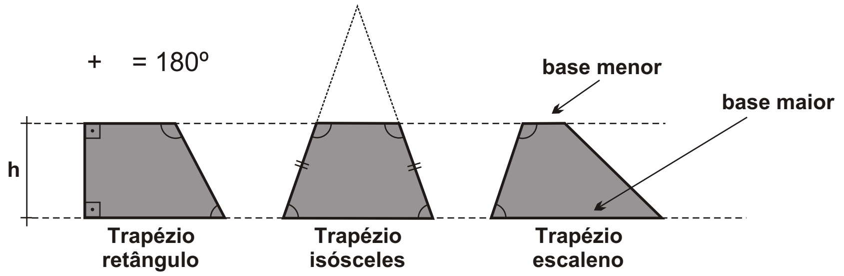
Jeca

Geometria plana
Aula 04
Quadriláteros notáveis.

I) Trapézio.

É o quadrilátero que tem dois lados paralelos.

A altura de um trapézio é a distância entre as retas suporte de suas bases.



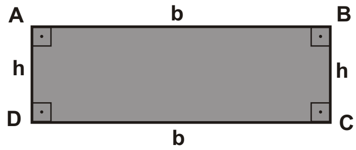
II) Paralelogramo.

É o quadrilátero que tem os lados opostos paralelos.

AB // CD
e
AD //BC

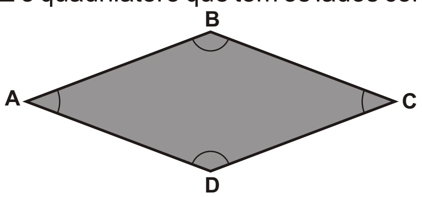
III) Retângulo.

É o quadrilátero que tem todos os ângulos internos congruentes e iguais a 90º.



IV) Losango.

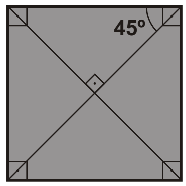
É o quadrilátero que tem os lados congruentes.



AB // CD
e
AD // BC

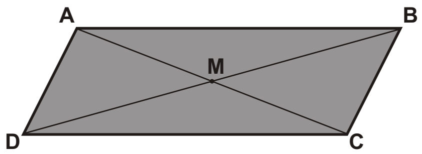
V) Quadrado.

É o quadrilátero que tem os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes (90º).



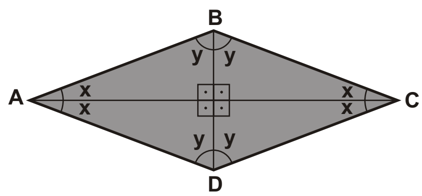
Propriedades dos quadriláteros notáveis.

1) Em todo paralelogramo as diagonais cortam-se nos respectivos pontos médios.



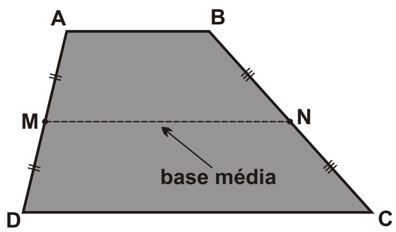
M é ponto médio de AC
e
M é ponto médio de BD.

2) Em todo losango as diagonais são:
a) perpendiculares entre si;
b) bissetrizes dos ângulos internos.



3) Base média de trapézio.

Em todo trapézio, o segmento que une os pontos médios dos dois lados não paralelos, é paralelo às bases e vale a média aritmética dessas bases.

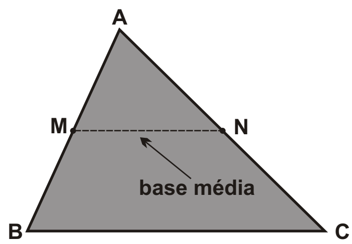


MN // AB // CD
e
$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$

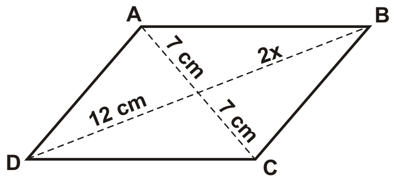
4) Base média de triângulo.

Em todo triângulo, o segmento que une os pontos médios de dois lados é paralelo ao 3º lado e vale a metade desse 3º lado.

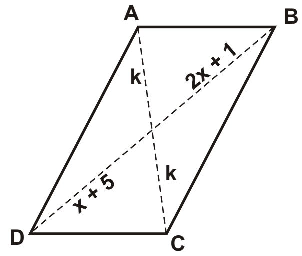
MN // BC
e
$$MN = \frac{BC}{2}$$



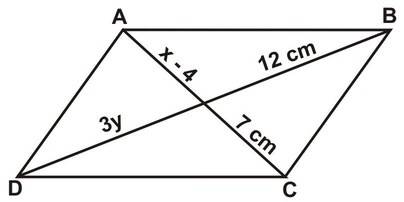
01) No paralelogramo abaixo, determinar o valor de x e a medida da diagonal BD.



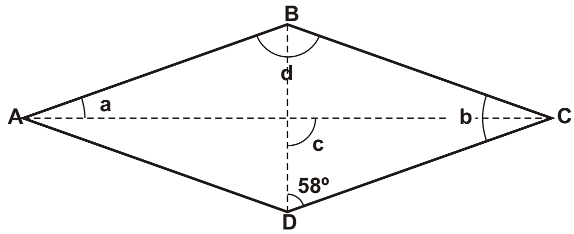
02) No paralelogramo abaixo, determinar o valor de x e a medida da diagonal BD.



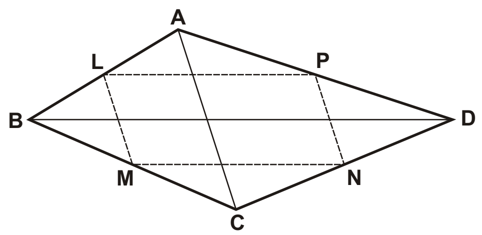
03) No paralelogramo ABCD abaixo, determinar o valor de x, o valor de y, a medida da diagonal AC e a medida da diagonal BD.



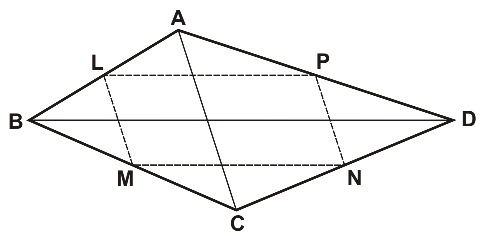
04) No losango ABCD abaixo, conhecendo-se a medida do ângulo BDC, determinar as medidas dos ângulos a, b, c e d.



05) Na figura, L, M, N e P são, respectivamente, os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA do quadrilátero ABCD. Determinar o perímetro do quadrilátero LMNP sabendo-se que AC = 6 cm e BD = 10 cm.



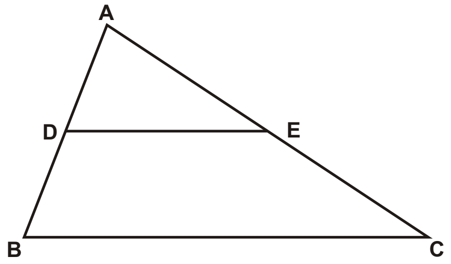
06) Na figura, L, M, N e P são, respectivamente, os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA do quadrilátero ABCD. Provar que LMNP é um paralelogramo.



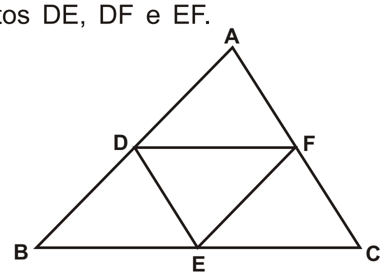
07) (Unifesp) Determine a medida do menor ângulo interno de um paralelogramo sabendo-se que dois ângulos internos consecutivos desse paralelogramo estão na razão 1 : 3.

08) (UERJ) Se um polígono tem todos os lados com medidas iguais, então todos os seus ângulos internos têm medidas iguais.
Para mostrar que essa proposição é ***falsa***, pode-se usar como exemplo a figura denominada:
a) triângulo equilátero;
b) losango;
c) trapézio;
d) retângulo;
e) quadrado.

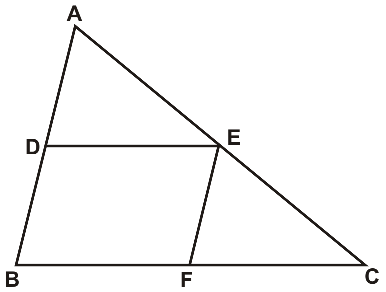
09) No triângulo ABC abaixo, AB = 8 cm, AC = 12 cm e BC = 10 cm. Sendo D e E pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, determine a medida do perímetro do trapézio BCED.



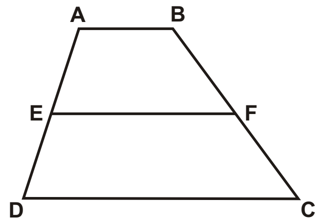
10) No triângulo ABC abaixo, AB = 16 cm, AC = 14 cm e BC = 18 cm. Sendo D, E e F os pontosmédios dos lados AB, BC e AC, respectivamente, determinar as medidas dos segmentos DE, DF e EF.



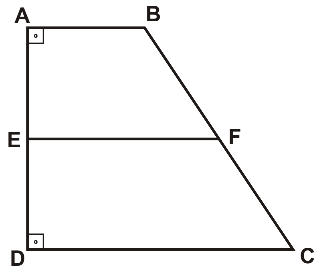
11) No triângulo ABC abaixo, AB = x, AC = y e BC = z. Sendo D, E e F os pontos médios dos lados AB, AC e BC, respectivamente, determinar o perímetro do quadrilátero BDEF.



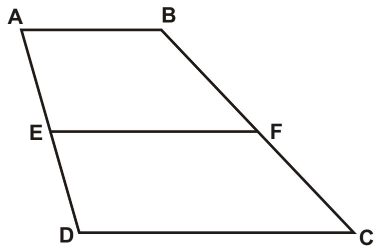
12) No trapézio ABCD abaixo, a base menor AB mede 8 cm, a base maior CD mede 20 cm e os pontos E e F são os pontos médios dos lados AD e BC, respectivamente. Determine a medida da base média EF.



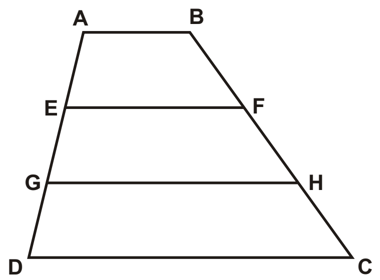
13) No trapézio retângulo ABCD abaixo, a base menor AB mede 12 cm e a base maior CD mede 18 cm. Sendo BC = 10 cm, E e F os pontos médios dos lados AD e BC, respectivamente, determinar os perímetros dos trapézios ABFE e CDEF.



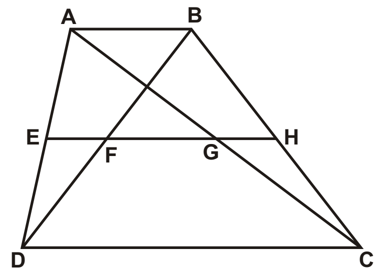
14) No trapézio ABCD abaixo, a base média EF mede 17 cm e a base maior CD mede 22 cm. Determine a medida da base menor AB.



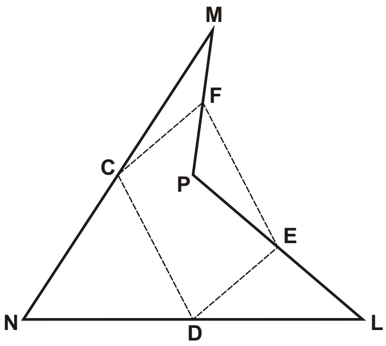
15) No trapézio ABCD abaixo, EF = 8 cm e GH = 11 cm. Sendo AE = EG = GD e BF = FH = HC, determine as medidas da base menor AB e da base maior CD.



16) No trapézio ABCD abaixo, AB = 12 cm, CD = 26 cm e os pontos E e H são pontos médios dos lados AD e BC, respectivamente. Determinar as medidas dos segmentos EH, EF, GH e FG.

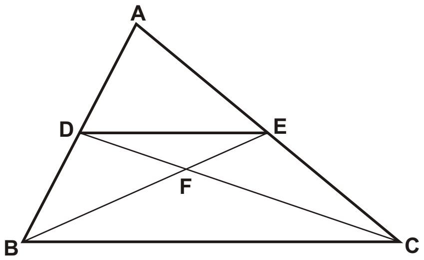


17) Na figura, MNLP é um quadrilátero, C, D, E e F são os pontos médios dos lados MN, NL, LP e PM. Determine o perímetro do quadrilátero CDEF sabendo-se que ML = 14 cm e NP = 8 cm.

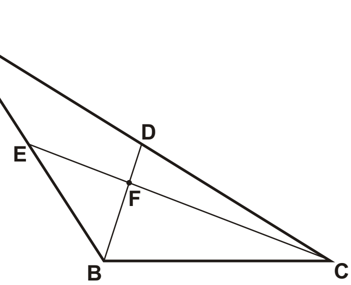


18) Determine as medidas dos ângulos internos de um paralelogramo sabendo-se que dois ângulos internos opostos medem $3x - 18º$ e $2x + 27º$.

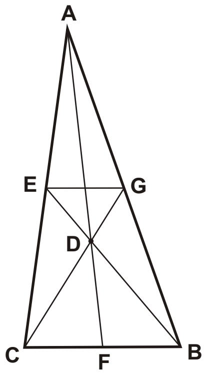
19) No triângulo ABC abaixo, D e E são os pontos médios dos respectivos lados. Sendo o perímetro do triângulo DEF igual a 23 cm, determinar :
a) o que é o ponto F para o triângulo ABC.
b) a medida do perímetro do triângulo BCF.



20) No triângulo ABC abaixo, sendo F o baricentro, AC = x, AB = y, BC = z, CF = t e DF = w, determinar o perímetro do quadrilátero AEFD.

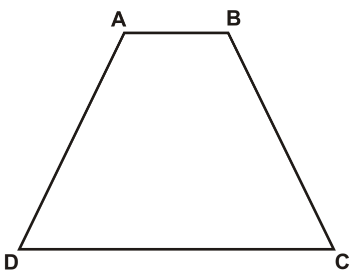


21) No triângulo ABC abaixo, E e G são os pontos médios dos respectivos lados. Sendo AB = x, BC = y, AC = z e GD = k, determinar o perímetro do triângulo GEC e dizer o que o ponto D é do triângulo ABC.



22) Demosntre que o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos internos consecutivos de um paralelogramo é um ângulo reto.

23) (Fuvest) Em um trapézio isósceles, a medida da altura é igual à da base média. Determine o ângulo que a diagonal do trapézio forma com uma das bases do trapézio.



Respostas desta aula.

01) 6 cm

02) 4

03) 11 cm e 4 cm

04) 32º, 64º, 90º e 116º

05) 16 cm

06) Propriedade da base média do triângulo.
BD // LP // MN e AC // LM // PN
Portanto LMNP é um paralelogramo.

07) 45º

08) b

09) 25 cm

10) 7 cm, 9 cm, e 8 cm

11) x + z

12) 14 cm

13) 36 cm e 42 cm

14) 12 cm

15) 5 cm e 14 cm

16) 19 cm, 6 cm, 6 cm e 7 cm

17) 22 cm

18) 117º e 63º

19) Baricentro e 46 cm

20) (x + y + 2w + t) / 2

21) (y + z + 6k) / 2 e baricentro

22) 2 + 2 = 180 (alternos internos)
Portanto + = 90º

23) 45º

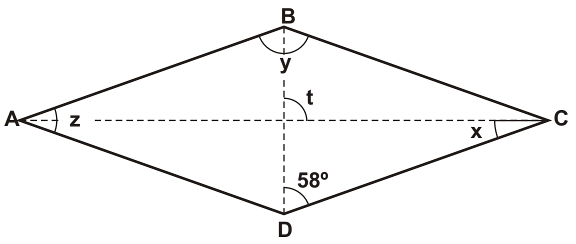
Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

Obrigado.

Jeca

Geometria plana
Quadriláteros notáveis.
Exercícios complementares da aula 04.

01) Dado o losango ABCD abaixo e o ângulo de 58º, determine as medidas dos ângulos assinalados.

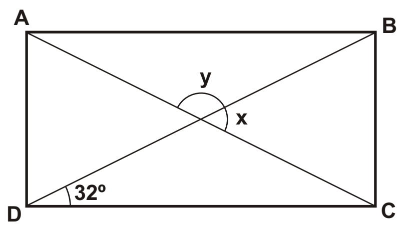


02) (UERJ-RJ) Se um polígono tem todos os lados com medidas iguais, então todos os seus ângulos internos têm medidas iguais.

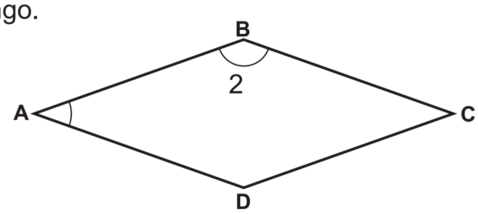
Para mostrar que essa proposição é **falsa**, pode-se usar como exemplo a figura denominada:

a) losango
b) trapézio
c) retângulo
d) quadrado
e) paralelogramo

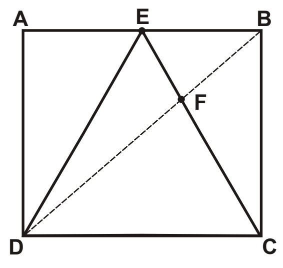
03) No retângulo ABCD abaixo, AC e BD são as diagonais. Determine as medidas dos ângulos x e y.



04) (PUCCamp-SP) Na figura a seguir, tem-se representado o losango ABCD, cuja diagonal menor mede 4 cm. Determine a medida da diagonal maior e do lado desse losango.



05) Na figura abaixo, ABCD é um retângulo e DCE é um triângulo equilátero, onde o ponto E pertence ao lado AB do retângulo. Sendo DB a diagonal do retângulo, F o ponto de intersecção entre a diagonal e o lado do triângulo e CD = 9 cm, determine a medida do segmento FC.



06) (VUNESP-SP) Considere as seguintes proposições.

I. Todo quadrado é um losango.
II. Todo quadrado é um retângulo.
III. Todo retângulo é um paralelogramo.
IV. Todo triângulo equilátero é isósceles.

Pde-se afirmar que:

a) só uma é verdadeira.
b) todas são verdadeiras.
c) só uma é falsa.
d) duas são verdadeiras e duas são falsas.
e) todas são falsas.

07) (PUC-SP) Sendo:
A = {x / x é quadrilátero}
B = {x / x é quadrado}
C = {x / x é retângulo}
D = {x / x é losango}
E = {x / x é trapézio}
F = {x / x é paralelogramo}

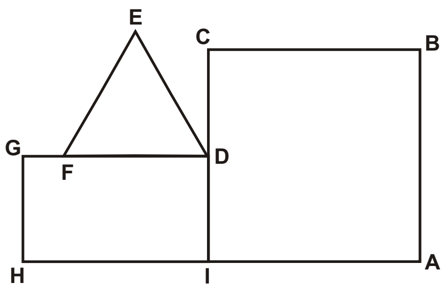
Então vale a relação:

a) $A \supset D \supset E$
b) $A \supset F \supset D \supset B$
c) $F \subset D \subset A$
d) $A \supset F \supset B \supset C$
e) $B \subset D \subset A \subset E$

08) (UFOP-MG) Assinale a alternativa **incorreta**:
a) Em todo paralelogramo não retângulo, a diagonal oposta aos ângulos agudos é menor do que a outra.
b) É reto o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo.
c) As bissetrizes de dois ângulos opostos de um paralelogramo são paralelas entre si.
d) Ligando-se os pontos médios dos lados de um triângulo, este fica decomposto em quatro triângulos congruentes.
e) Todas as afirmativas anteriores são incorretas.

09)(UECE) Na figura, o retângulo DGHI, o triângulo equilátero DEF e o quadrado ABCI, têm todos, perímetro igual a 24 cm. Se D é o ponto médio de CI, o perímetro da figura fechada ABCDEFGHIA é igual a:

a) 48 m
b) 49 m
c) 50 m
d) 51 m
e) 52 m



10) Determine as medidas dos ângulos internos de um paralelogramo sabendo que a diferença entre as medidas de dois ângulos internos consecutivos é 52º.

11) (FGV-SP) A diagonal menor de um losango decompõe esse losango em dois triângulos congruentes. Se cada ângulo obtuso do losango mede 130º, quais são as medidas dos três ângulos de cada um dos dois triângulos considerados ?

12) (ITA-SP) Dadas as afirmações:
I. Quaisquer dois ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares.
II. Quaisquer dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.
III. Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si e se cruzam em seu ponto médio, então esse paralelogramo é um losango.

a) Todas são verdadeiras.
b) Apenas I e II são verdadeiras.
c) Apenas II e III são verdadeiras.
d) Apenas II é verdadeira.
e) Apenas III é verdadeira.

13) (UFV-MG) Num trapézio isósceles de bases diferentes, uma diagonal é também bissetriz de um ângulo adjacente à base maior. Isso significa que:

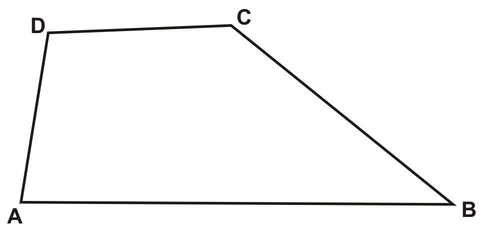
a) a base menor tem medida igual à dos lados oblíquos.
b) os ângulos adjacentes à base menor não são congruentes.
c) a base maior tem medida igual à dos lados oblíquos.
d) as duas diagonais se interceptam no seu ponto médio.
e) as diagonais se interceptam, formando ângulo reto.

14) (FUVEST-SP) No quadrilátero ABCD, temos AD = BC = 2 e os prolongamentos desses lados formam um ângulo de 60º.

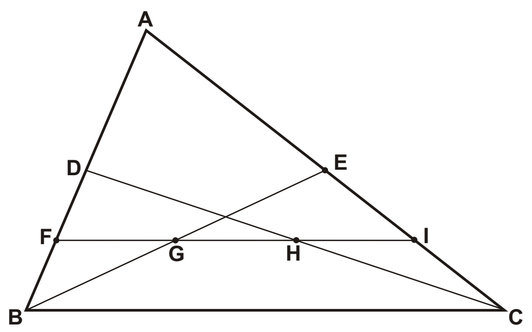
a) Indicando por , , e , respectivamente, as medidas dos ângulos internos dos vértices A, B, C e D, calcule + + + .

b) Sejam J o ponto médio de DC, M o ponto médio de AC e N o ponto médio de BD. Calcule JM e JN.

c) Calcule a medida do ângulo MJN.

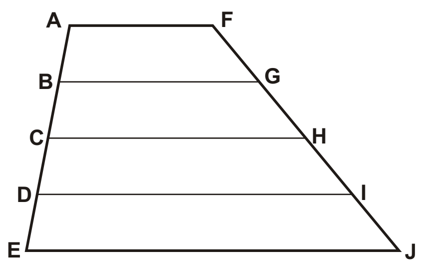


15) Na figura, BC = 24 cm, D é ponto médio de AB, F é ponto médio de BD, E é ponto médio de AC e I é ponto médio de CE. Determine as medidas dos segmentos FG e GH.

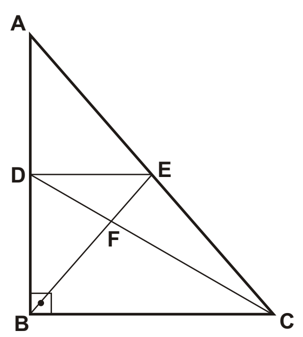


16) (ITA-SP) Considere um quadrilátero ABCD cujas diagonais AC e BD medem, respectivamente, 5 cm e 6 cm. Se R, S, T e U são os pontos médios dos lados do quadrilátero dado, então o perímetro do quadrilátero RSTU vale:
a) 22 cm
b) 5,5 cm
c) 8,5 cm
d) 11 cm
e) 12 cm

17) No trapézio AEJF abaixo, BG = x e DI = y. Se AB = BC = CD = DE e FG = GH = HI = IJ, determine AF e EJ em função de x e de y.



18) Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo em B, o ponto D é ponto médio do lado AB e o segmento DE é paralelo ao cateto BC. Sendo AC = 24 cm, determine a medida do segmento EF.



Respostas desta aula.

01) $x = 32^o$, $y = 116^o$, $z = 64^o$, $t = 90^o$

02) a

03) $x = 64^o$, $y = 116^o$

04) $AC = 4\sqrt{3}$ cm, $AB = 4$ cm

05) 6 cm

06) b

07) b

08) e

09) c

10) 64^o e 116^o

11) 50^o, 65^o e 65^o

12) c

13) a

14)
a) 360^o
b) 1 e 1
c) 60^o

15) FG = 6 cm e GH = 6 cm

16) d

17) $AF = \dfrac{3x - y}{2}$ $EJ = \dfrac{3y - x}{2}$

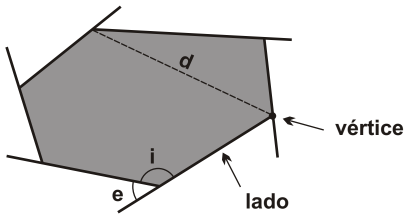
18) 4cm

Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

Obrigado.

Jeca

I) Polígonos convexos.



d - diagonal
i - ângulo interno
e - ângulo externo

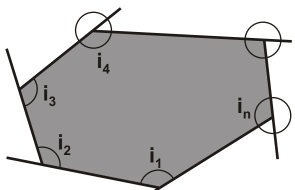
$i + e = 180^o$

Classificação dos polígonos (quanto ao nº de lados).

3 lados	triângulo	11 lados	undecágono
4 lados	quadrilátero	12 lados	dodecágono
5 lados	pentágono	13 lados	tridecágono
6 lados	hexágono	14 lados	quadridecágono
7 lados	heptágono	15 lados	pentadecágono
8 lados	octógono	16 lados	hexadecágono
9 lados	eneágono	17 lados	heptadecágono
10 lados	decágono	18 lados	octodecágono
		19 lados	eneadecágono
		20 lados	icoságono

II) Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo.

(S_i)



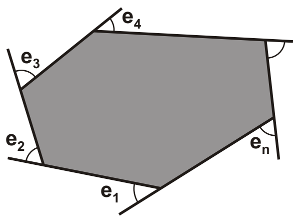
$S_i = i_1 + i_2 + i_3 + \ ... \ + i_n$

$\boxed{S_i = 180 (n - 2)}$

n - nº de lados do polígono

III) Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo.

(S_e)



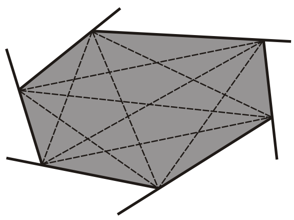
$S_e = e_1 + e_2 + e_3 + \ ... \ + e_n$

$\boxed{S_e = 360^o}$

Para qualquer polígono convexo

IV) Número de diagonais de um polígono convexo.

(d)

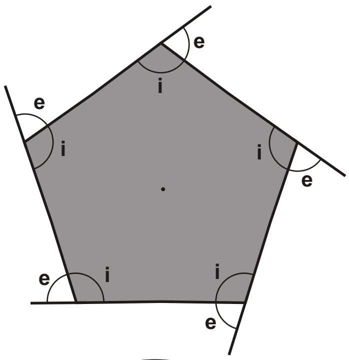


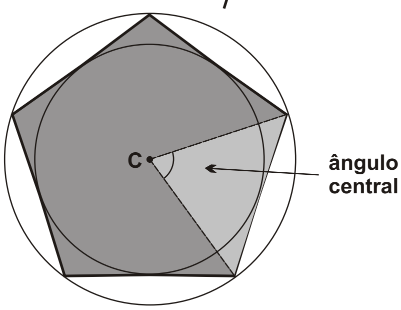
Diagonal é o segmento que une dois vértices não consecutivos.

$$\boxed{d = \frac{n (n - 3)}{2}}$$

n - nº de lados do polígono

V) Polígono regular.





Um polígono é regular se tem:
a) todos os lados congruentes entre si;
b) todos os ângulos internos congruentes entre si;
c) todos os ângulos externos congruentes entre si.

Classificação dos polígonos regulares

3 lados - triângulo equilátero
4 lados - quadrado
5 lados - pentágono regular
6 lados - hexágono regular
etc

Medida de cada ângulo interno de um polígono regular.

$$i = \frac{S_i}{n} \implies \boxed{i = \frac{180 (n - 2)}{n}}$$

Medida de cada ângulo externo de um polígono regular.

$$e = \frac{S_e}{n} \implies \boxed{e = \frac{360}{n}}$$ (importante)

Observação - Todo polígono regular pode ser inscrito e circunscrito numa circunferência.

01) Determinar a soma das medidas dos ângulos internos e o número de diagonais de um pentadecágono convexo.

02) Determinar a soma das medidas dos ângulos externos e o número de diagonais de um octodecágono convexo.

03) Determinar a medida de cada ângulo interno e de cada ângulo externo de um eneágono regular.

04) Determinar a medida de cada ângulo interno e o nº de diagonais de um octógono regular.

05) Determinar a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo que tem 65 diagonais.

06) Determinar o nº de diagonais de um polígono regular cuja medida de cada ângulo externo é 30º.

07) Determinar o nº de diagonais de um polígono regular sabendo-se que a medida de um ângulo interno excede a medida do ângulo externo em 132º.

08) Determinar a medida do ângulo externo de um polígono regular que tem 14 diagonais.

09) Dados dois polígonos convexos, A e B, sabe-se que B tem 4 lados e 30 diagonais a mais do que A. Determine quais são os polígonos A e B.

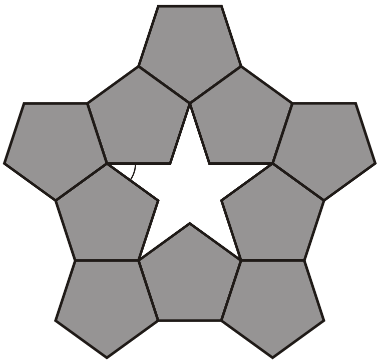
10) Dados dois polígonos regulares, A e B, sabe-se que B tem 6 lados a mais do que A e a diferença das medidas de seus ângulos externos é 16º. Determine quais são esses polígonos.

11) Determine a medida do ângulo agudo formado entre a diagonal AF e lado AB de um dodecágono regular ABC.... KL.

12) Determine a medida do ângulo agudo formado pelos prolongamentos das diagonais AC e DG de um dodecágono regular ABC...KL.

13) (UNIFESP-SP) Pentágonos regulares congruentes podem ser conectados, lado a lado, formando uma estrela de cinco pontas, conforme destacado na figura. Nestas condições, o ângulo mede:

a) 108º b) 72º c) 54º d) 36º e) 18º

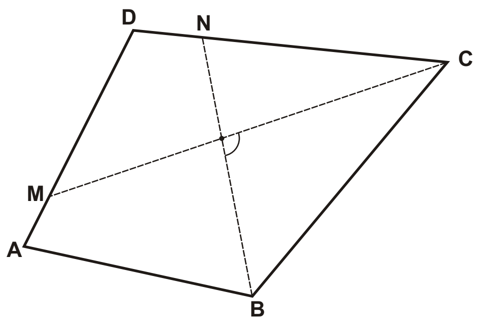


14) (FUVEST-SP) Dois ângulos internos de um polígono convexo medem 130º cada um e os demais ângulos internos medem 128º cada um. O nº de lados desse polígono é:

a) 6 b) 7 c) 13 d) 16 e) 17

15) (CESGRANRIO-RJ) No quadrilátero ABCD da figura abaixo, são traçadas as bissetrizes CM e BN, que formam entre si o ângulo . A soma dos ângulos internos A e D desse quadrilátero corresponde a:

a) /4 b) /2 c) d) 2 e) 3



16) (MACK-SP) Os lados de um polígono regular de n lados, n > 4, são prolongados para formar uma estrela. A medida, em graus, de cada vértice da estrela é:

a) $\frac{360º}{n}$

b) $\frac{(n - 4) . 180º}{n}$

c) $\frac{(n - 2) . 180º}{n}$

d) $180º - \frac{90º}{n}$

e) $\frac{180º}{n}$

Respostas desta aula.

01) 2340º e 90 diagonais

02) 360º e 135 diagonais

03) 140º e 40º

04) 135º e 20 diagonais

05) 1980º

06) 54 diagonais

07) 90 diagonais

08) 360º / 7

09) Heptágono e undecágono

10) Eneágono e pentadecágono

11) 60º

12) 75º

13) d

14) b

15) d

16) b

Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

Obrigado.

Jeca

Geometria plana
Polígonos convexos.
Exercícios complementares da aula 05.

01) Dado um polígono convexo de 17 lados, determinar:

a) a soma das medidas dos ângulos internos.	b) a soma das medidas dos ângulos externos.	c) o número de diagonais desse polígono.

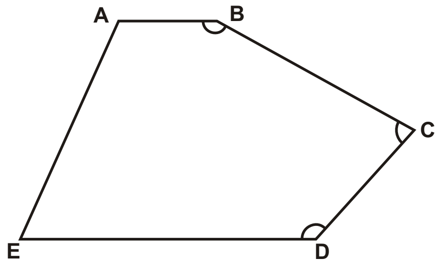
02) Dado um undecágono convexo, determinar:

a) a soma das medidas dos ângulos internos.	b) a soma das medidas dos ângulos externos.	c) o número de diagonais desse polígono.

03) Determinar o número de lados e o número de diagonais de um polígono convexo cuja soma das medidas dos ângulos internos é 2160º.

04) Determinar a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo que tem 44 diagonais.

05) No pentágono ao lado, AB // DE. Determinar a soma das medidas dos ângulos internos assinalados.



06) Determinar os polígonos convexos A e B, sabendo-se que A tem 2 lados e 23 diagonais a mais que o polígono B.

07) Dado um eneágono regular, determinar :

a) o número de lados do eneágono.	b) a soma das medidas dos ângulos internos.	c) a medida de cada ângulo interno.
d) a soma das medidas dos ângulos externos.	e) a medida de cada ângulo externo.	f) o número de diagonais do eneágono.

08) Determinar qual é o polígono regular cuja medida de um ângulo externo é igual a 2/7 da medida de um ângulo interno.

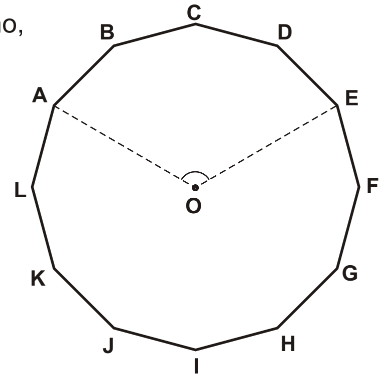
09) Dado um pentadecágono regular, determinar :

a) o número de lados do pentadecágono.	b) a soma das medidas dos ângulos internos.	c) a medida de cada ângulo interno.
d) a soma das medidas dos ângulos externos.	e) a medida de cada ângulo externo.	f) o número de diagonais do pentadecágono.

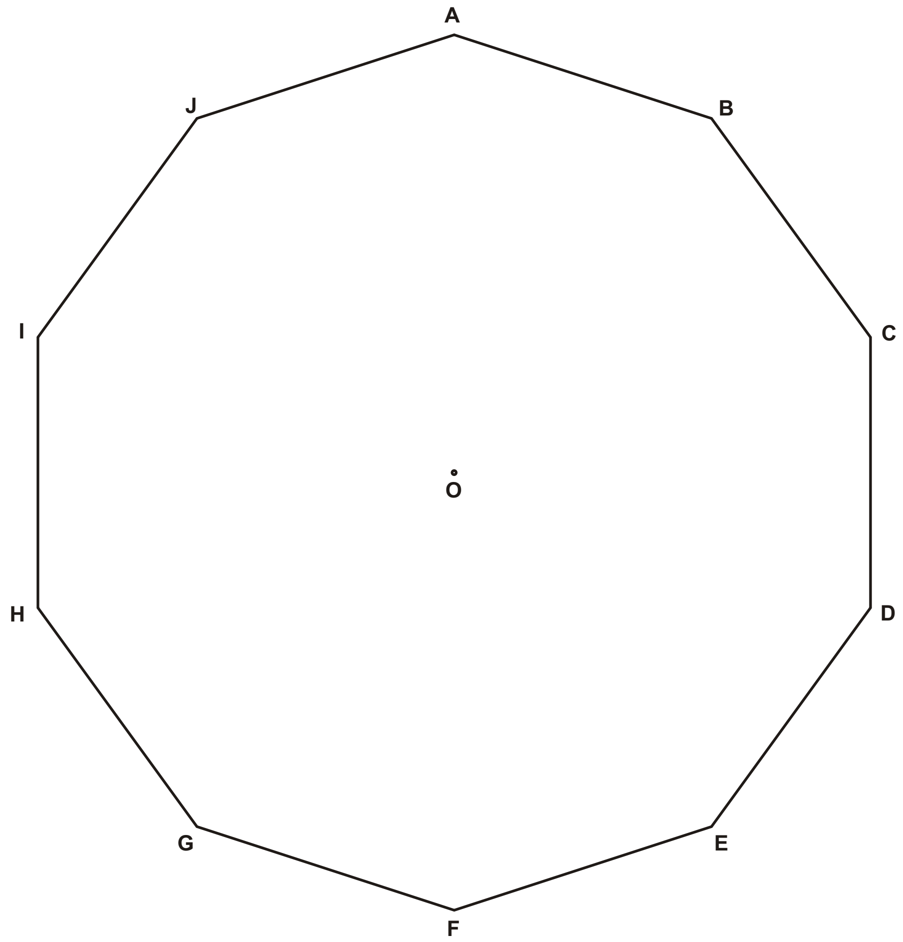
10) Determinar dois polígonos regulares, A e B, sabendo-se que A tem 3 lados a mais que B e que a diferença entre as medidas dos seus ângulos externos é 6º.

11) Dado um decágono regular ABCDE … , determinar a medida do ângulo agudo compreendido entre o lado AB e a diagonal AC.

12) Dado um dodecágono regular ABCDE … , sendo O o centro do dodecágono, determinar a medida do ângulo AOE.

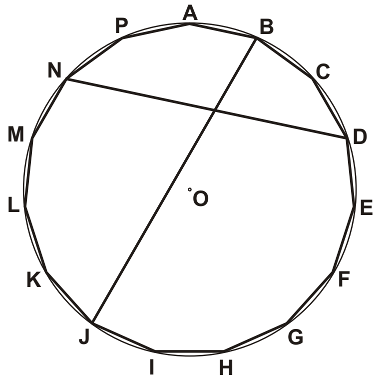


13) Dado um decágono regular ABCDE … , sendo O o centro do polígono, determinar :



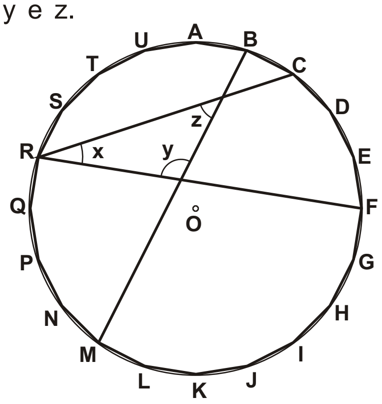
a) a soma das medidas dos ângulos externos do decágono.	b) a medida de cada ângulo externo.	c) a soma das medidas dos ângulos internos do decágono.
d) a medida de cada ângulo interno.	e) a medida do ângulo obtuso formado pelos prolongamentos dos lados BC e DE.	f) a medida do ângulo agudo formado pelos prolongamentos dos lados BC e EF.
g) a medida do ângulo agudo formado entre as diagonais BI e AG.	h) a medida do ângulo EOG.	i) a medida do ângulo EBC.

14) No pentadecágono regular abaixo, determinar a medida do ângulo agudo formado entre as diagonais ND e BJ.



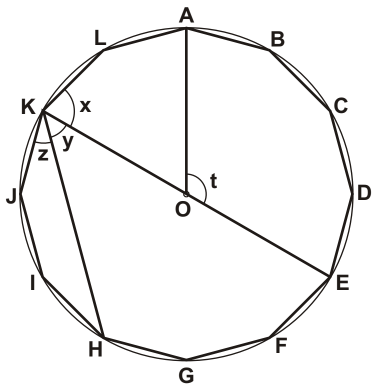
DICA - Aplique ângulos inscritos

15) No icoságono regular abaixo, determinar as medidas dos ângulos x, y e z.



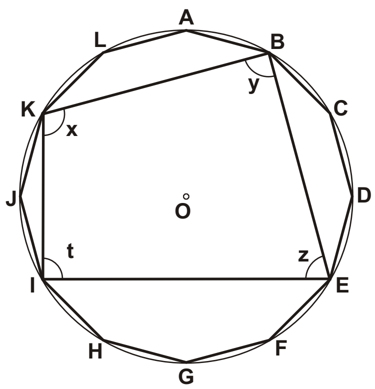
DICA - Aplique ângulos inscritos

16) No dodecágono regular de centro O abaixo, determinar as medidas dos ângulos x, y, z e t.



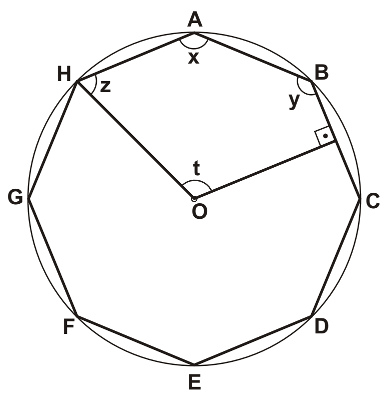
DICA - Aplique ângulos inscritos

17) A figura abaixo representa um quadrilátero BEIK inscrito em um dodecágono regular ABC... . Determinar as medidas dos ângulos x, y, z e t.



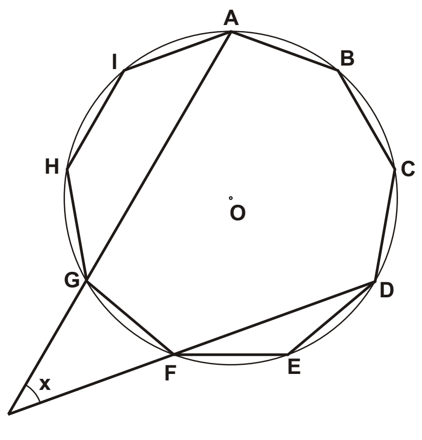
DICA - Aplique ângulos inscritos

18) A figura abaixo representa um octógono regular ABCD ... de centro O. Sendo OH a bissetriz do ângulo AHG e OB a mediatriz do segmento BC, determinar as medidas dos ângulos x, y, z e t.



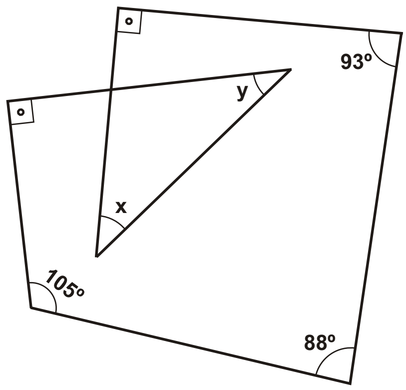
DICA - Aplique ângulos inscritos

19) No eneágono regular ABCD ... , determinar a medida do ângulo x formado pelas retas AG e DF.



DICA - Aplique ângulos inscritos

20) Na figura ao lado, determinar o valor de $x + y$.



21) Dado um polígono convexo ABCD... com n lados, $n > 3$, o número de diagonais do polígono que não passam pelo vértice A é dado por:

a) $5n - 4$

b) $n^2 - 11n$

c) $\frac{n^2 - 5n + 6}{2}$

d) $\frac{n(n-3)}{2}$

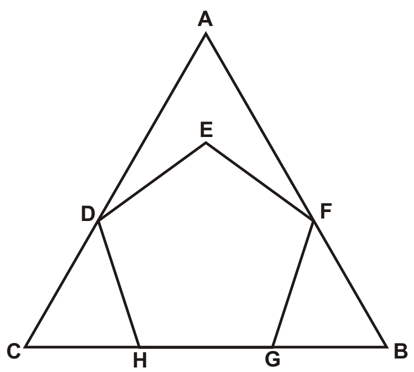
e) $2n^2 - 4$

22) Se a soma dos ângulos internos de um polígono regular é 1620º, sendo x a medida de cada ângulo externo então:

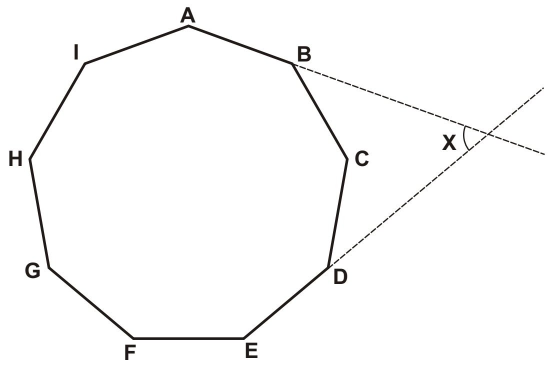
a) $x = 18º$
b) $30º < x < 35º$
c) $x = 45º$
d) $x < 27º$
e) $40º < x < 45º$

23) Três polígonos têm o número de lados expressos por números inteiros consecutivos. Sabendo que o número total de diagonais dos três polígonos é igual a 28, determine a polígono com maior número de diagonais.

24) Na figura ao lado, ABC é um triângulo eqüilátero e DEFGH é um pentágono regular. Sabendo-se que D pertence ao lado AC, F pertence ao lado AC, G e H pertencem ao lado BC, determinar as medidas dos ângulos ADE e CDH.



25) Dado o eneágono regular ao lado, determinar a medida do ângulo formado pelos prolongamentos dos lados AB e DE.



26) Os lados de um polígono regular de n lados, com $n > 4$, são prolongados para formar uma estrela. Dar a expressão que fornece a medida de cada um dos ân-

27) (MACK-SP) Num quadrilátero convexo, a soma de dois ângulos internos consecutivos mede 190º. O maior ângulo formado pelas bissetrizes internas dos dois outros ângulos mede:

a) 105º b) 100º c) 90º d) 95º e) 85º

28) (ITA-SP) O número de diagonais de um polígono regular de $2n$ lados, que não passam pelo centro da circunferência circunscrita a esse polígono, é dado por:

a) $2n(n - 2)$

b) $2n(n - 1)$

c) $2n(n - 3)$

d) $\frac{n(n-5)}{2}$

e) n.d.a.

29) (FEI) O menor ângulo interno de um polígono convexo mede 139º, e os outros ângulos formam com o primeiro uma progressão aritmética de razão 2. Determine o número de lados do polígono.

Respostas desta aula

01)
a) 2700º b) 360º c) 119

02)
a) 1620º b) 360º c) 44

03) 14 lados e 77 diagonais

04) 1620º

05) 360º

06) Quadridecágono e dodecágono

07)
a) 9 b) 1260º c) 140º d) 360º
e) 40º f) 27

08) Eneágono

09)
a) 15 b) 2340º c) 156º d) 360º
e) 24º f) 90

10) Pentadecágono e dodecágono

11) 18º

12) 120º

13)
a) 360º b) 36º c) 1440º d) 144º
e) 108º f) 72º g) 54º h) 72º
i) 36º

14) 72º

15) x = 27º, y = 108º e z = 45º

16) x = 75º, y = 45º, z = 30º e t = 120º

17) x = 105º, y = 90º, z = 75º e t = 90º

18) x = 135º, y = 135º, z = 67,5º e t = 112,5º

19) 40º

20) 74º

21) c

22) b

23) heptágono

24) 24º e 48º

25) 60º

26) $\frac{180(n-4)}{n}$

27) d

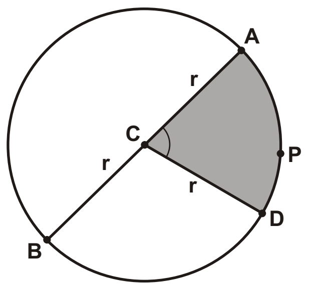
28) a

29) 12

Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.
Obrigado.

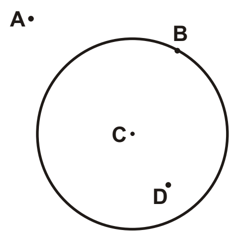
Jeca

I) Elementos da circunferência.



C - centro da circunferência
AC = r - raio da circunferência
AB = 2r - diâmetro da circunferência
$A\widehat{C}D$ = - ângulo central
$\overset{\frown}{APD}$ - arco da circunferência
AD - corda da circunferência

II) Posições relativas entre ponto e circunferência.



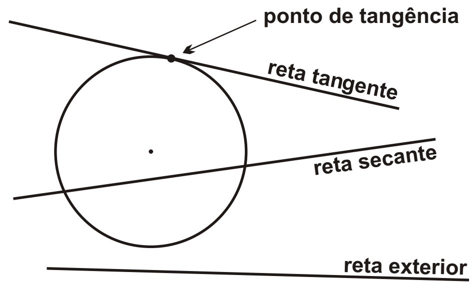
A - ponto exterior

B - ponto da circunferência

D - ponto interior

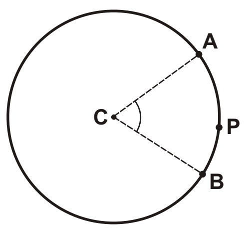
C - centro da circunferência

III) Posições relativas entre reta e circunferência.



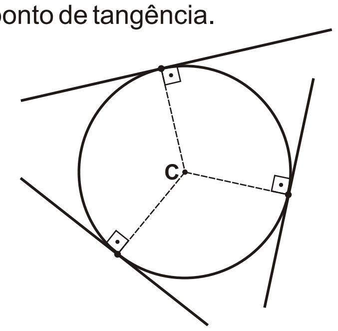
IV) Propriedades da circunferência.

1) Em toda circunferência, a medida do ângulo central é igual à medida do arco correspondente.

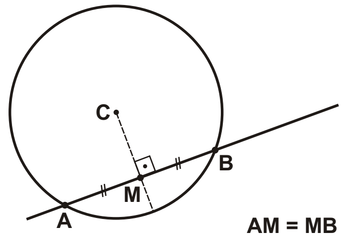


$\overset{\frown}{APB}$ =

2) Em toda circunferência, o raio é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência.



3) Em toda circunferência, o raio, quando perpendicular à corda, divide essa corda ao meio.



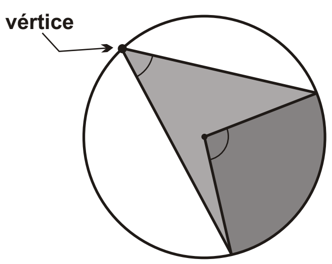
AM = MB

V) Ângulos na circunferência.

a) Ângulo inscrito na circunferência.

É o ângulo que tem o vértice na "linha" da circunferência e os dois lados secantes a essa circunferência.

Propriedade - O ângulo inscrito vale a metade do ângulo central ou a metade do arco correspondente.



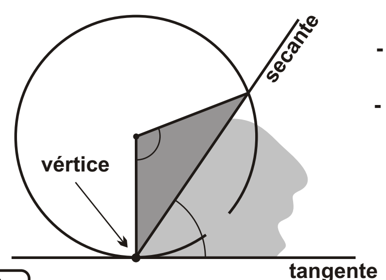
- ângulo central
- ângulo inscrito

$= \frac{\quad}{2}$

b) Ângulo de segmento.

É o ângulo que tem o vértice na "linha" da circunferência, um lado secante e um lado tangente a essa circunferência.

Propriedade - O ângulo de segmento vale a metade do ângulo central ou a metade do arco correspondente.

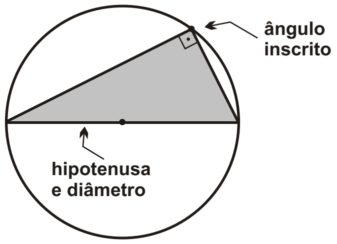


- ângulo central
- ângulo de segmento

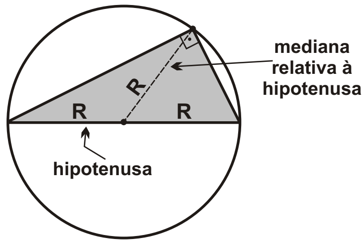
$= \frac{\quad}{2}$

IV) Consequências do ângulo inscrito.

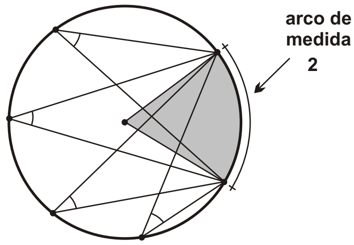
1) Todo triângulo retângulo pode ser inscrito numa semicircunferência onde a hipotenusa coincide com o diâmetro.



2) Em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa vale a metade dessa hipotenusa.

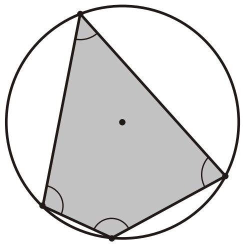


3) Todos os ângulos de uma circunferência inscritos no mesmo arco são congruentes.



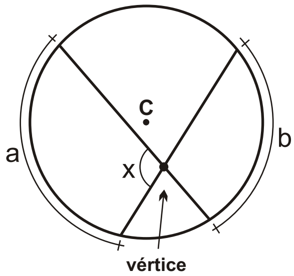
4) Em todo quadrilátero inscrito numa circunferência os ângulos internos opostos são suplementares.

+ = 180º
e
+ = 180º



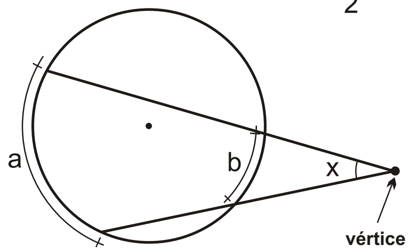
5) Ângulo excêntrico de vértice interno.

$$x = \frac{a + b}{2}$$



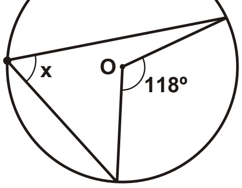
6) Ângulo excêntrico de vértice externo.

$$x = \frac{a - b}{2}$$

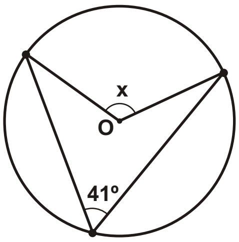


Exercícios - 01) Nas circunferências abaixo, sendo O o centro, determine a medida do ângulo ou do arco x.

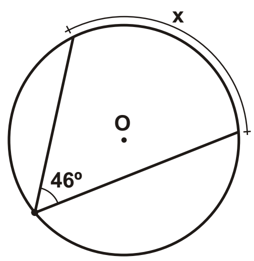
a)



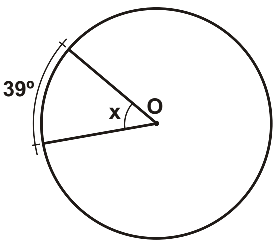
b)



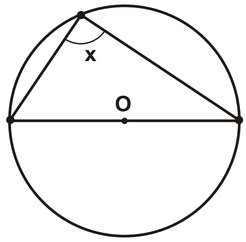
c)



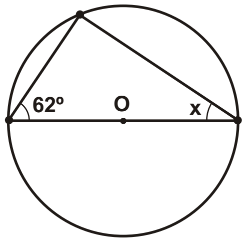
d)



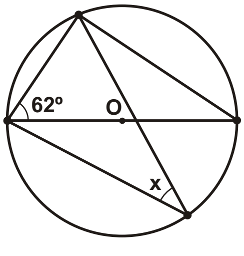
e)



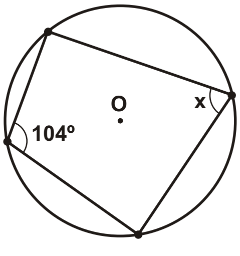
f)



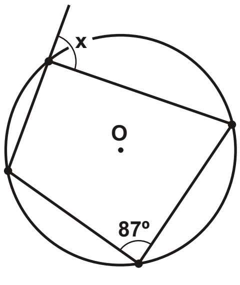
g)



h)

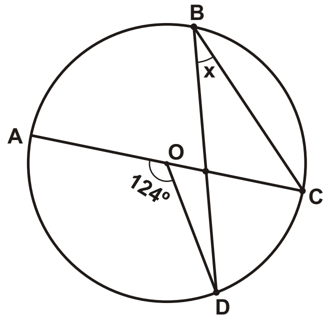


i)

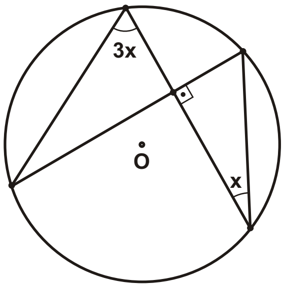


02) Nas figuras abaixo, sendo O o centro da circunferência, determinar a medida do ângulo ou do arco x.

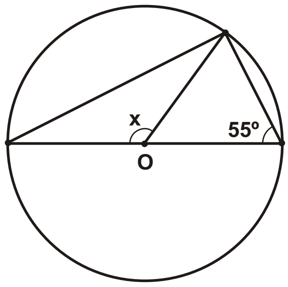
a)



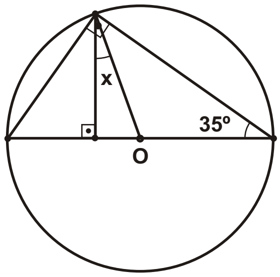
b)



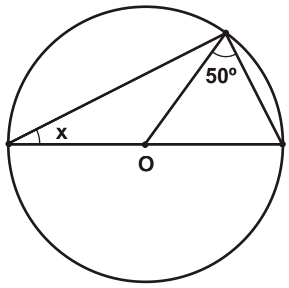
c)



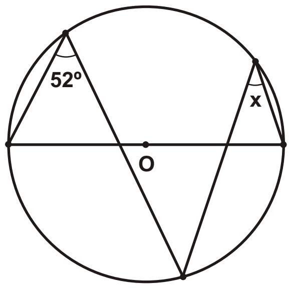
d)



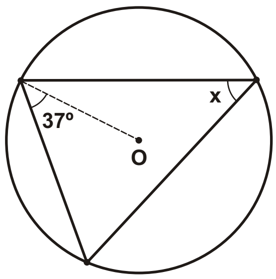
e)



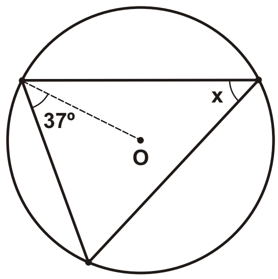
f)



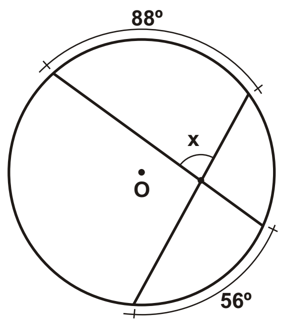
g)



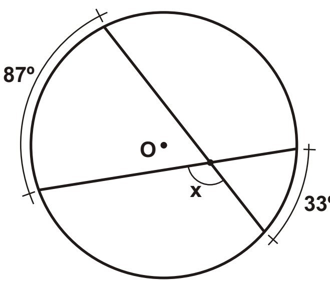
h) Tente fazer por outro método.



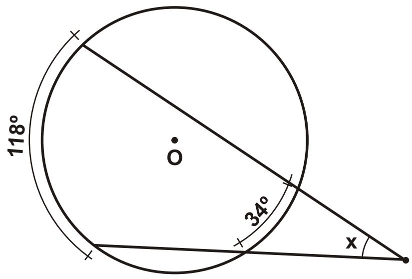
i)



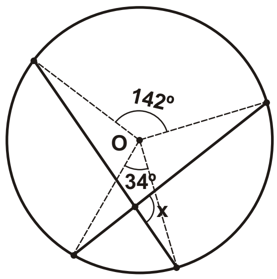
j)



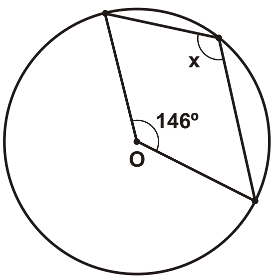
k)



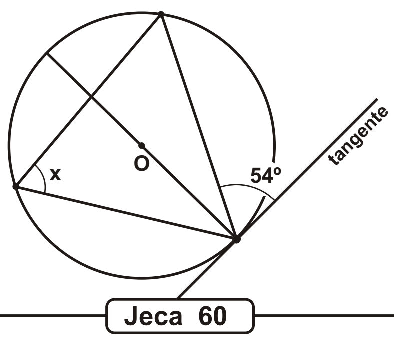
l)



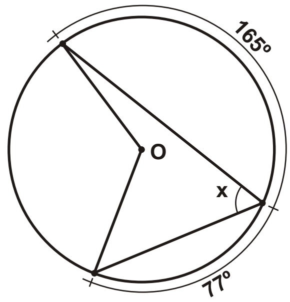
m)



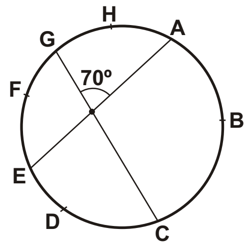
n)



o)



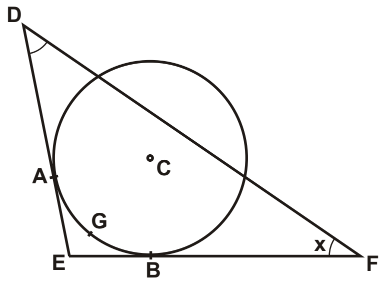
03) Na circunferência abaixo pode-se afirmar que:



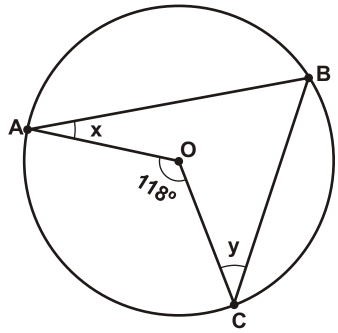
a) as medidas dos arcos AHG e EDG são iguais.
b) a soma dos arcos AHG e ABC é 180º.
c) a soma dos arcos GFE e ABC é 140º.
d) o arco GFE é maior que o arco EDC.
e) a soma dos arcos GFE e ABC é 220º.

04) (J) Dada uma circunferência de diâmetro AB, seja P um ponto da circunferência distinto de A e de B. Pode-se afirmar que :
a) PA = PB
b) PA + PB = constante
c) PA > PB
d) $(PA)^2 + (PB)^2$ = constante
e) $(PA)^2 - (PB)^2$ = constante

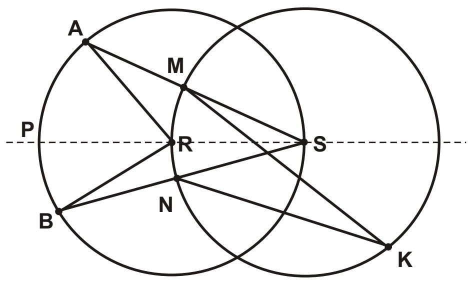
05) Na figura abaixo, a circunferência de centro C tangencia o triângulo DEF nos pontos A e B. Sabendo-se que a medida do ângulo interno D é 40º e que a medida do arco AGB é 75º, determinar a medida do ângulo x.



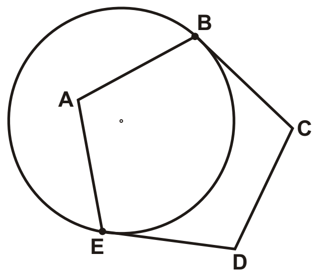
06) Na figura abaixo, os pontos A, B e C são pontos da circunferência de centro O. O valor de x + y é :
a) 242º
b) 121º
c) 118º
d) 59º
e) 62º



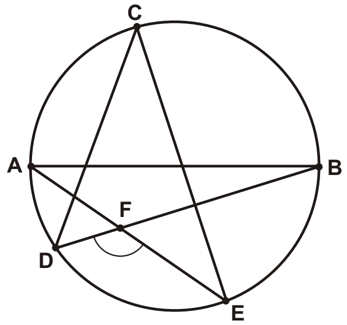
07) Na figura abaixo, as duas circunferências têm o mesmo raio e centros nos pontos R e S. Os pontos A, P, B e S estão na circunferência de centro R e os pontos M, N, R e K estão na circunferência de centro S. Se o arco APB mede 86º, então o ângulo MKN, mede :
a) 23º
b) 21º 30'
c) 22º
d) 22º 30'
e) 43º



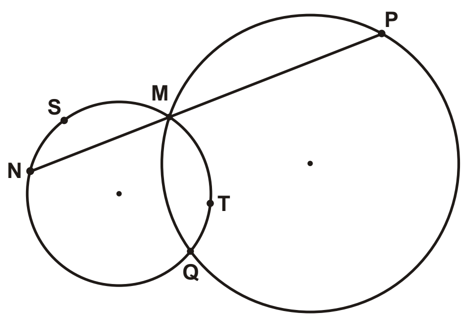
08) Dado um pentágono regular ABCDE, constói-se uma circunferência pelos vértices B e E de tal forma que BC e ED sejam tangentes a essa circunferência, em B e em E, respectivamente. Determine a medida, em graus, do menor arco BE dessa circunferência.



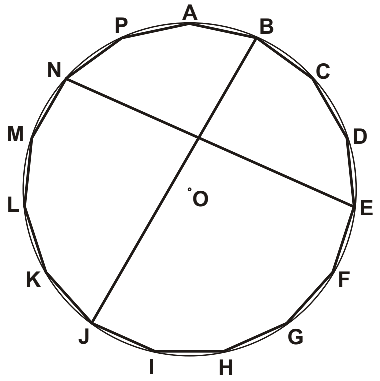
09) Na figura abaixo, AB é o diâmetro e C, D e E são pontos da circunferência. Sabendo-se que o ângulo DCE mede 38º, determine a medida do ângulo EFD.



10) (MACK-SP) Na figura a seguir, os arcos QMP e MTQ medem,respectivamente, 170º e 130º. Então, o arco MSN mede:
a) 60º b) 70º c) 80º d) 100º e) 110º

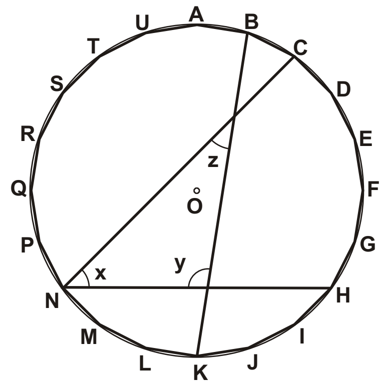


11) No pentadecágono regular abaixo, determinar a medida do ângulo agudo formado entre as diagonais NE e BJ.



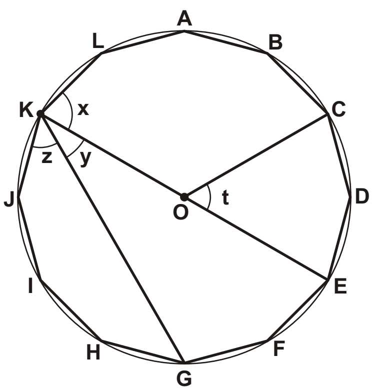
DICA - Aplique ângulos inscritos

12) No icoságono regular abaixo, BK, CN e HN são diagonais. Determine as medidas dos ângulos x, y e z.



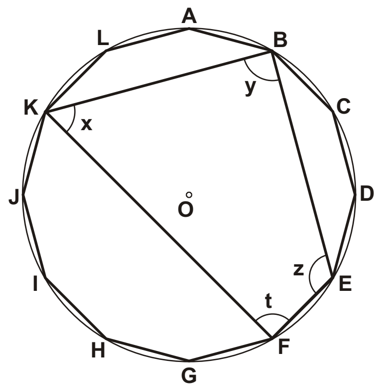
DICA - Aplique ângulos inscritos

13) No dodecágono regular de centro O abaixo, determinar as medidas dos ângulos x, y, z e t.



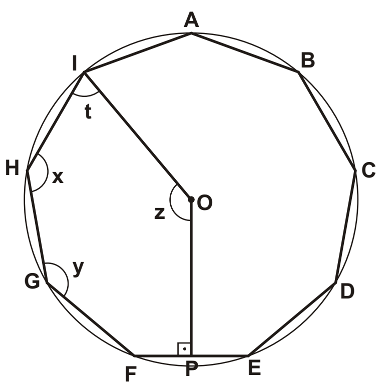
DICA - Aplique ângulos inscritos

14) A figura abaixo representa um quadrilátero BEFK inscrito em um dodecágono regular ABC... . Determinar as medidas dos ângulos x, y, z e t.



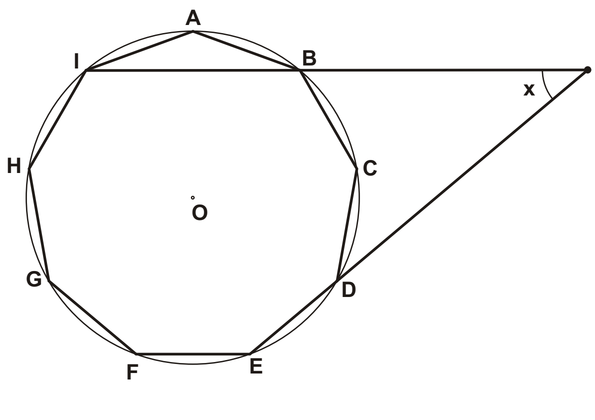
DICA - Aplique ângulos inscritos

15) A figura abaixo representa um eneágono regular ABCD … de centro O. Sendo OI a bissetriz do ângulo AIH e OP a mediatriz do segmento FE, determinar as medidas dos ângulos x, y, z e t.



DICA - Aplique ângulos inscritos

16) No eneágono regular ABCD … , determinar a medida do ângulo x formado pelas retas IB e DE.



DICA - Aplique ângulos inscritos

Respostas desta aula.

01)
a) 59º b) 82º c) 92º d) 39º e) 90º
f) 28º g) 28º h) 76º i) 87º

02)
a) 28º b) 22º 30' c) 110º d) 20º e) 40º
f) 38º g) 53º h) 53º i) 72º j) 120º
k) 42º l) 92º m) 107º n) 54º o) 59º

03) e

04) d

05) 35º

06) d

07) b

08) 144º

09) 108º

10) a

11) 84º

12) 45º, 99º e 36º

13) 75º, 30º, 45º e 60º

14) 60º, 90º, 120º e 90º

15) 140º, 140º, 70º e 140º

16) 40º

Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

Obrigado.

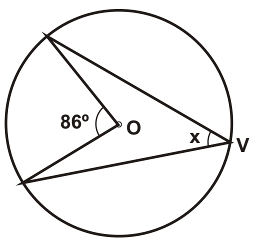
Jeca

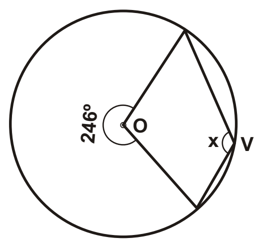
GeoJeca

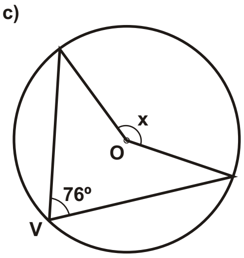
Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

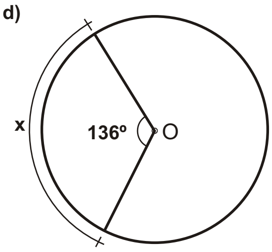
Geometria plana
Ângulos na circunferência.
Exercícios complementares da aula 06.

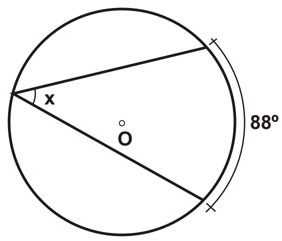
01) Nas figuras abaixo, sendo O o centro da circunferência, determinar a medida do ângulo ou do arco x.

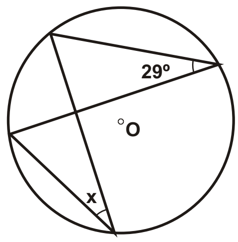
a)


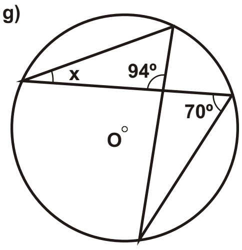
b)


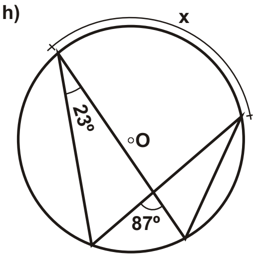
c)


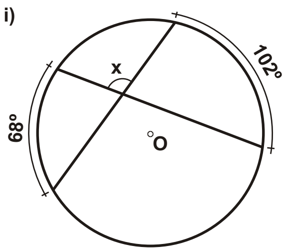
d)


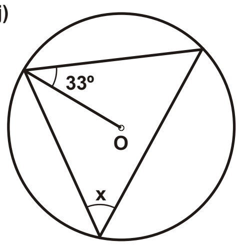
e)


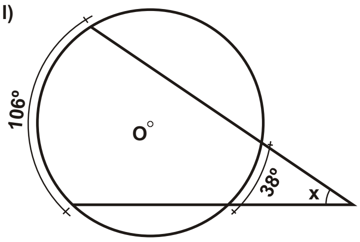
f)


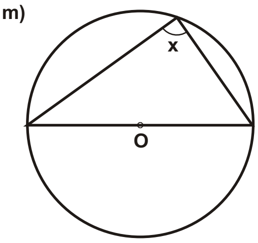
g)


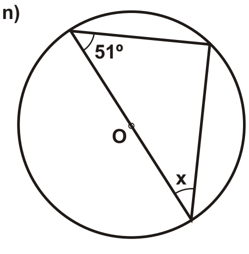
h)


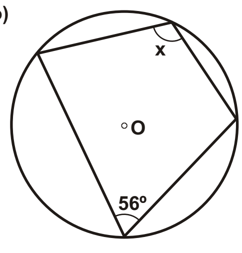
i)


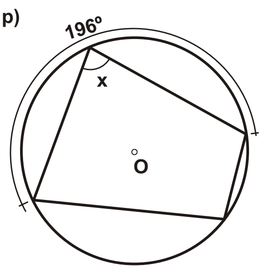
j)


l)


m)


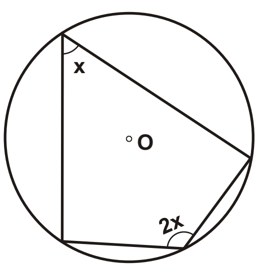
n)


o)


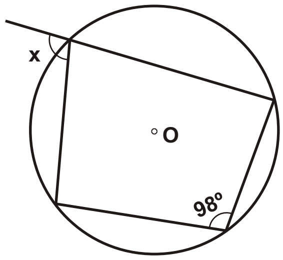
p)


02) Nas figuras abaixo, sendo O o centro da circunferência, determinar a medida do ângulo ou do arco x.

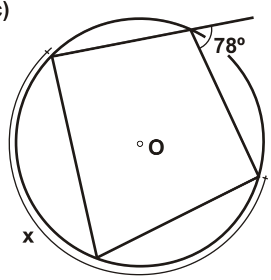
a)



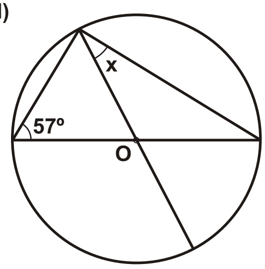
b)



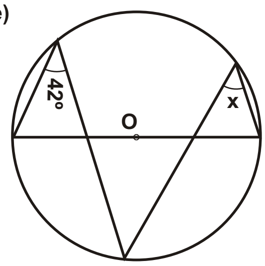
c)



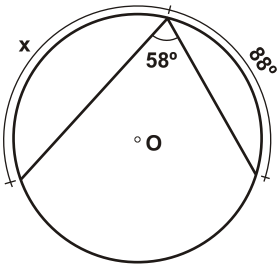
d)



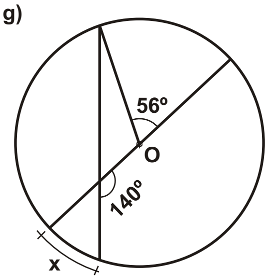
e)



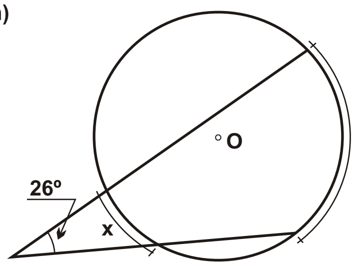
f)



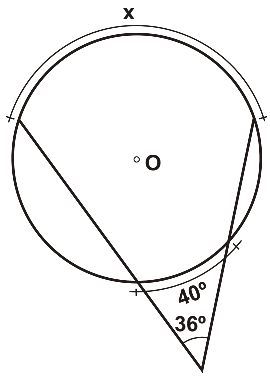
g)



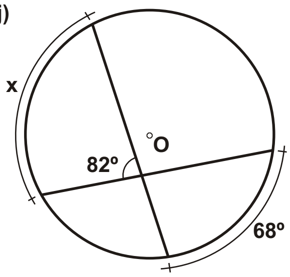
h)



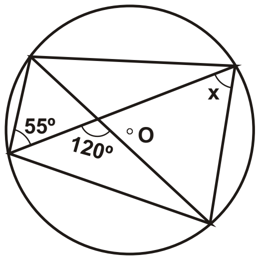
i)



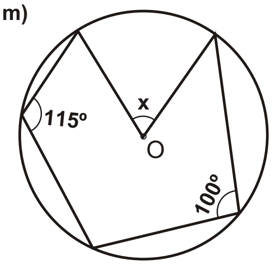
j)



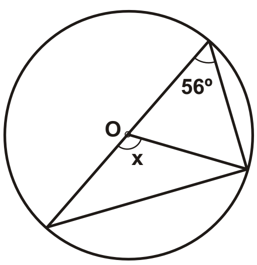
l)



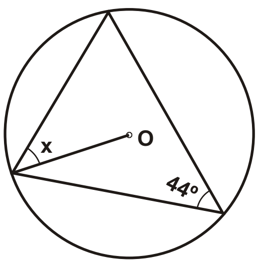
m)



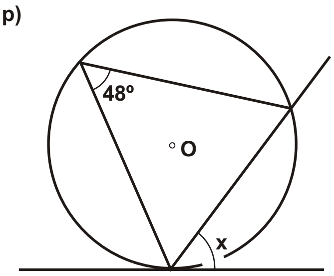
n)



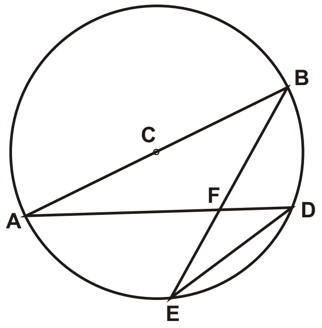
o)



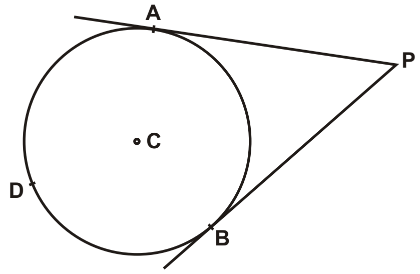
p)



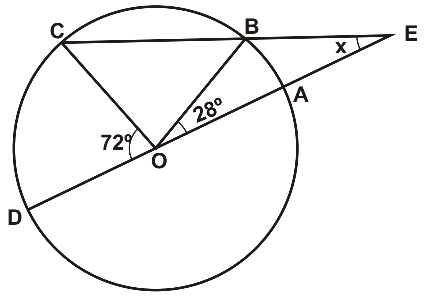
03) Na circunferência de centro C abaixo, AB é um diâmetro e a medida do segmento DE é a metade da medida de AB. Determine a medida dos ângulos ADB, ECD e AFE.



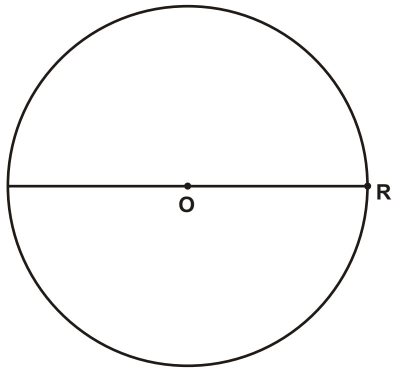
04) Na figura abaixo, as retas PA e PB são tangentes à circunferência de centro C nos pontos A e B. Sabendo-se que o ângulo APB mede 48º, determinar a medida do arco ADB.



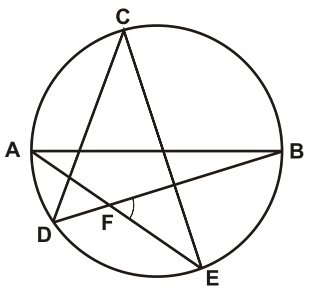
05) Na figura abaixo, A, B, C e D são pontos da circunferência de diâmetro AD e centro O. Determine a medida do ângulo AEB.



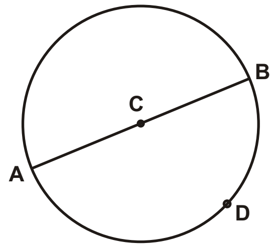
06) Sejam P, Q e R pontos de uma circunferência de centro O, tais que P e Q estão do mesmo lado do diâmetro que passa por R. Sabendo que ORP = 20º e ROQ = 80º, calcule o ângulo PQO.



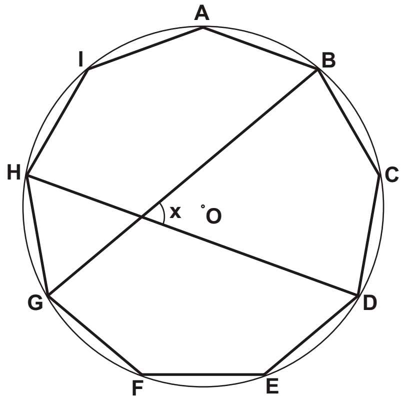
07) Na figura abaixo, AB é o diâmetro e C, D e E são pontos da circunferência. Sabendo-se que o ângulo DCE mede 35º, determine a medida do ângulo BFE.



08) Na figura abaixo, AB = 12 cm é um diâmetro da circunferência de centro C. Sendo D um ponto da circunferência diferente de A e de B, determine :
a) a medida do ângulo ADB.
b) o tipo do triângulo ADB.
c) o que é o segmento CD no triângulo ADB.
d) a medida do segmento CD.

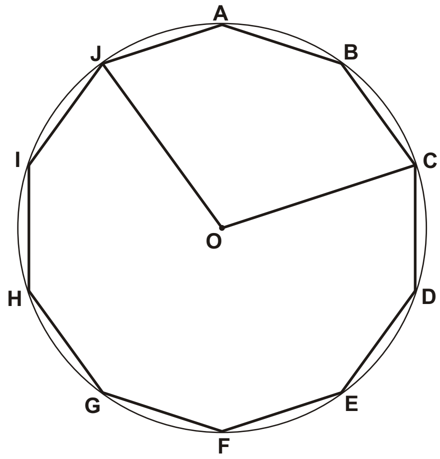


09) A figura abaixo representa um eneágono regular inscrito em uma circunferência de centro O. Determinar a medida do ângulo agudo formado entre as diagonais GB e HD.



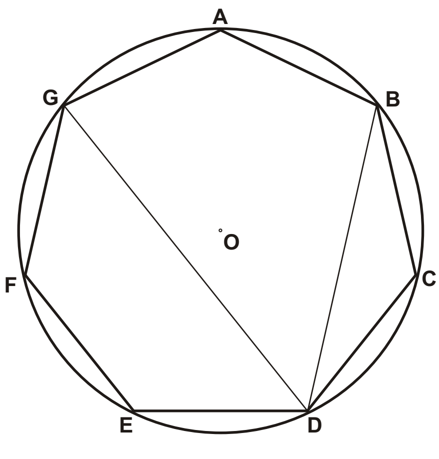
DICA - Aplique ângulos inscritos

10) A figura abaixo representa um decágono regular inscrito em uma circunferência de centro O. Sendo OJ e OC as bissetrizes dos ângulos AJI e BCD respectivamente, determinar a medida do ângulo COJ.



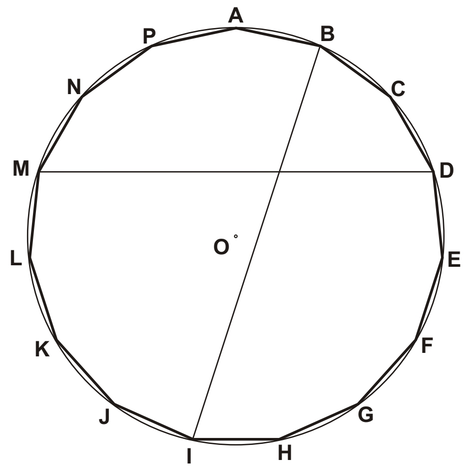
DICA - Aplique ângulos inscritos

11) A figura abaixo representa um heptágono regular inscrito numa circunferência de centro O. Determinar a medida do ângulo BDG.



DICA - Aplique ângulos inscritos

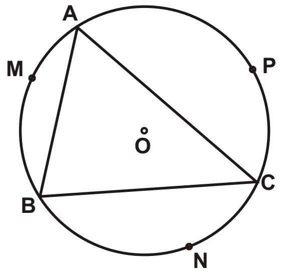
12) A figura abaixo representa um pentadecágono regular inscrito numa circunferência de centro O. Determinar o ângulo obtuso formado entre as diagonais MD e BI.



DICA - Aplique ângulos inscritos

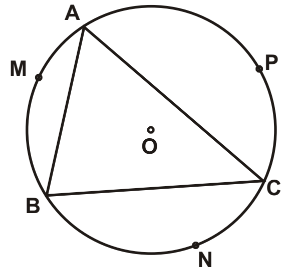
13) Na figura abaixo, os pontos A, B, C, M, N e P estão na circunferência de centro O. Se o arco APC mede 160º e o ângulo BAC mede 63º, qual é a medida do ângulo ACB ?

a) 51º
b) 43º
c) 33º
d) 47º
e) 37º

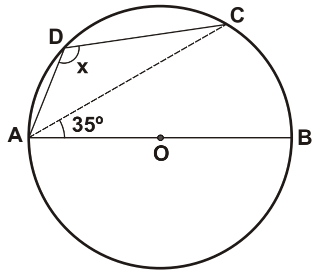


14) Na figura abaixo, os pontos A, B, C, M, N e P estão na circunferência de centro O. Se o arco AMB mede 110º e o ângulo ABC mede 63º, qual é a medida do ângulo BAC ?

a) 62º
b) 64º
c) 58º
d) 63º
e) 59º



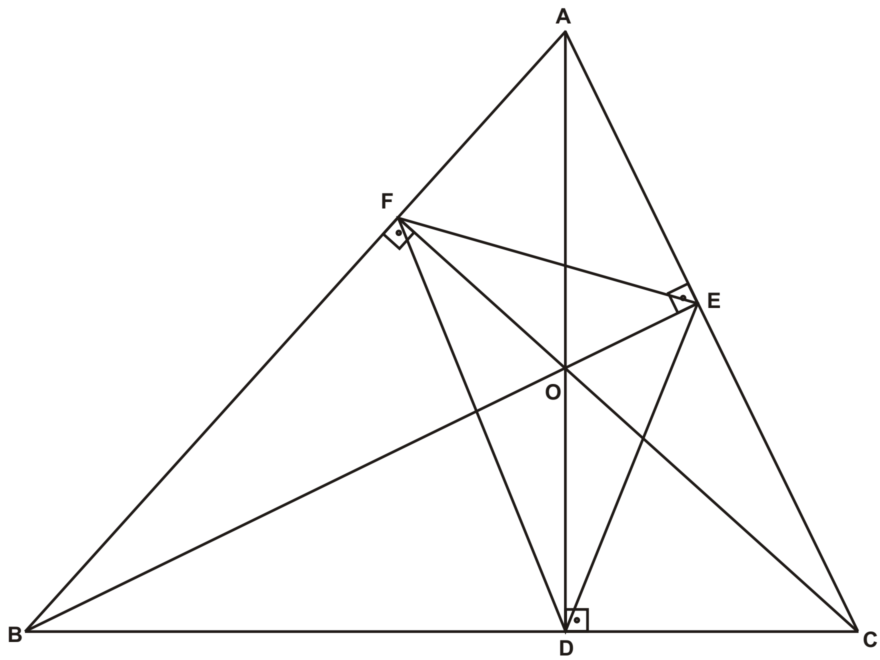
15) Na figura abaixo, AB é o diâmetro da circunferência de centro O. Determinar a medida do ângulo ADC sabendo que o ângulo BAC mede 35º.



16) (FUVEST-SP) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 20 cm e um dos ângulos mede 20º.
a) Qual a medida da mediana relativa à hipotenusa ?
b) Qual a medida do ângulo formado por essa mediana e pela bissetriz do ângulo reto ?

17) No triângulo ABC abaixo, AD, BE e CF são as alturas relativas aos vértices A, B e C. Sendo as medidas dos ângulos ABC = 48º e ACB = 64º, determinar as medidas dos ângulos internos do triângulo DEF.

Desafio



Respostas desta aula.

01)
a) 43º b) 123º c) 152º d) 136º e) 44º
f) 29º g) 16º h) 128º i) 95º j) 57º
l) 34º m) 90º n) 39º o) 124º p) 82º

02)
a) 60º b) 98º c) 204º d) 33º e) 48º
f) 156º g) 24º h) 42º i) 112º j) 96º
l) 65º m) 70º n) 112º o) 46º p) 48º

03) 90º, 60º e 60º

04) 228º

05) 22º

06) 60º

07) 55º

08) a) 90º b) triângulo retângulo
c) mediana d) 6 cm

09) 60º

10) 108º

11) 360º / 7

12) 108º

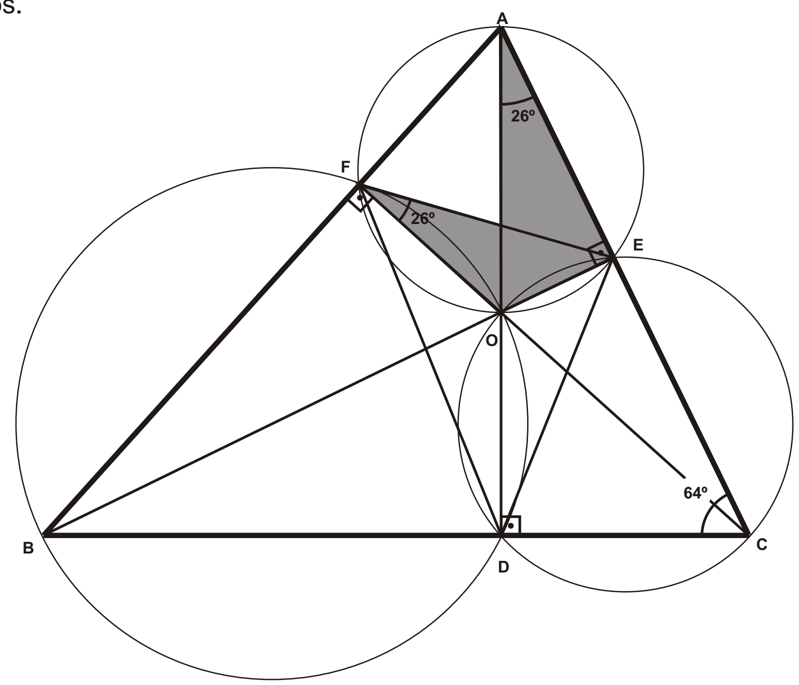
13) e

14) a

15) 125º

16) a) 10 cm b) 25º

<u>Resolução do exercício</u> 17) (Desafio)
O quadrilátero AFOE é inscrito numa circunferência, pois os os ângulos opostos AFO e AEO são suplementares. Desenhando-se a circunferência percebe-se que os ângulos EAO e EFO são congruentes pois estão inscritos no mesmo arco da mesma circunferência. Análogamente provam-se os demais ângulos.



DEF = 84º
DFE = 52º
EDF = 44º

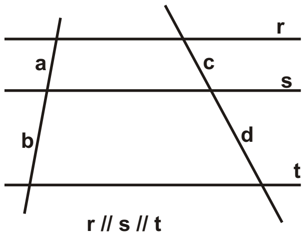
Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.
Obrigado.

Jeca

Geometria plana
Aula 07
Segmentos proporcionais.

I) Teorema de Tales.

Em todo feixe de retas paralelas, cortado por uma reta transversal, a razão entre dois segmento quaisquer de uma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.



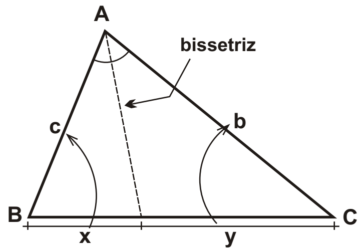
r // s // t

Teorema de Tales

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

II) Teorema da bissetriz interna.

Em todo triângulo, a bissetriz de um ângulo interno divide internamente o lado oposto em dois segmentos que são proporcionais aos lados adjacentes.



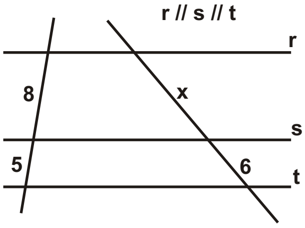
Teorema da bissetriz interna

$$\boxed{\frac{x}{c} = \frac{y}{b}}$$

Exercícios.

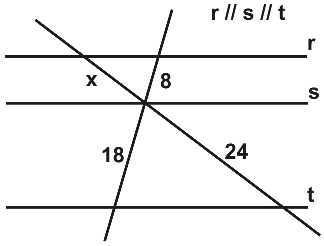
01) Determine o valor de x na figura abaixo.

r // s // t

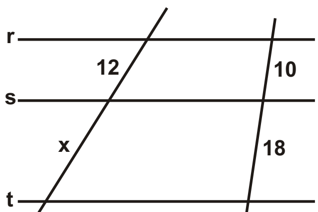


02) Determine o valor de x na figura abaixo.

r // s // t

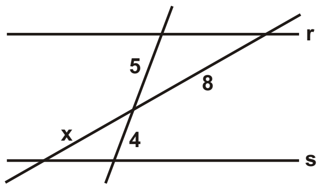


03) Determine o valor de x na figura abaixo.



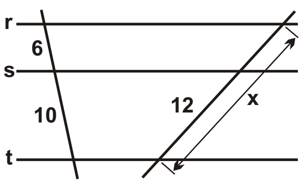
r // s // t

04) Determine o valor de x na figura abaixo.



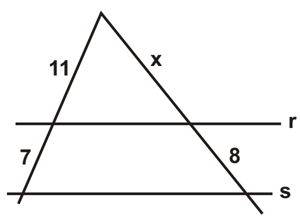
r // s

05) Determine o valor de x na figura abaixo.



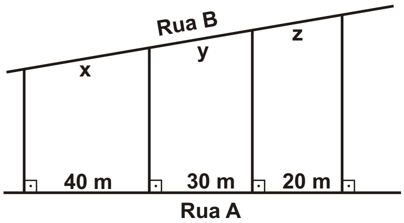
r // s // t

06) Determine o valor de x na figura abaixo.

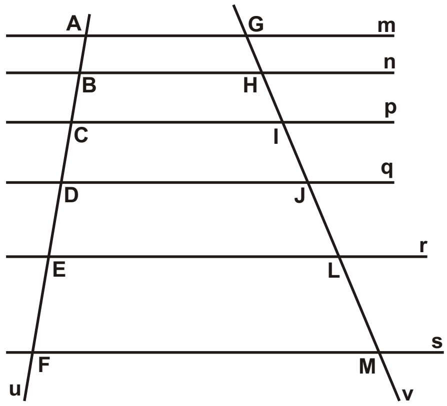


r // s

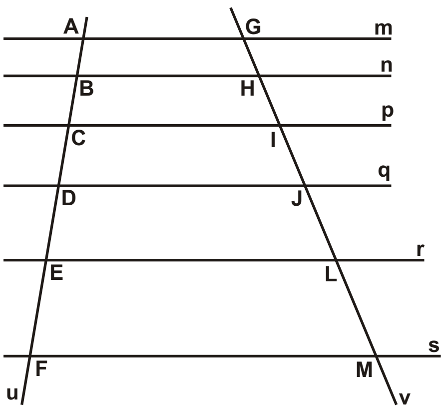
07) (MAPOFEI 76) Três terrenos têm frente para a Rua A e para a Rua B, como mostra a figura. As divisas laterais são perpendiculares à Rua A. Qual a medida de frente para a Rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua é 180 m.



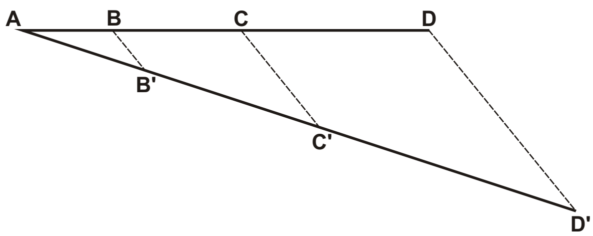
08) Na figura abaixo, as retas m, n, p, q, r e s são paralelas entre si e são cortadas pelas retas u e v. Sabendo-se que AB = 3, BC = 4, CD = 5, DE = 6, EF = 7 e JL = 8, determine a medida de GJ e de HM.



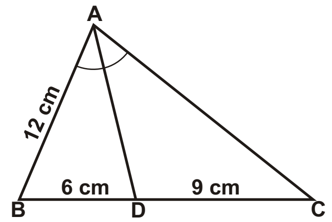
09) Na figura abaixo, as retas m, n, p, q, r e s são paralelas entre si e são cortadas pelas retas u e v. Sabendo-se que AB = 3, BC = 4, CD = 5, DE = 6, EF = 7 e JM = 15, determine as medidas de HL e GM.



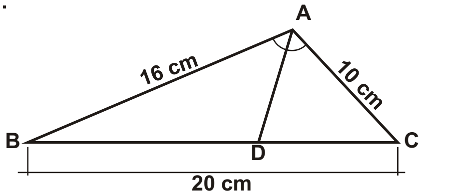
10) (UNICAMP) A figura a seguir mostra um segmento AD dividido em três partes: AB = 2cm, BC = 3 cm e CD = 5 cm. O segmento AD' mede 13 cm e as retas BB' e CC' são paralelas a DD'. Determine os comprimentos dos segmentos AB', B'C' e C'D' em centímetros.



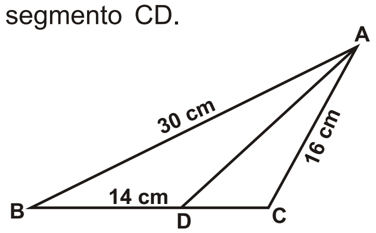
11) No triângulo ABC abaixo, sendo AD a bissetriz do ângulo interno do vértice A, determine a medida do segmento AC.



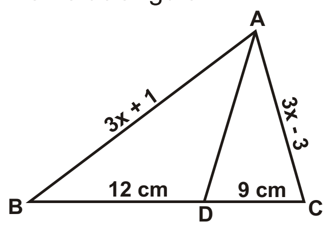
12) No triângulo ABC abaixo, sendo AD a bissetriz do ângulo interno do vértice A, determine a medida do segmento BD.



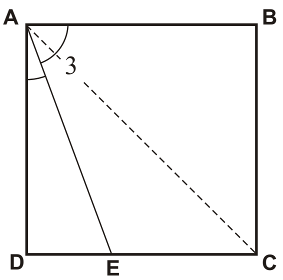
13) Na figura, AD é bissetriz interna do ângulo A. Calcule a medida do segmento CD.



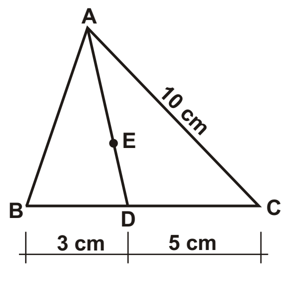
14) Determinar o valor de x sabendo-se que na figura abaixo AD é a bissetriz interna do ângulo A.



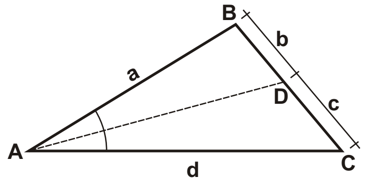
15) O quadrado ABCD da figura abaixo tem lado 4 cm. Determine a medida do segmento DE.



16) Na figura abaixo, o ponto E é o incentro do triângulo ABC. Sendo BD = 3 cm, CD = 5 cm e AC = 10 cm, determine o valor da razão DE / AE.



17) Na figura abaixo, sendo AD a bissetriz do ângulo A, determine a em função de b, c e d.



18) Dado um triângulo ABC de lados AB = c, AC = b e BC = a, sendo c < b < a. Se a bissetriz do ângulo A divide o lado BC em dois segmentos, qual é a medida do menor desses segmentos ?

a) $\dfrac{b \cdot c}{a + c}$

b) $\dfrac{b \cdot c}{a + b}$

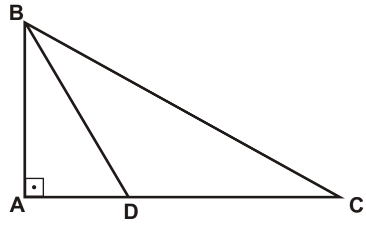
c) $\dfrac{a \cdot b}{b + c}$

d) $\dfrac{a \cdot c}{b + c}$

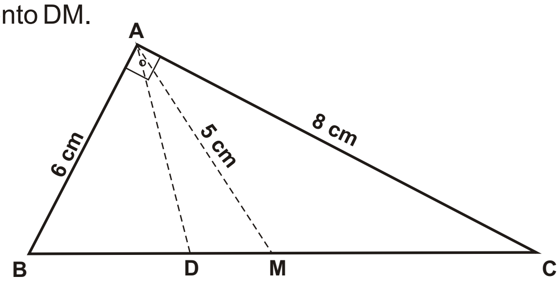
e) $\dfrac{a \cdot b}{b - c}$

19) (Fuvest-SP) Um triângulo ABC tem lados AB = 5, BC = 4 e AC = 2. Sejam M e N os pontos de AB tais que CM é a bissetriz relativa ao ângulo ACB e CN é a altura relativa ao lado AB. Determine o comprimento de MN.

20) Na figura abaixo, ABC é um triângulo retângulo e o segmento BD é a bissetriz interna do ângulo ABC. Determine a medida de BD sabendo que BC = 25 cm e que AB = 7 cm.



21) Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo em A ; AM é a mediana relativa à hipotenusa e AD é a bissetriz do ângulo BAC. Determinar a medida do segmento DM.



22) (MAPOFEI-SP) O perímetro de um triângulo é 100 m. A bissetriz do ângulo interno A divide o lado oposto em dois segmentos de 16 m e 24 m. Determine as medidas dos lados desse triângulo.

Respostas desta aula.

01) 48 / 5

02) 32 / 3

03) 108 / 5

04) 32 / 5

05) 96 / 5

06) 88 / 7

07) 80 m, 60 m, e 40 m

08) 16 e 88 / 3

09) 225 / 13 e 375 / 13

10) 13 / 5, 39 / 10 e 13 / 2

11) 18 cm

12) (160 / 13) cm

13) (112 / 15) cm

14) 5 cm

15) $4(\sqrt{2} - 1)$ cm

16) 1 / 2

17) b.d / c

18) d

19) 11 / 30

20) (35 / 4) cm

21) (5 / 7) cm

22) 24 cm, 40 cm e 36 cm

Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

Obrigado.

Jeca

GeoJeca

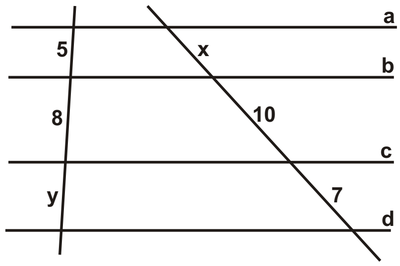
Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria plana

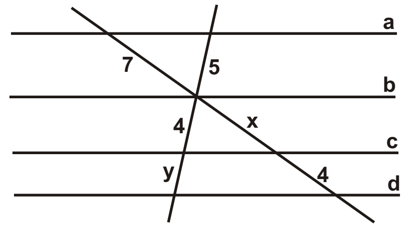
Teorema de Tales e Teorema da bissetriz interna.

Exercícios complementares da aula 07.

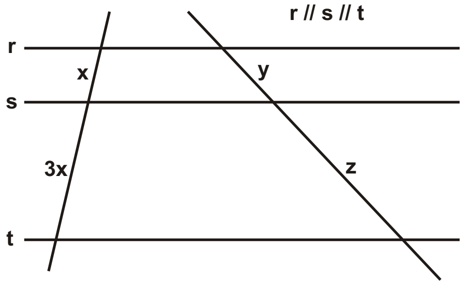
01) Na figura abaixo, sendo a // b // c //d , determinar x e y.



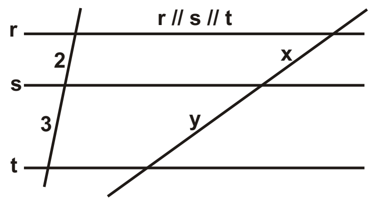
02) Na figura abaixo, sendo a // b // c //d , determinar x e y.



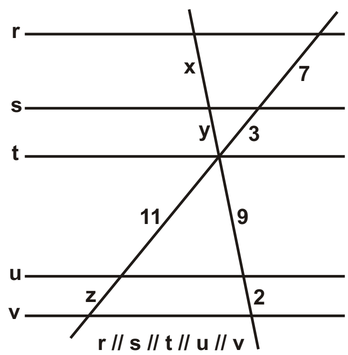
03) Na figura abaixo, determine z em função de y.



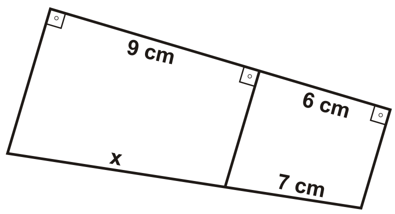
04) Na figura abaixo, sendo x + y = 9, determinar o valor de x e de y.



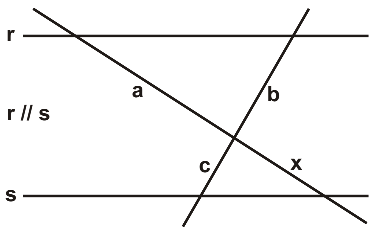
05) Na figura abaixo, determinar x, y e z.



06) Na figura abaixo, determine o valor de x.



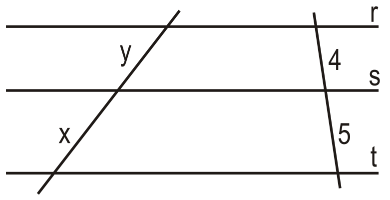
07) Na figura abaixo, determine o valor de x em função de a, b e c.



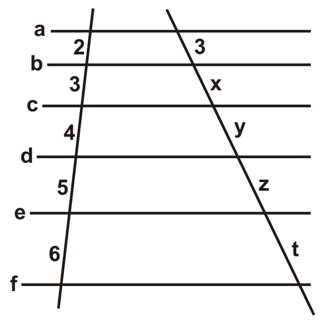
08) Num triângulo ABC, o lado AC mede 32 cm e o lado BC, 36 cm. Por um ponto M situado sobre AC, a 10 cm do vértice C, traçamos a paralela ao lado AB, a qual divide BC em dois segmentos BN e CN. Determine a medida de CN.

09) Na figura abaixo, as retas r, s e t são paralelas entre si. Se $x + y = 12$, então o valor que mais se aproxima de $x - y$, é:

a) 1,03
b) 1,33
c) 1,57
d) 1,75
e) 2,00

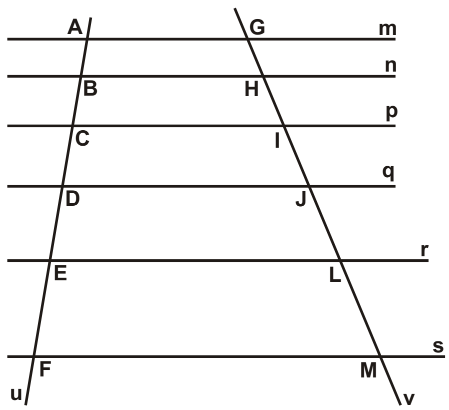


10) Na figura abaixo, as retas a, b, c, d, e e f são paralelas entre si. Determine o valor da soma das medidas dos segmentos x, y, z e t.



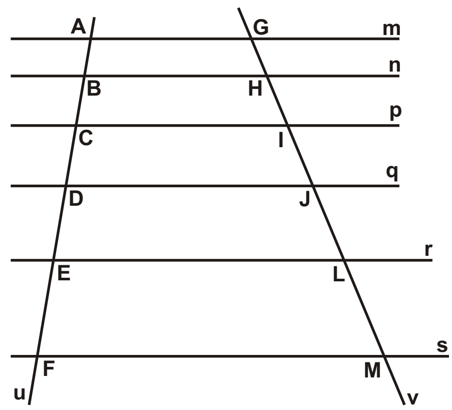
11) Na figura abaixo, as retas m, n, p, q, r e s são paralelas entre si e são cortadas pelas retas u e v. Sabendo-se que AB = 3, BC = 4, CD = 5, DE = 6, EF = 7 e LM = 8, qual é a medida de HJ?

a) 83/9
b) 81/7
c) 93/9
d) 72/7
e) 89/8

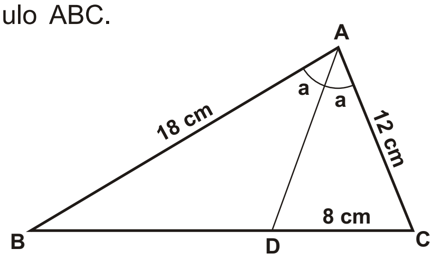


12) Na figura abaixo, as retas m, n, p, q, r e s são paralelas entre si e são cortadas pelas retas u e v. Sabendo-se que AB = 3, BC = 4, CD = 5, DE = 6, EF = 7 e HJ = 10, qual é a medida de HM?

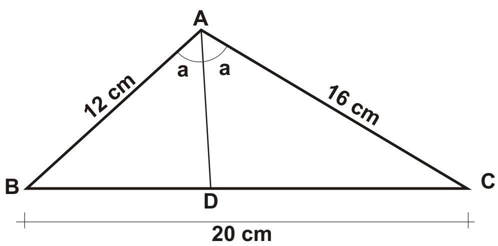
a) 198/7
b) 223/9
c) 220/9
d) 241/10
e) 241/11



13) Na figura abaixo, AD é a bissetriz do ângulo BAC. Determine a medida do segmento BD e o valor do perímetro do triângulo ABC.



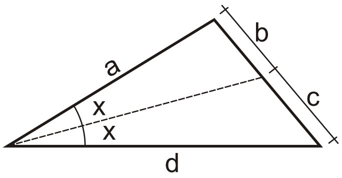
14) Na figura abaixo, AD é a bissetriz do ângulo BAC. Determine a medida dos segmentos BD e CD.



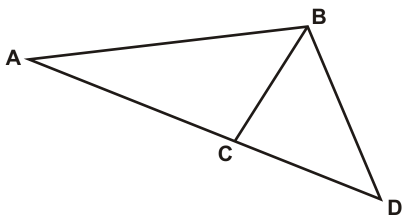
15) Num triângulo ABC, CD é a bissetriz do ângulo interno ACB. Sabendo que AD = 7 cm, BD = 4 cm e AC = 15 cm, determine a medida do lado BC.

16) Observe a figura abaixo. De acordo com essa figura, qual das relações abaixo é verdadeira.

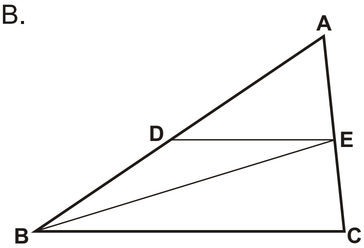
a) a = b.d / c
b) a = b.c / d
c) a = c.d / b
d) a = c / (b.d)
e) a = b.c.d



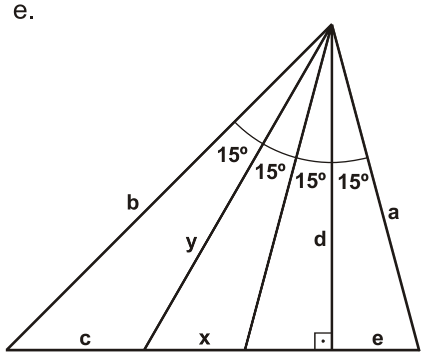
17) No triângulo ABD abaixo, BC é a bissetriz do ângulo ABD, AB = 18 cm e BD = 15 cm. Determine a razão entre as medidas dos segmentos AC e CD.



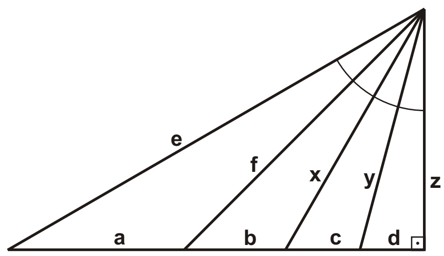
18) (J) No triângulo ABC abaixo, AB = 12, AC = 8 e BC = 10. Determinar a medida de AD, sabendo que DE é paralelo a BC e BE é a bissetriz do ângulo interno do vértice B.



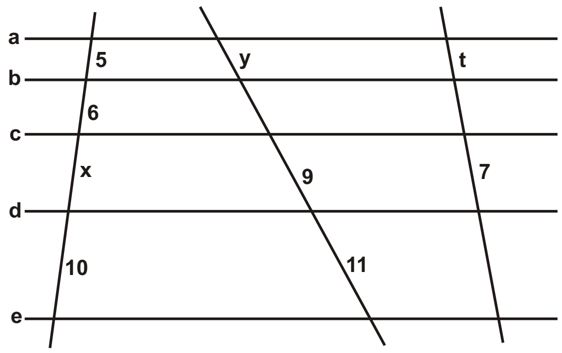
19) (J) Na figura abaixo, determinar x e y em função de a, b, c, d e e.



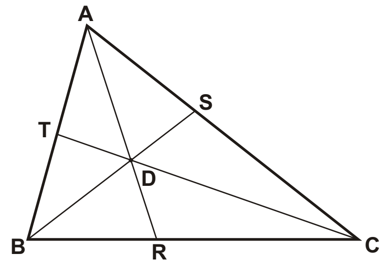
20) (J) Na figura abaixo, determinar x, y e z em função de a, b, c, d, e e f.



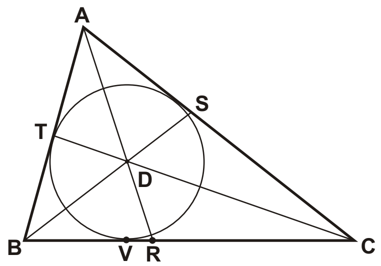
21) (J) Na figura abaixo, as retas a, b, c, d e e são paralelas entre si. Determine o valor da expressão E = x . y + t.



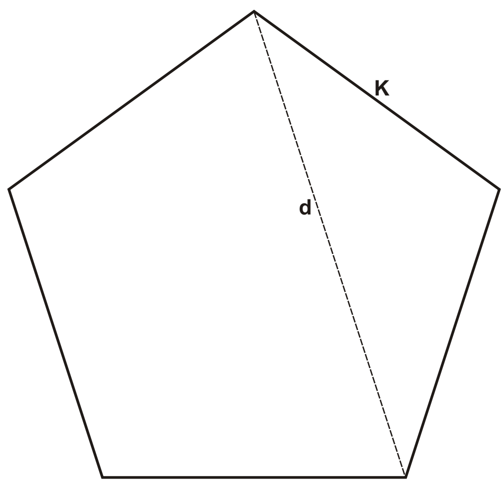
22) (J) No triângulo ABC abaixo, AB = 6, AC = 9 e BC = 8. Sabendo que D é o ponto de encontro das três bissetrizes dos ângulos internos do triângulo ABC, determine a razão entre CD e DT.



23) (J) No triângulo ABC abaixo, AB = 6, AC = 9 e BC = 8. Sabendo que D é o incentro do triângulo ABC e que V é o ponto onde a circunferência de centro em D tangencia o lado BC, determine a distância VR.



24) (J) Determine a medida de uma diagonal de um pentágono regular de lado K.



Respostas desta aula.

01) 25 / 4 e 28 / 5

02) 28 / 5 e 20 / 7

03) 3y

04) 18 / 5 e 27 / 5

05) 63 / 11, 27 / 11 e 22 / 9

06) (21 / 2) cm

07) a.c / b

08) (45 / 4) cm

09) b

10) 27

11) d

12) c

13) 12 cm e 50 cm

14) (60 / 7) cm e (80 / 7) cm

15) (60 / 7) cm

16) a

17) 6 / 5

18) 72 / 11

19) a.c / b e a.c.d / b.e

20) b.e / a, c.f / b e e(c + d) / (a + b)

21) 887 / 18

22) 17 / 6

23) 7 / 10

24) $K(1 + \sqrt{5}) / 2$

Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

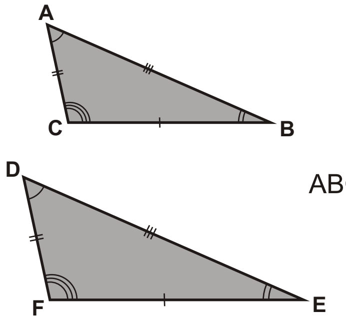
Obrigado.

Jeca

I) Semelhança de triângulos.

Definição.
Dois triângulos são semelhantes se têm os ângulos dois a dois congruentes e os lados correspondentes dois a dois proporcionais.

Definição mais "popular".
Dois triângulos são semelhantes se um deles é a redução ou a ampliação do outro.



semelhante

$$ABC \sim DEF \iff \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \\ \text{e} \\ \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} = k \end{cases}$$

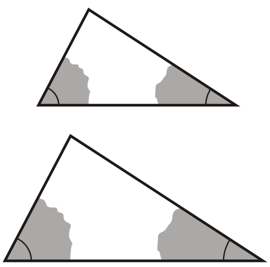
K - razão da semelhança
ou
constante de proporcionalidade.

Importante - Se dois triângulos são semelhantes, a proporcionalidade se mantém constante para quaisquer dois segmentos correspondentes, tais como: lados, medianas, alturas, raios das circunferências inscritas, raios das circunferências circunscritas, perímetros, etc.

II) Casos de semelhança. (Como reconhecer a semelhança de triângulos)

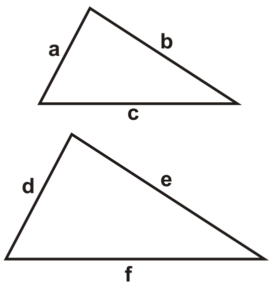
1) Caso AA (importantíssimo).

Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos (AA) de um deles são congruentes a dois ângulos do outro.



2) Caso LLL.

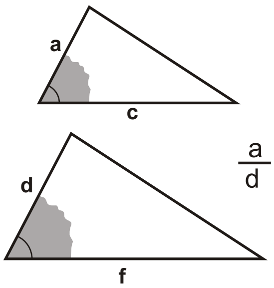
Dois triângulos são semelhantes se têm os três lados dois a dois ordenadamente proporcionais.



$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$$

3) Caso LAL.

Dois triângulos são semelhantes se têm um ângulo congruente e os dois lados de um triângulo adjacentes ao ângulo são proporcionais aos dois lados adjacentes ao ângulo do outro triângulo.

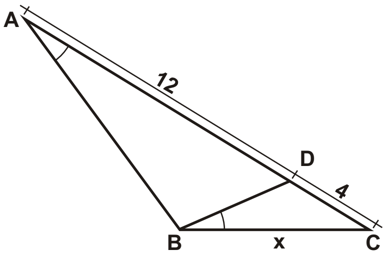


$$\frac{a}{d} = \frac{c}{f} = k$$

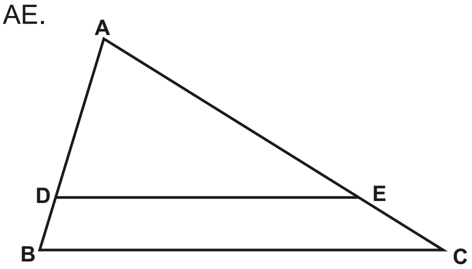
III) Como aplicar a semelhança de triângulos.

a) Reconhecer a semelhança através dos "casos de semelhança".
b) Desenhar os dois triângulos separados.
c) Chamar de , e os três ângulos de cada triângulo.
d) Escolher um triângulo para ser o numerador da proporção.
e) Montar uma proporção entre segmentos correspondentes, mantendo sempre o mesmo triângulo no numerador da proporção.

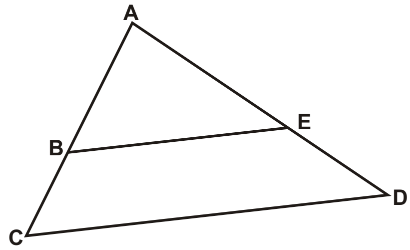
Exercício 01 - Utilizando a técnica de aplicação da semelhança de triângulos acima descrita, determine o valor de x na figura abaixo.



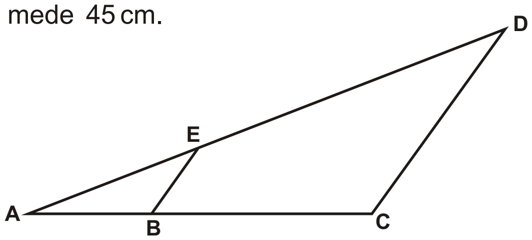
02) Na figura abaixo o segmento DE é paralelo à base BC, AB = 9 cm, AC = 13 cm, BC = 12 cm e a medida de DE é 8 cm. Determine as medidas dos segmentos AD e AE.



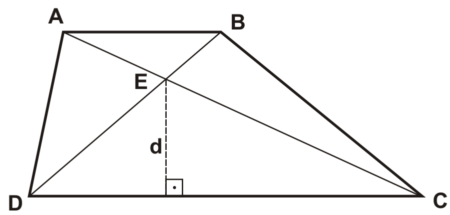
03) Na figura abaixo, AB = 7 cm, BC = 5 cm, ED = 6 cm e BE mede 10 cm e é paralelo a CD. Determine a medida dos segmentos AE e CD.



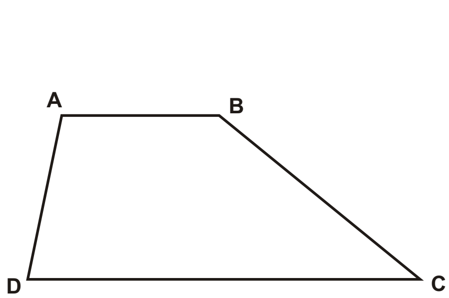
04) Na figura, AB = 5 cm, BE = 3 cm e AE = 7 cm. Determine a medida dos segmentos AC e CD, sabendo que BE é paralelo a CD e que o perímetro do triângulo ACD mede 45 cm.



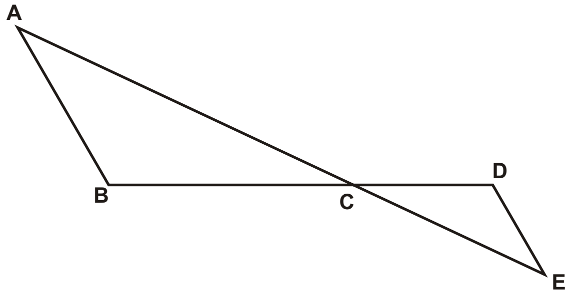
05) Na figura, o trapézio ABCD tem bases AB = 8 cm, CD = 18 cm e altura 12 cm. As diagonais AC e BD interceptam-se no ponto E. Determine a distância entre o ponto E e a base CD.



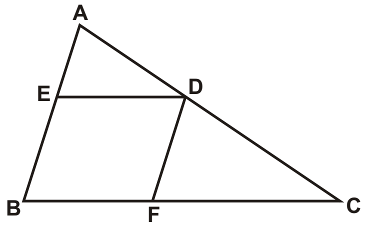
06) Na figura, o trapézio ABCD tem bases AB = 8 cm, CD = 18 cm e altura 12 cm. Sendo E o ponto de intersecção dos prolongamentos dos lados AD e BC, determine a altura relativa à base AB do triângulo ABE.



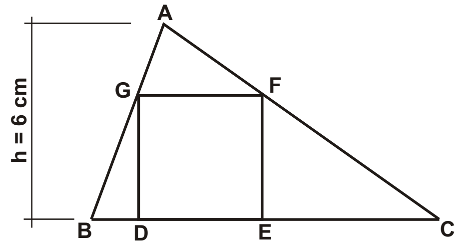
07) Na figura, AB // DE, AB = 8 cm, DE = 4 cm e BD mede 14 cm. Determine a medida do segmento CD.



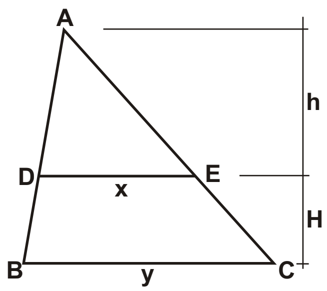
08) Na figura, AB = 8, BC = 12 e BFDE é um losango inscrito no triângulo ABC. Determine a medida do lado desse losango.



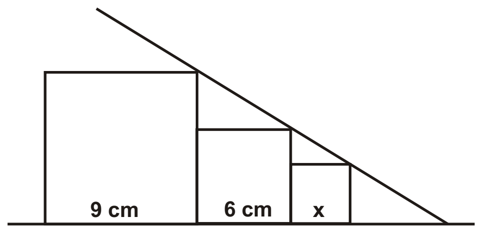
09) Na figura abaixo, ABC é um triângulo de base BC mede 12 cm e a altura 6 cm. DEFG é um quadrado com o lado DE sobre o segmento BC. Determine a medida do lado desse quadrado.



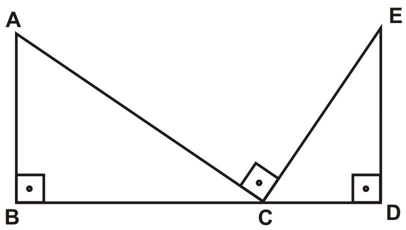
10) Na figura abaixo, o triângulo ADE tem base DE = **x** e altura **h**. Sabendo-se que o triângulo ABC tem base BC = **y** e as bases BC e DE são paralelas, determine a medida da altura H do trapézio BCED em função de **x**, **y** e **h**.



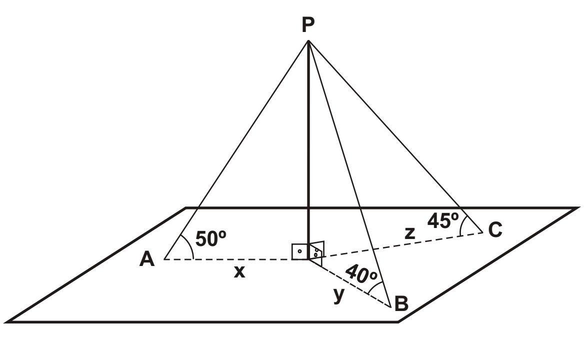
11) Os quadrados representados na figura abaixo têm lados 9 cm, 6 cm e x cm. Determinar a medida do perímetro do menor quadrado.



12) Na figura abaixo, AB = 8 cm, BD = 20 cm e DE = 5 cm. Determine a medida de BC.

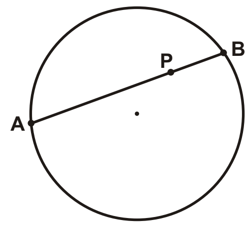


13) (ESPM) Um mastro vertical é mantido nessa posição por 3 cabos esticados que partem da extremidade P e são fixados no chão nos pontos A, B e C, conforme a figura abaixo. Sendo **x**, **y** e **z** as distâncias respectivas desses pontos ao pé do mastro, determine o valor de z em função de x e y.



IV) Potência de um ponto em relação a uma circunferência.

Dada uma circunferência e um ponto P, P não pertencente a , se A e B são os pontos de intersecção entre e a reta secante a por P, define-se **potência de P em relação a** o produto $\overline{PA} \times \overline{PB}$.

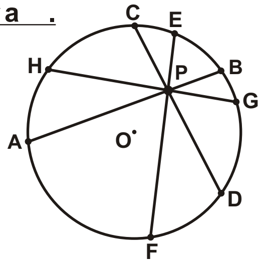


Propriedade.

Dados e P, a potência de P em relação a é constante, qualquer que seja a reta AB secante a por P.

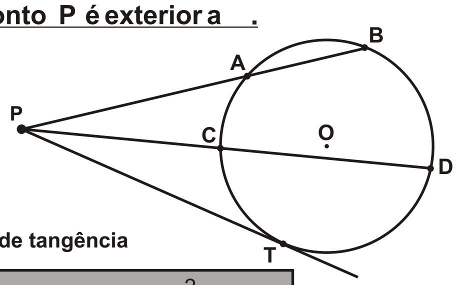
Potência = $\overline{PA} \times \overline{PB}$

1º caso: O ponto P é interior a .



$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD} = \overline{PE} \times \overline{PF} = \overline{PG} \times \overline{PH} = cte$

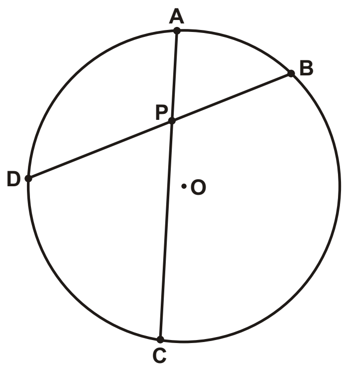
2º caso: O ponto P é exterior a .



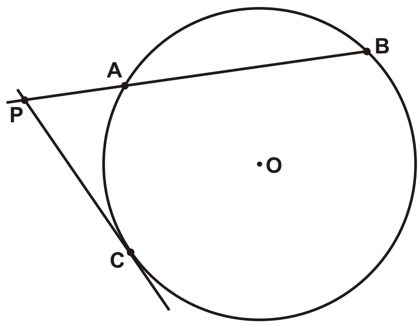
T é ponto de tangência

$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD} = (\overline{PT})^2 = cte$

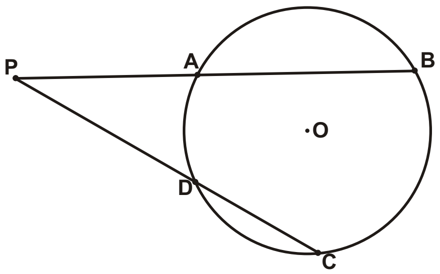
14) Na figura abaixo, os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência . Sabendo que PA = 6, PB = 8 e que PD = 12, determine a medida do segmento PC.



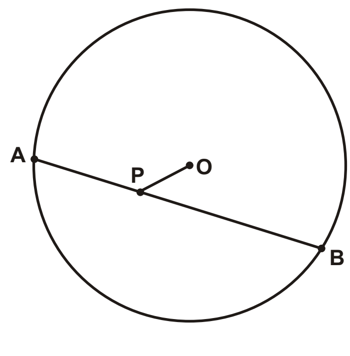
15) Na figura abaixo, os pontos A, B e C pertencem à circunferência . Sabendo que PA = 4, AB = 12, determine a medida do segmento PC.



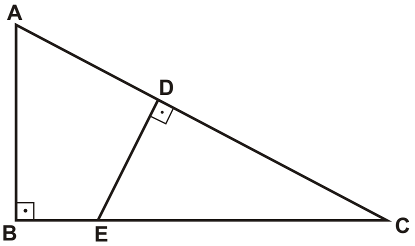
16) Na figura abaixo, os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência . Sabendo que PA = 6, AB = 8 e CD = 5, determine a medida do segmento PD.



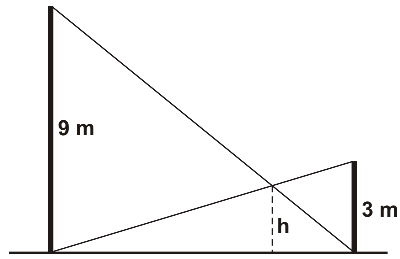
17) Na figura abaixo, os pontos A e B pertencem à circunferência de centro O. Determine a medida do raio da circunferência sabendo que PA = 6, PB = 10 e PO = 4.



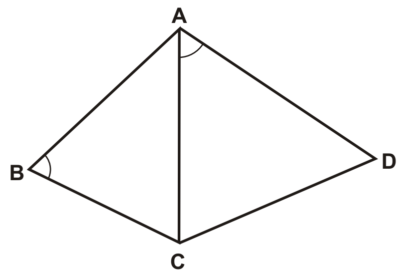
18) Na figura, AB = 5 cm, BC = 12 cm e DE = 3 cm. Determine a medida do segmento EC.



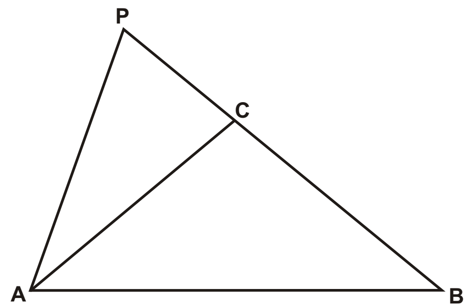
19) (UEL-PR) Após um tremor de terra, dois muros paralelos em uma rua de uma cidade ficaram ligeiramente abalados. Os moradores se reuniram e decidiram escorar os muros utilizando duas barras metálicas, como mostra a figura abaixo. Sabendo que os muros têm alturas de 9 m e 3 m, respectivamente, a que altura do nível do chão as duas barras se interceptam ? Despreze as espessuras das barras.



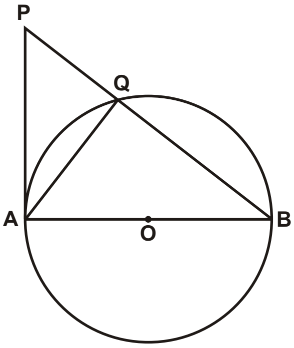
20) Na figura abaixo, os segmentos AB, AC e BC medem, respectivamente, 8 cm, 10 cm e 7 cm e AC é a bissetriz do ângulo BCD. Determine a medida do segmento CD.



21) No triângulo ABC, AB = 8, BC = 7, AC = 6 e o lado BC foi prolongado, como mostra a figura, até o ponto P, formando-se o triângulo PAB, semelhante ao triângulo PCA. Determine o comprimento do segmento PC.

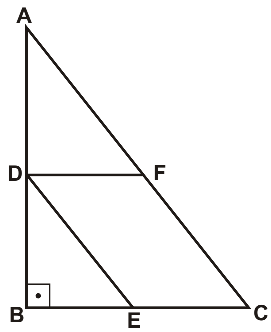


22) (Ibmec) Na figura, AB é o diâmetro da circunferência de raio $\sqrt{10}$ cm e a reta PA é tangente a essa circunferência. Determine a medida do segmento BQ, sabendo que o segmento PQ mede 3 cm.



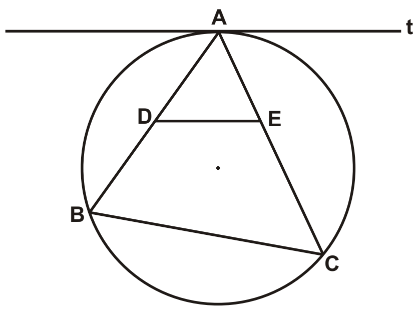
23) (FUVEST-SP) Na figura, o triângulo ABC é retângulo com catetos BC = 3 e AB = 4. Além disso, o ponto D pertence ao cateto AB, o ponto E pertence ao catero BC e o ponto F pertence à hipotenusa AC, de tal forma que DECF seja um paralelogramo. Se DE = 3/2, então a área do paralelogramo DECF vale

a) $\frac{63}{25}$
b) $\frac{12}{5}$
c) $\frac{58}{25}$
d) $\frac{56}{25}$
e) $\frac{11}{5}$



24) (ITA-SP) Na figura, a reta t é tangente à circunferência no ponto A e paralela ao segmento DE. Se AD = 6, AE = 5 e CE = 7, a medida do segmento BD será:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6



25) (ITA-SP) Seja E um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos EA e ED interceptam essa circunferência nos pontos B e A, e, C e D respectivamente. A corda AF da circunferência intercepta o segmento ED no ponto G. Se EB = 5, BA = 7, EC = 4, GD = 3 e AG = 6, então GF vale:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Respostas desta aula.

01) 8

02) 6 cm e (26 / 3) cm

03) (42 / 5) cm e (120 / 7) cm

04) 15 cm e 9 cm

05) (108 / 13) cm

06) (48 / 5) cm

07) (14 / 3) cm

08) 24 / 5

09) 4 cm

10) h(y - x) / x

11) 4 cm

12) $(10 - 2\sqrt{15})$ cm

13) $\sqrt{x \cdot y}$

14) 16

15) 8

16) 7

17) $6\sqrt{2}$

18) (39 / 5) cm

19) (9 / 4) m

20) (100 / 7) cm

21) 9

22) 5 cm

23) a

24) c

25) d

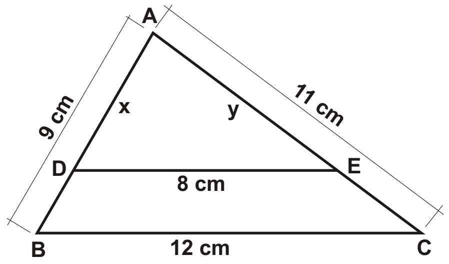
Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

Obrigado.

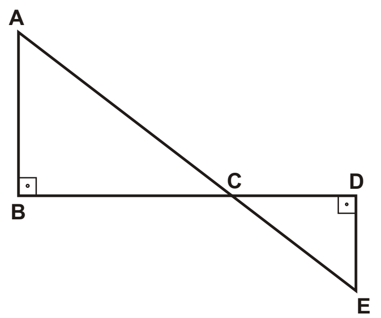
Jeca

Geometria plana
Semelhança de triângulos e Potência de ponto.
Exercícios complementares da aula 08.

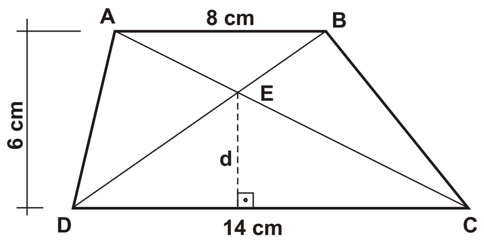
01) Na figura abaixo, o segmento DE é paralelo ao segmento BC. Provar que os triângulos ABC e ADE são semelhantes e calcular as medidas dos segmentos AD e AE.



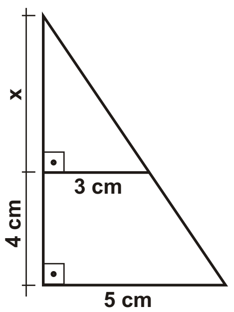
02) Na figura abaixo, AB = 8 cm, DE = 5 cm, BC = 10 cm. Provar que os triângulos ABC e CDE são semelhantes e calcular as medidas dos segmentos AC, CD e CE.



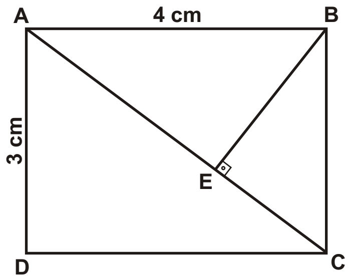
03) Na figura abaixo, o ponto E é o ponto de intersecção das diagonais do trapézio ABCD. Sendo AB = 8 cm, CD = 14 cm e tendo o trapézio 6 cm de altura, provar que os triângulos ABE e CDE são semelhantes e determinar a distância d entre o ponto E e a base maior CD.



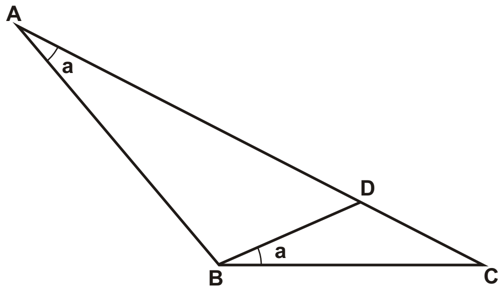
04) Na figura abaixo, determinar o valor de x.



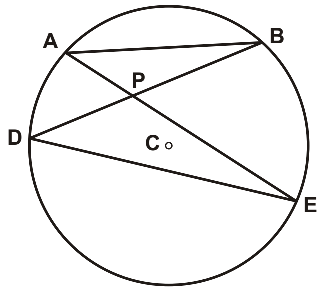
05) Na figura abaixo, ABCD é um retângulo de lados AB = 4 cm e AD = 3 cm. Provar que os triângulos ABC, ABE e BCE são semelhantes e determinar as medidas dos segmentos AE e BE.



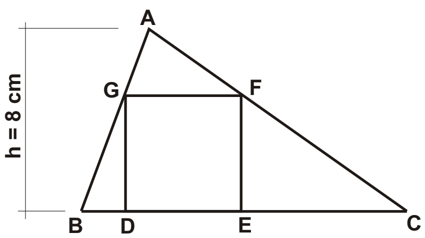
06) Na figura abaixo, AD = 10 cm e CD = 4 cm. Provar que os triângulos ABC e BCD são semelhantes e determinar a medida do segmento BC.



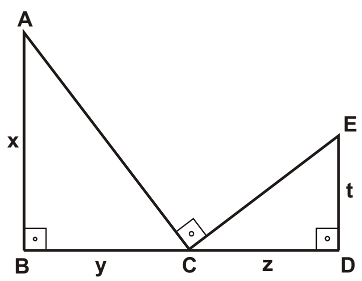
07) Na figura abaixo, os pontos A, B, D e E pertencem à circunferência de centro C. Provar que os triângulos ABP e DEP são semelhantes e que vale a relação $\overline{AP} \times \overline{PE} = \overline{DP} \times \overline{PB}$.



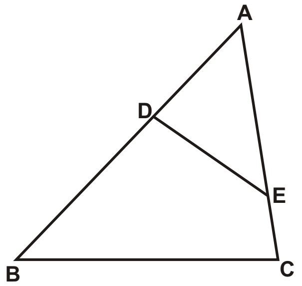
08) Na figura abaixo, ABC é um triângulo de base BC = 16 cm e altura 8 cm. Provar que os triângulos ABC e AGF são semelhantes e determinar a área do quadrado DEFG inscrito no triângulo ABC.



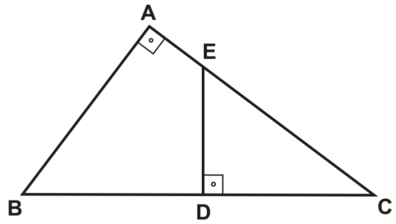
09) Na figura abaixo, provar que os triângulos ABC e CDE são semelhantes e determinar uma expressão que forneça t como função de x , y e z.



10) Na figura abaixo, AB = 12 cm, BC = 8 cm, AC = 9 cm e DE = 5 cm. Sabendo-se que os ângulos ACB e ADE são congruentes, provar que os triângulos ABC e ADE são semelhantes e determinar as medidas dos segmentos AE e CE.

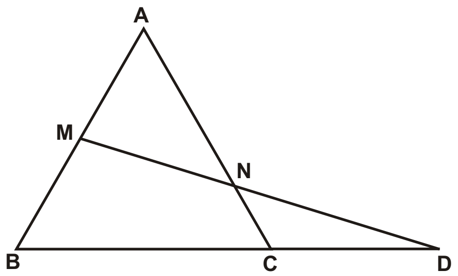


11) Na figura abaixo, ABC é um triângulo retângulo cujos catetos AB e AC medem respectivamente 3 cm e 4 cm. Sendo AE igual a 1 cm, provar que os triângulos ABC e CDE são semelhantes e determinar a medida do segmento DE.

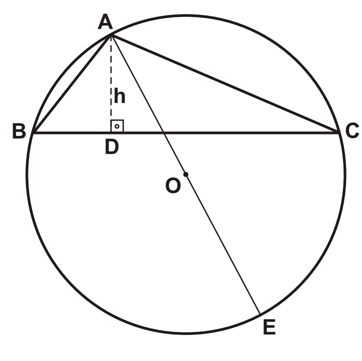


12) Sabendo-se que BE = 5 cm e CF = 4 cm são duas alturas de um triângulo ABC de lado AB = 6 cm, determinar a medida do lado AC desse triângulo.

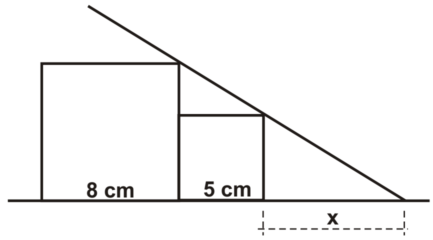
13) O triângulo ABC da figura abaixo é eqüilátero de lado 10 cm e M é o ponto médio do lado AB. Sendo CD = 6 cm, determinar a medida do segmento CN.



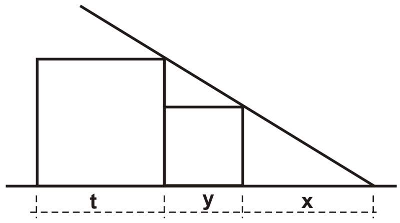
14) Considere a circunferência circunscrita a um triângulo ABC. Seja AE um diâmetro desta circunferência e AD altura do triângulo. Sendo AB = 6 cm, AC = 10 cm e AE = 30 cm, calcule a altura AD.



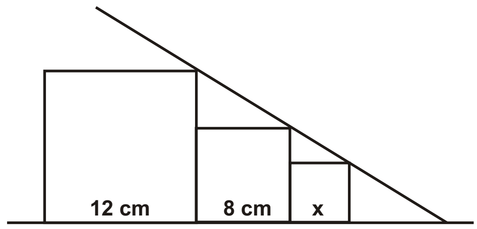
15) Na figura abaixo, determinar o valor de x sabendo-se que os dois quadrados representados têm lados 5 cm e 8 cm.



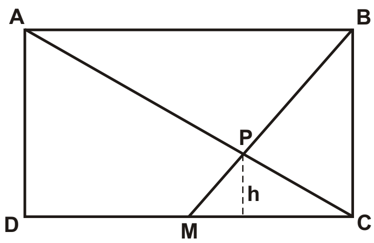
16) Os quadrados representados na figura abaixo têm lados t e y. Determinar a medida de x em função de t e de y.



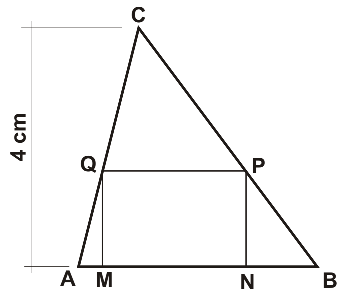
17) Os quadrados representados na figura abaixo têm lados 12 cm, 8 cm e x cm. Determinar a medida do perímetro do menor quadrado.



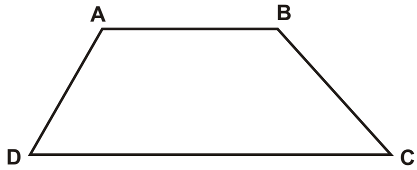
18) Na figura abaixo, ABCD é um retângulo cujo lado BC mede 9 cm. Sendo M o ponto médio do lado CD, provar que os triângulos ABP e MCP são semelhantes e determinar a altura h do triângulo MCP.



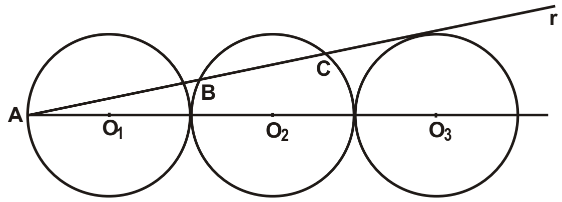
19) No triângulo acutângulo ABC, a base AB mede 4 cm e a altura relativa a essa base também mede 4 cm. MNPQ é um retângulo cujos vértices M e N pertencem ao lado AB, P pertence ao lado BC e Q, ao lado AC. Determinar o perímetro desse retângulo.



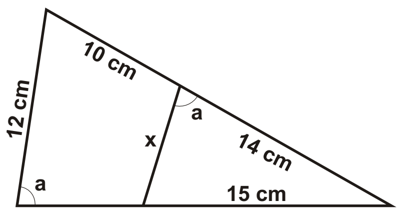
20) O trapézio ABCD abaixo tem base menor AB = 8 cm, base maior CD = 14 cm e altura igual a 6 cm. Sendo P a intersecção dos prolongamentos dos lados não paralelos do trapézio, determine a distância entre o ponto P e a base maior de ABCD.



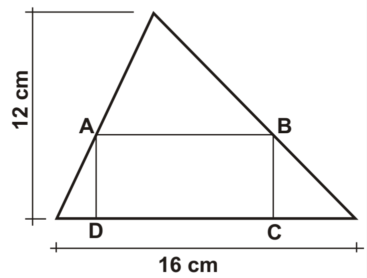
21) Considere as três circunferências da figura, de mesmo raio R, tangentes externamente. Calcular a medida da corda BC em função de R, sabendo que a reta r é tangente à circunferência de centro O_3.



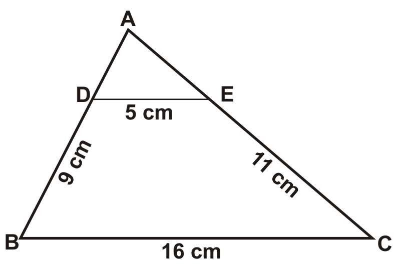
22) Na figura abaixo, determine o valor de x.



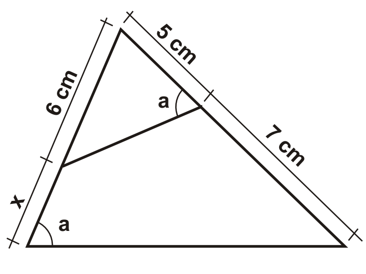
23) Na figura, ABCD é um retângulo tal que a base é o dobro da altura. Determine a medida do perímetro desse retângulo.



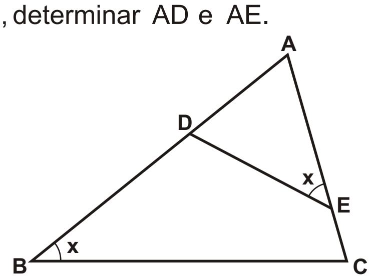
24) No triângulo ABC abaixo, sendo DE // BC, determine as medidas de AD e AE.



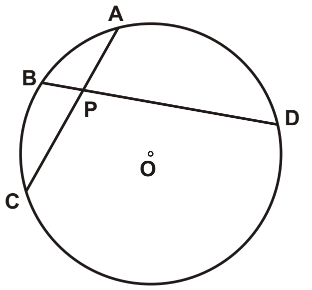
25) Na figura abaixo, determinar o valor de x.



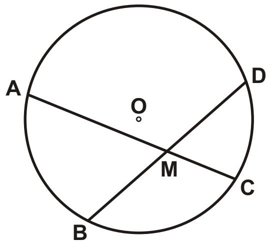
26) Na figura abaixo, sendo AB = 16 cm, AC = 9 cm, BC = 15 cm e DE = 7 cm, determinar AD e AE.



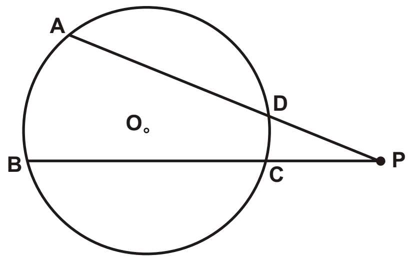
27) Na figura abaixo, os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência de centro O. Sabendo-se que AP = 4 cm, PC = 6 cm e PD = 8 cm, determine a medida do segmento BP e cite a propriedade utilizada na solução do exercício.



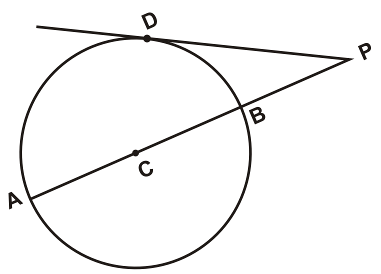
28) Na figura abaixo, os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência de centro O. Sendo M ponto médio do segmento BD, AM = 9 cm e CM = 4 cm, determine a medida do segmento BD e cite a propriedade utilizada na solução do exercício.



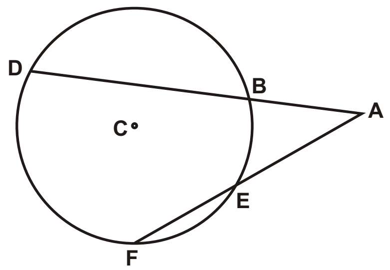
29) Na figura abaixo, os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência de centro O. Sendo PD = 5 cm, AD = 9 cm e BC = 10 cm, determine a medida do segmento PC e cite a propriedade utilizada na solução do exercício.



30) Os pontos A e B pertencem à circunferência de centro C e raio 6 cm. A reta PD é tangente à circunferência no ponto D. Sendo PB = 5 cm, determine a medida de PD e cite a propriedade utilizada na solução do exercício.



31) Os pontos B, D, E e F pertencem à circunferência de centro C. Sendo AB = x, BD = y, AE = z e EF = t, determine t em função de x, y e z.



Respostas desta aula.

01) 6 cm e (22 / 3) cm

02) $2\sqrt{41}$ cm, (25 / 4) cm e $(5\sqrt{41}/4)$ cm

03) (42 / 11) cm

04) 6 cm

05) (16 / 5) cm e (12 / 5) cm

06) $2\sqrt{14}$ cm

07) demonstração - Utilizando ângulos inscritos prova-se que os triângulos são semelhantes.

08) (256 / 9) cm^2

09) y . z / x

10) (15 / 2) cm e (3 / 2) cm

11) (9 / 5) cm

12) (24 / 5) cm

13) (30 / 11) cm

14) 2 cm

15) (25 / 3) cm

16) $y^2 / (t - y)$

17) (16 / 3) cm

18) 3 cm

19) 8 cm

20) 14 cm

21) 8R / 5

22) (15 / 2) cm

23) (144 / 5) cm

24) (45 / 11) cm e 5 cm

25) 4 cm

26) (21 / 5) cm e (112 / 15) cm

27) 3 cm - potência de ponto.

28) 12 cm - potência de ponto.

29) $(\sqrt{95} - 5)$ cm - potência de ponto.

30) $\sqrt{85}$ cm - potência de ponto.

31) $[x(x + y) - z^2] / z$

Importante para mim.

Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

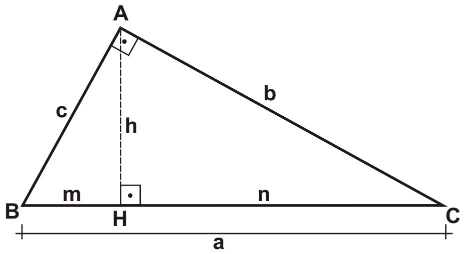
Obrigado.

Jeca

Geometria plana
Aula 09
Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras.

I) Relações métricas no triângulo retângulo.

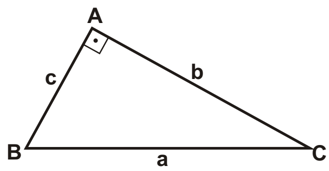
Teorema.
Em todo triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide o triângulo original em dois triângulos menores, que são semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo original.



$c^2 = a \cdot m$ $b^2 = a \cdot n$ $h^2 = m \cdot n$ $a \cdot h = b \cdot c$

II) Teorema de PItágoras.

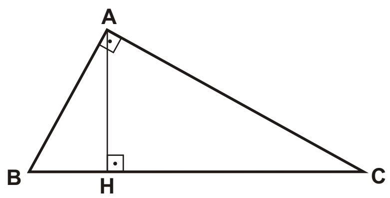
Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.



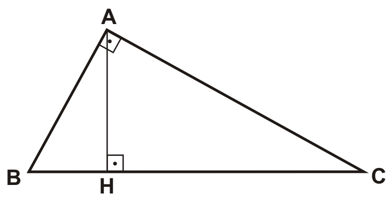
$a^2 = b^2 + c^2$

III) Exercícios.

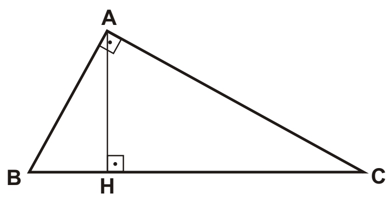
01) Na figura abaixo, sabendo-se que AB = 5 cm e AC = 9 cm, determine as medidas de BC, BH, HC e AH.



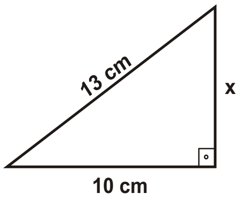
02) Na figura abaixo, sabendo-se que BH = 3 cm e HC = 9 cm, determine as medidas de BC, AC, AB e AH.



03) Na figura abaixo, sabendo-se que AH = 3 cm e AC = 5 cm, determine as medidas de HC, HB, AB e BC.



04) Determine o valor de x no triângulo retângulo abaixo.



05) Qual é o perímetro, em cm, de um losango cujas diagonais medem 12 cm e 6 cm ?

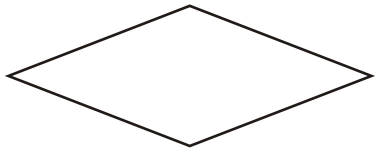
a) $4\sqrt{39}$

b) $4\sqrt{45}$

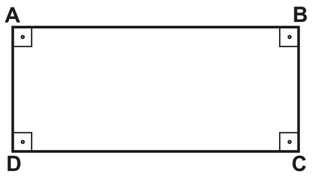
c) $4\sqrt{48}$

d) $4\sqrt{52}$

e) $4\sqrt{56}$



06) No retângulo ABCD abaixo tem-se AB = 15 cm e BC = 8 cm. Sobre o lado AB, marca-se um ponto P tal que PB = 12 cm e sobre o lado CD, marca-se um ponto Q tal que DQ = 7 cm. Qual é, em cm, a distância entre os pontos P e Q ?



a) $\sqrt{83}$

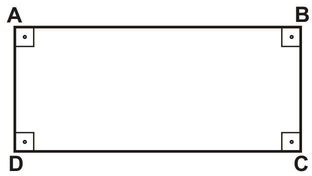
b) $\sqrt{80}$

c) $\sqrt{78}$

d) $\sqrt{76}$

e) $\sqrt{89}$

07) No retângulo ABCD abaixo tem-se AB = 15 cm e BC = 8 cm. Sobre o lado BC, marca-se um ponto P tal que PB = 1 cm e sobre o lado AD, marca-se um ponto Q tal que DQ = 2 cm. Qual é, em cm, a distância entre os pontos P e Q ?



a) $\sqrt{274}$

b) $\sqrt{269}$

c) $\sqrt{224}$

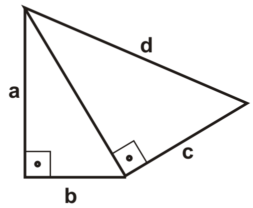
d) $\sqrt{250}$

e) $\sqrt{246}$

08) Qual é o raio de uma circunferência, se uma reta secante que dista 5 cm do centro da mesma, determina nessa circunferência uma corda de comprimento 24 cm ?

a) 8 cm
b) 13 cm
c) 15 cm
d) 17 cm
e) 19 cm

09) Na figura abaixo, medida de **a**, em função de **b**, **c**, e **d**, é :



a) $a = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$

b) $a = \sqrt{b^2 + c^2 - d^2}$

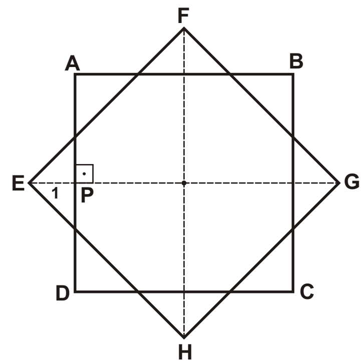
c) $a = \sqrt{b^2 - c^2 - d^2}$

d) $a = \sqrt{d^2 - b^2 - c^2}$

e) $a = \sqrt{d^2 - b^2 + c^2}$

10) (FUVEST-SP) Um triângulo retângulo tem catetos AB = 3 e AC = 4. No cateto AB toma-se um ponto P equidistante do ponto A e da reta BC. Qual é a distância AP ?

11) (FUVEST-SP) Na figura abaixo, o quadrado EFGH tem lado a, e é obtido através de uma rotação de 45º do quadrado ABCD em torno do centro O. Se EP = 1, então a mede:



a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$

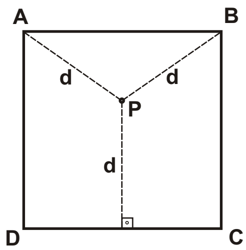
b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

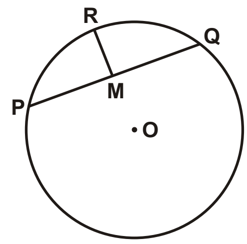
d) 2

e) $\dfrac{2}{\sqrt{2} - 1}$

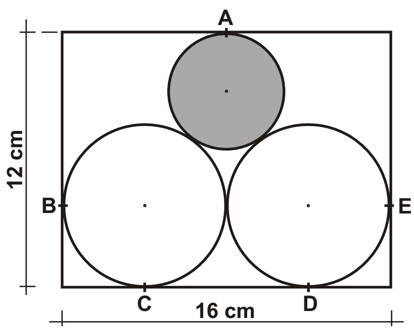
12) Na figura, o quadrado ABCD tem lado 16 cm. Determine a distância d entre P e A sabendo que o ponto P é equidistante de A, de B e da reta CD.



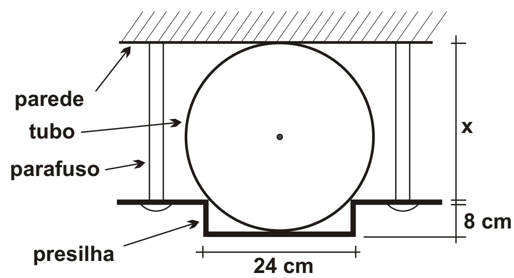
13) (FUVEST-SP) Na figura abaixo, M é o ponto médio da corda PQ da circunferência e PQ = 8. O segmento RM é perpendicular a PQ e RM = $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
Calcule:
a) o raio da circunferência;
b) a medida do ângulo POQ, onde O é o centro da circunferência.



14) A figura abaixo representa um retângulo e três circunferências, sendo duas idênticas maiores e uma menor destacada. Determine o raio da circunferência menor, sabendo que A, B, C, D e E são pontos de tangência.



15) (ESPM-MG) Um tubo de aço foi fixado a uma parede por meio de uma presilha retangular, como mostra a figura abaixo. A distância x, da presilha até a parede, vale:
a) 16 cm
b) 17 cm
c) 18 cm
d) 19 cm
e) 20 cm



16) (FUVEST-SP) Um lenhador empilhou 3 troncos de madeira num caminhão de largura 2,5 m, conforme a figura abaixo. Cada tronco é um cilindro reto, cujo raio da base mede 0,5 m. Logo, a altura h, em metros é:

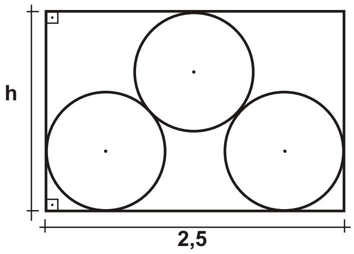
a) $\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$

b) $\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$

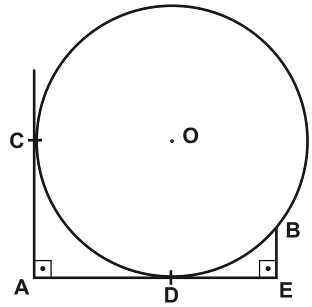
c) $\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$

d) $1+\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

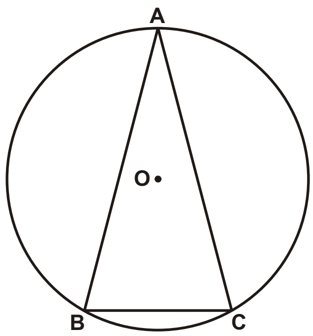
e) $1+\dfrac{\sqrt{7}}{4}$



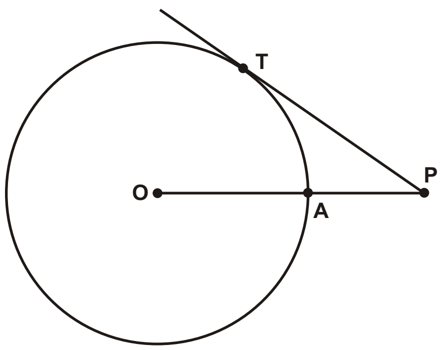
17) Na figura abaixo, determine o raio da circunferência sabendo que AC e AD tangenciam a circunferência nos pontos C e D, respectivamente, e que BE = 2 cm, e AE = 9 cm.



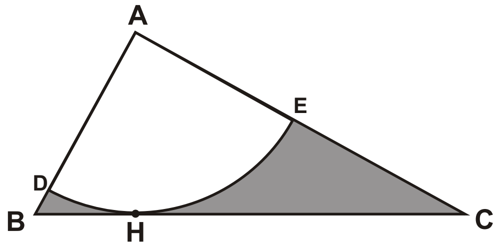
18) Na figura, o triângulo isósceles ABC está inscrito na circunferência de centro O. A base BC mede 6 cm e $AB = 3\sqrt{10}$ cm. Determine o raio da circunferência.



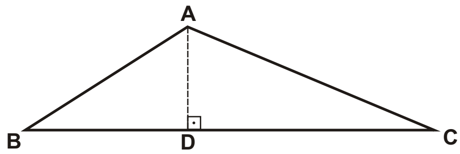
19) Na figura, a reta PT tangencia a circunferência de centro O, os pontos P, A e O estão alinhados e as distâncias PT e PA valem, respectivamente 15 cm e 9 cm. Determine a medida do raio da circunferência.



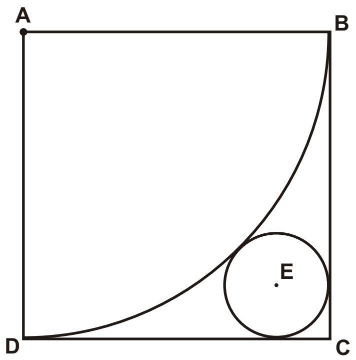
20) O triângulo ABC abaixo é retângulo em A, tem catetos AB = 12 cm, AC = 16 cm. O arco DHE tem centro no vértice A e tangencia a hipotenusa BC no ponto H. Determine a área da região sombreada na figura.



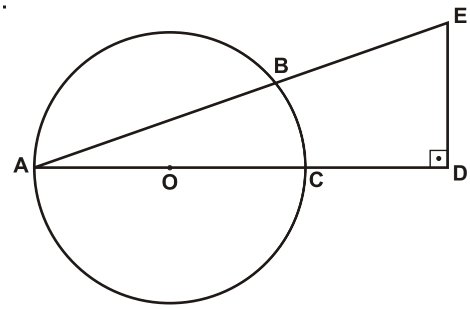
21) O triângulo ABC abaixo tem lados AB, AC e BC que medem, respectivamente, 5 cm, 7 cm e 10 cm. Determine a medida da altura AD do triângulo ABC.



22) A figura abaixo representa um quadrado de lado 16 cm, um arco de circunferência com centro em A e raio AB e uma circunferência de centro em E, que tangencia o arco e os lados do quadrado. Determine a medida do raio da circunferência.



23) Na figura abaixo, os pontos A, B e C pertencem à circunferência de centro O. Os pontos A, O, C e D estão alinhados. Determine a medida do raio da circunferência, sabendo que ED = 9 cm, AB = 8 cm e AE = 15 cm.



Respostas desta aula.

01)
$\sqrt{106}$ cm, $(25\sqrt{106} / 106)$ cm, $(81\sqrt{106} / 106)$ cm e $(45\sqrt{106} / 106)$ cm

02)
12 cm, $6\sqrt{3}$ cm, 6 cm e $3\sqrt{3}$ cm

03)
4 cm, (9 / 4) cm, (15 / 4) cm e (25 / 4) cm

04) $\sqrt{69}$ cm

05) b

06) b

07) d

08) b

09) d

10) 4 / 3

11) e

12) 10 cm

13)
a) $8\sqrt{3} / 3$
b) 120º

14) (8 / 3) cm

15) c

16) e

17) 5 cm

18) 5 cm

19) 8 cm

20) $(108 - (576 \quad / 25))$ cm^2

21) $(2\sqrt{66} / 5)$ cm

22) $16(3 - 2\sqrt{2})$ cm

23) 5 cm

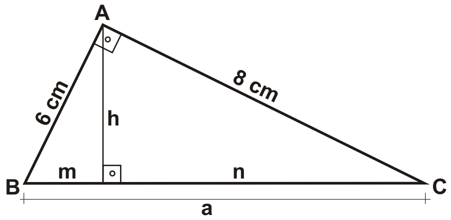
Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

Obrigado.

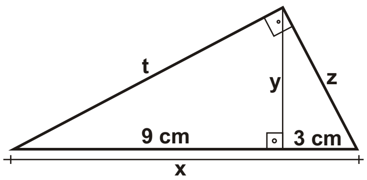
Jeca

Geometria plana
Relações métricas num triângulo retângulo.
Teorema de Pitágoras.
Exercícios complementares da aula 09.

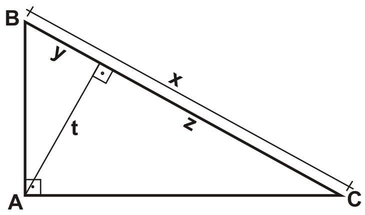
01) No triângulo retângulo ABC abaixo, determine a , m , n e h.



02) No triângulo retângulo abaixo, determine o valor de **x**, **y**, **z** e **t**.

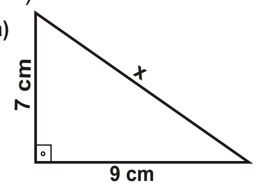


03) Na figura, ABC é um triângulo retângulo em A. Sendo AB = 9 cm e AC = 12 cm, determine **x, y, z e t.**

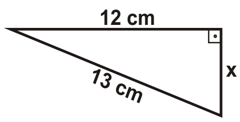


04) Determine o valor de x nos triângulos retângulos abaixo.

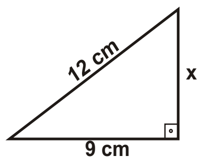
a)



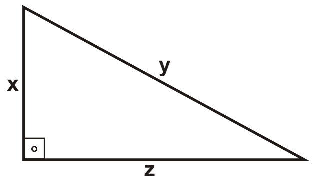
b)



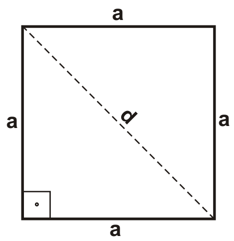
c)



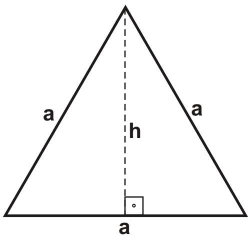
05) No triângulo retângulo abaixo, determinar x em função de y e z.



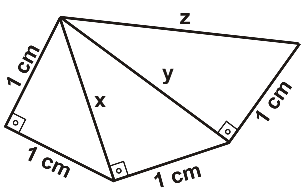
06) Determinar a medida da diagonal de um quadrado de lado a.



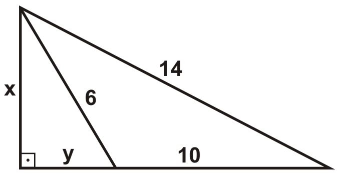
07) Determinar a altura de um triângulo eqüilátero de lado a.



08) Determine x, y e z na figura abaixo.

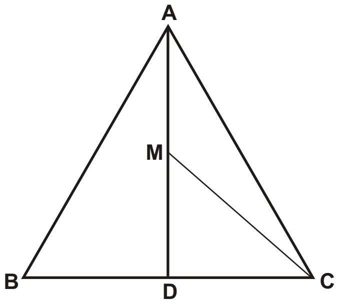


09)(ESAN) Na figura abaixo, determine o valor de x e y.

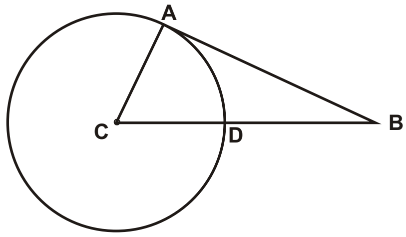


10) (FUVEST-GV) Queremos desenhar no interior de um retângulo ABCD, um losango AICJ com vértice I sobre o lado AB do retângulo e vértice J sobre o lado CD. Se as dimensões dos lados do retângulo são AB = 25 cm e BC = 15 cm, calcule a medida do lado do losango.

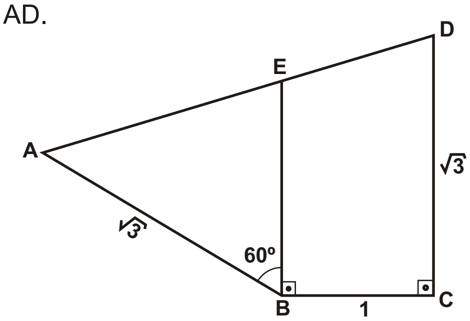
11) (COVEST-PE) Na figura abaixo, o triângulo ABC é eqüilátero e cada um dos seus lados mede 8 cm. Se AD é uma altura do triângulo ABC e M é o ponto médio de AD, calcule a medida de CM em centímetros.



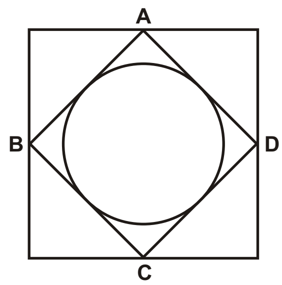
12) Na figura abaixo, o ponto A é o ponto de tangência da reta AB com a circunferência de centro C. Sendo AB e BD iguais a 10 cm e 6 cm, respectivamente, determine a medida do raio da circunferência.



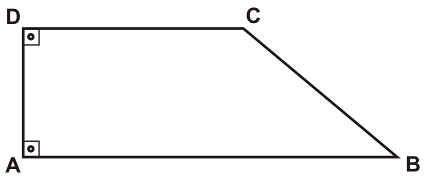
13) (Fuvest) No quadrilátero ABCD da figura abaixo, E é um ponto sobre o lado AD tal que o ângulo ABE mede 60º e os ângulos EBC e BCD são retos. Sabe-se também que AB = CD = $\sqrt{3}$ e BC = 1. Determine a medida de AD.



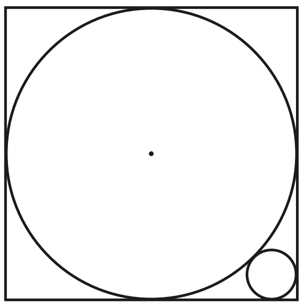
14) (Jeca) Na figura ao lado, A, B, C e D são os pontos médios dos lados de um quadrado de perímetro 4. Determine o raio da circunferência inscrita no quadrado ABCD.



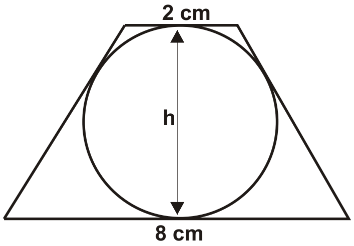
15) No trapézio retângulo ABCD da figura abaixo, determine a medida da diagonal AC sabendo-se que AB = 10 cm, BC = 5 cm e CD = 6 cm.



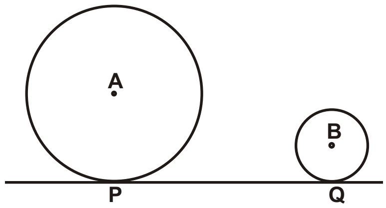
16) A figura abaixo representa um quadrado de lado k e duas circunferências interiores tangentes entre si e tangentes ao quadrado. Determine o raio da circunferência menor em função de k.



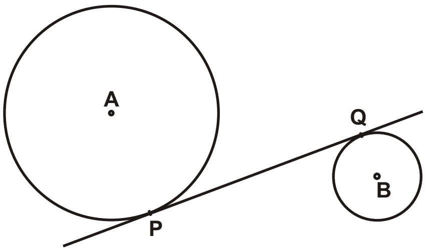
17) As bases de um trapézio isósceles circunscrito a um círculo medem 8 cm e 2 cm. Calcular a altura desse trapézio.



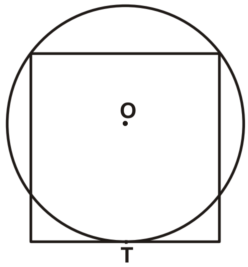
18) Os raios das circunferências de centros A e B medem, respectivamente, 8 cm e 3 cm e a distância entre os centros, 13 cm. Calcule a medida de PQ, sendo P e Q pontos de tangência.



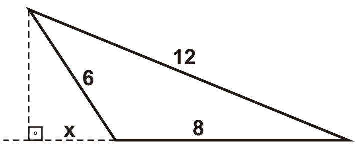
19) Os raios das circunferências de centros A e B medem 5 cm e 2 cm, respectivamente e a distância entre seus centros, 9 cm. Sendo P e Q pontos de tangência, calcule a distância PQ.



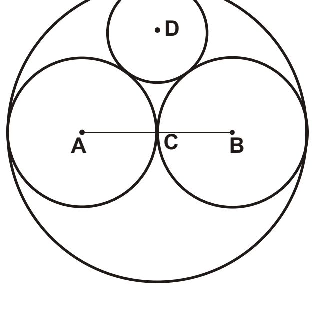
20) Na figura abaixo, o lado do quadrado mede 8 cm. Calcule o raio da circunferência da figura, sendo T ponto de tangência.



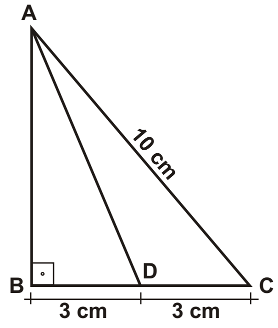
21) Na figura abaixo, determine o valor de x.



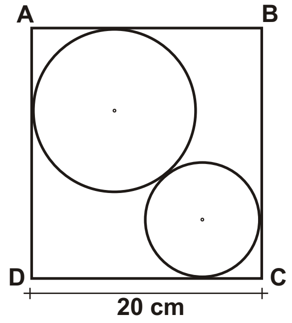
22) Na figura abaixo, as quatro circunferências são tangentes entre si. Sendo C o centro da circunferência maior, A, B e D os centros das demais e AC = BC = 2, determine o raio da circunferência menor.



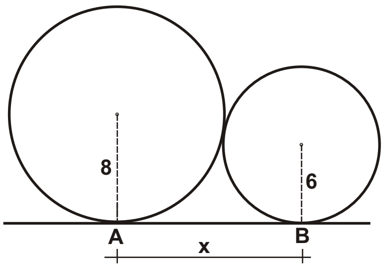
23) Na figura abaixo, determine AB e AD.



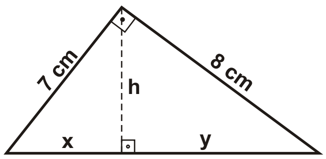
24) (Jeca) Na figura, estão representados dois círculos de raios 5 cm e 8 cm, tangentes entre si e tangentes aos lados do retângulo ABCD. Determine a medida do lado AD do retângulo.



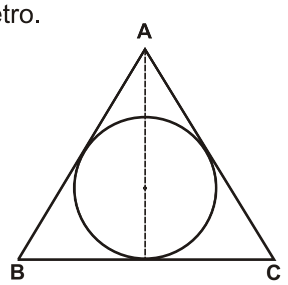
25) Duas circunferências de raios 6 cm e 8 cm são tangentes externamente. Determine a medida de um segmento AB, sendo A e B os pontos de tangência da reta AB com as circunferências.



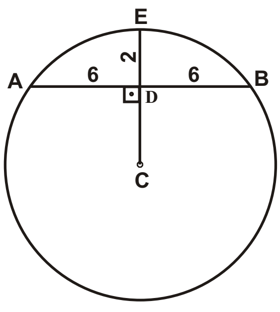
26) Na figura abaixo, determine o valor de x, y e h.



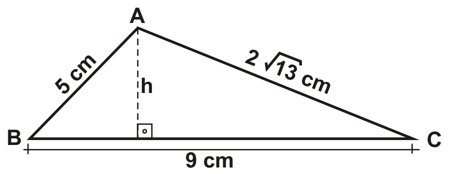
27) Uma circunferência de raio 3 cm é inscrita num triângulo isósceles. Sabendo-se que a altura do triângulo é 8 cm, determinar as medidas dos lados desse triângulo e o seu perímetro.



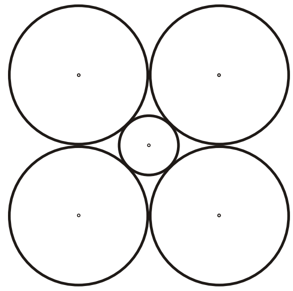
28) Na circunferência de centro C, AD = DB = 6 cm e ED = 2 cm. Determine a medida do segmento CD.



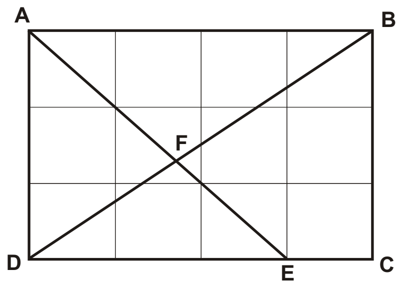
29) No triângulo ABC abaixo, determine a altura h.



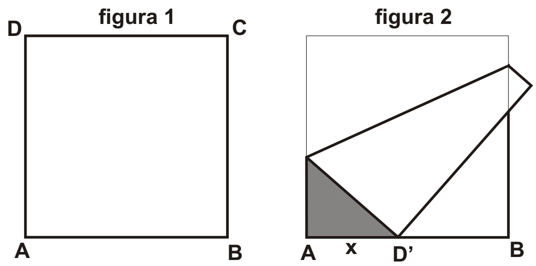
30) A figura abaixo representa 4 circunferências de raio 8 cm, tangentes duas a duas e uma circunferência menor tangente às quatro maiores. Determinar o raio da circunferência menor.



31) O retângulo ABCD da figura abaixo tem lados AB = 40 cm e BC = 30 cm. Sendo CE = 10 cm, determinar a medida do segmento BF.



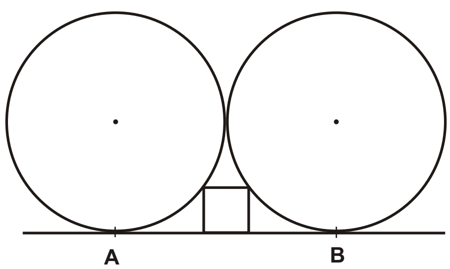
32) (UEL-PR) Tome uma folha de papel em forma de um quadrado de lado igual a 21 cm e nomeie os seus vértices A, B, C, D, conforme figura 1. A seguir, dobre-a de maneira que o vértice D fique sobre o "lado" AB (figura 2). Seja D' esta nova posição do vértice D e x a distância de A a D'.



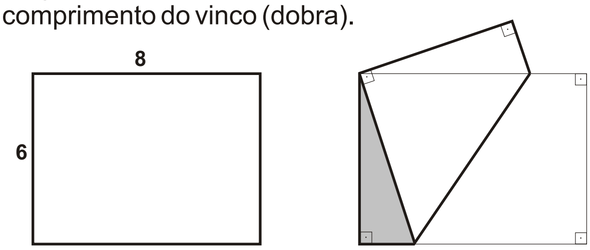
Determine a função que expressa a área do triângulo sombreado em função de x.

(Fazer a resolução em outro espaço)

33) Na figura abaixo, as circunferências têm raio 10 cm, tangenciam a reta AB nos pontos A e B, são tangentes entre si e tangentes ao quadrado que tem base na reta AB. Determine a medida do lado desse



34) (FUVEST) Uma folha retangular de papel com dimensões 6 x 8 é dobrada de modo que dois vértices diagonalmente opostos coincidam. Determine o comprimento do vinco (dobra).



Respostas desta aula.

01) a = 10 m = 3,6 n = 6,4 h = 4,8

02) $x = 12$ $y = 3\sqrt{3}$ $z = 6$ $t = 6\sqrt{3}$

03) $x = 15$ $y = 27/5$ $z = 48/5$ $t = 36/5$

04) a) $x = \sqrt{130}$ b) $x = 5$ c) $x = \sqrt{63}$

05) $x = \sqrt{y^2 - z^2}$

06) $d = a\sqrt{2}$

07) $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

08) $x = \sqrt{2}$ $y = \sqrt{3}$ $z = 2$

09) $x = 3\sqrt{3}$ $y = 3$

10) $x = 17$

11) $CM = 2\sqrt{7}$

12) $r = 16/3$

13) $AD = \sqrt{7}$

14) $r = \sqrt{2}/4$

15) $x = 3\sqrt{5}$

16) $r = \dfrac{k(3 - 2\sqrt{2})}{2}$

17) $h = 4$

18) $d = 12$

19) $d = 4\sqrt{2}$

20) $R = 5$

21) $x = 11/4$

22) $r = 4/3$

23) $AB = 8$ $AD = \sqrt{73}$

24) $AD = (13 + 2\sqrt{30})$

25) $AB = 8\sqrt{3}$

26) $x = 49\sqrt{113}/113$ $y = 64\sqrt{113}/113$

27) $AB = AC = 10$ $BC = 12$

28) $CD = 8$

29) $h = 4$

30) $r = 8(\sqrt{2} - 1)$

31) $BF = 200/7$

32) $A = \dfrac{-x^3 + 441x}{84}$

33) $x = 4$

34) $d = 15/2$

Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

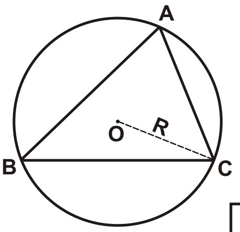
Obrigado.

Jeca

Geometria plana
Aula 10
Relações métricas num triângulo qualquer.

I) Lei dos senos.

Em todo triângulo, a razão entre a medida de um lado e o seno do ângulo oposto é constante e vale o dobro do raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

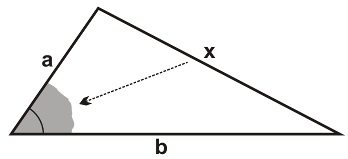


Lei dos senos

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$$

II) Lei dos cossenos.

Em todo triângulo, a medida de qualquer lado depende das medidas dos outros dois lados e do ângulo entre eles.

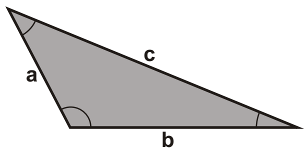


Lei dos cossenos

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos$$

III) Propriedades dos triângulos.

1) Em todo triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo e ao menor lado opõe-se o menor ângulo.



$$a < b < c \implies \quad < \quad <$$

onde a, b e c são as medidas dos lados do triângulo.

2) Condição de existência de um triângulo.

Em todo triângulo, a medida de qualquer lado é menor que a soma e maior que a diferença das medidas dos outros dois lados.

Condição de existência.

$$|b - c| < a < b + c$$

onde a, b e c são as medidas dos lados do triângulo.

3) Natureza de um triângulo.

Quanto à natureza um triângulo pode ser:
a) triângulo retângulo;
b) triângulo obtusângulo;
c) triângulo acutângulo.

Reconhecimento da natureza de um triângulo.

Seja **a** o maior lado de um triângulo de lados **a**, **b** e **c**.

- Se $a^2 = b^2 + c^2 \implies$ triângulo retângulo.
- Se $a^2 > b^2 + c^2 \implies$ triângulo obtusângulo.
- Se $a^2 < b^2 + c^2 \implies$ triângulo acutângulo.

IV) Pré-requisitos de trigonometria. (Poderão ser usados em exercícios mais complexos deste capítulo)

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a . \cos b + \text{sen } b . \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a . \cos b - \text{sen } a . \text{sen } b$

$\text{sen } 2a = 2 . \text{sen } a . \cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$

Exercícios.

01) Dados três segmentos de medidas 12 cm, 8 cm e 15 cm, verificar a possibilidade de se construir um triângulo com esses segmentos. Se for possível, determinar a natureza desse triângulo.

02) Dadas as medidas de três segmentos, verificar se é possível construir um triângulo com esses segmentos e determinar a natureza desse triângulo, se o mesmo existir.

a) 8 cm, 15 cm e 17 cm.

Existência | **Natureza**

b) 8 cm, 15 cm e 16 cm.

Existência | **Natureza**

c) 8 cm, 15 cm e 13 cm.

Existência | **Natureza**

d) 2 cm, 4 cm e 7 cm.

Existência | **Natureza**

e) 5 cm, 8 cm e 13 cm.

Existência | **Natureza**

f) 10 cm, 11 cm e 12 cm.

Existência | **Natureza**

g) 5 cm, 9 cm e 12 cm.

Existência | **Natureza**

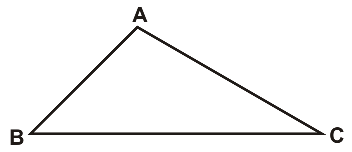
h) 4 cm, 9 cm e 9 cm.

Existência | **Natureza**

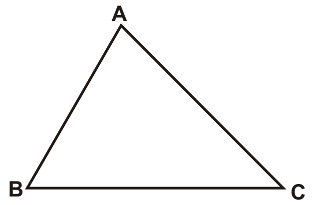
03) Dados os segmentos $a = 7$ cm, $b = 9$ cm e c, determine o intervalo de valores que c pode assumir para que exista o triângulo de lados a, b e c.

04) Dados os segmentos $a = 6$ cm, $b = 9$ cm e c, determine o intervalo de valores que c pode assumir para que o triângulo de lados a, b e c exista e seja um triângulo acutângulo.

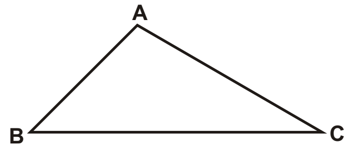
05) No triângulo ABC abaixo os ângulos B e C medem, respectivamente, 45º e 30º. Determine a medida do lado AB, sabendo que a medida de AC é 8 cm.



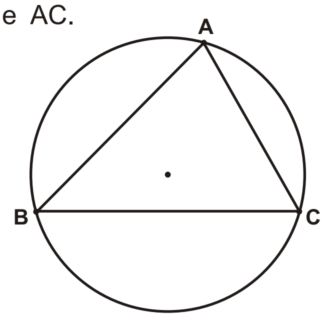
06) No triângulo ABC abaixo os ângulos B e C medem, respectivamente, 60º e 45º. Determine a medida do lado AC, sabendo que a medida de AB é 4 cm.



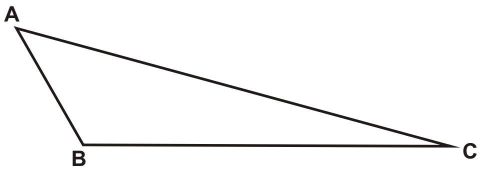
07) No triângulo ABC abaixo os ângulos B e C medem, respectivamente, 45º e 30º. Determine a medida do lado BC, sabendo que a medida de AC é 8 cm.



08) Na figura abaixo, os ângulos A e B medem, respectivamente 75º e 45º. O raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC mede 6 cm. Determine as medidas dos lados AB e AC.



09) Na figura, os ângulos A e C medem, respectivamente, 45º e 15º. Sabendo que BC = 12 cm, determine a medida do lado AC e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.



10) Um triângulo ABC tem lados AB e BC que medem, respectivamente, 5 cm e 7 cm. Determine a medida do lado AC, sabendo que o ângulo B mede 60º.

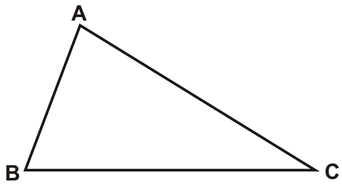
11) Um triângulo ABC tem lados AB e BC que medem, respectivamente, 6 cm e 8 cm. Determine a medida do lado AC, sabendo que o ângulo B mede 120º.

12) Dado um triângulo de lados 5 cm, 7 cm e 8 cm, determine o valor do cosseno do menor ângulo interno desse triângulo.

13) Dado um triângulo de lados 5 cm, 7 cm e 8 cm, determine o valor do cosseno do maior ângulo interno desse triângulo.

14) Dado um triângulo de lados 5 cm, 7 cm e 8 cm, determine o valor do seno do maior ângulo interno desse triângulo.

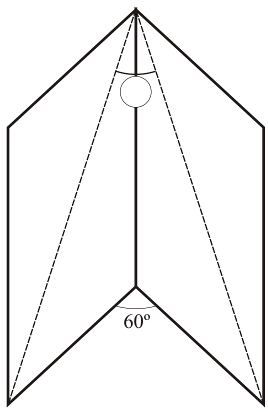
15) Na figura, o triângulo ABC tem lados AB, AC e BC que medem, respectivamente, 5 cm, 10 cm e 9 cm. Determine a medida da mediana relativa ao lado AC.



16) Determine o raio da circunferência circunscrita ao triângulo de lados que medem 4 cm, 5 cm e 6 cm.

17) Utilizando a lei dos cossenos, determine a natureza de um triângulo de lados 10 cm, 12 cm e 16 cm.

18) (Fuvest) As páginas de um livro medem 1 dm de base e $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ dm de altura. O livro é parcialmente aberto, de tal forma que o ângulo entre duas páginas é 60º. Determinar o ângulo formado pelas diagonais das duas páginas.

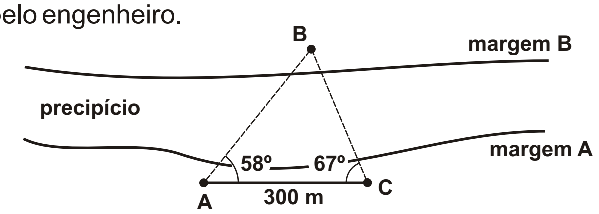


19) Dado um triângulo de lados 4 cm, 5 cm e 6 cm, determine a altura desse triângulo relativa ao maior lado.

20) Em um triângulo acutângulo de lados AB = 5 cm e AC = 7 cm, a projeção ortogonal do lado AC sobre o lado AB mede 1 cm. Determine a medida do lado BC desse triângulo.

21) Um navio, deslocando-se em linha reta, visa um farol e obtém a leitura de 30º para o ângulo formado entre a sua trajetória e a linha de visada do farol. Após navegar 20 milhas, através de uma nova visada ao farol, obtém a leitura de 75º. Determine a distância entre o farol e o navio no instante em que fez a 2ª leitura.

22) Para medir a distância entre dois pontos, A e B, em margens distintas de um precipício, um engenheiro, que estava na mesma margem que o ponto A, adotou um segmento AC = 300 m. Através de um teodolito, obteve os ângulos BAC = 58º e BCA = 67º. Com uma calculadora científica obteve os valores de sen 67º = 0,9205 e sen 55º = 0,8192. Com base nesses valores, determine a distância AB, calculada pelo engenheiro.



Respostas desta aula.

01) existe e é obtusângulo

02)
a) triângulo retângulo
b) triângulo acutângulo
c) triângulo acutângulo
d) não existe o triângulo
e) não existe o triângulo
f) triângulo acutângulo
g) triângulo obtusângulo
h) triângulo acutângulo

03) $S = \{c \in R \mid 2 < c < 16\}$

04) $S = \{c \in R \mid 3 < c < \sqrt{117}\}$

05) $4\sqrt{2}$ cm

06) $2\sqrt{6}$ cm

07) $4(\sqrt{3} + 1)$ cm

08) $3\sqrt{3}$ cm e $3\sqrt{2}$ cm

09) $6\sqrt{6}$ cm e $6\sqrt{2}$ cm

10) $\sqrt{39}$ cm

11) $2\sqrt{37}$ cm

12) 11 / 14

13) 1 / 7

14) $4\sqrt{3}/7$

15) $2\sqrt{7}$ cm

16) $(8\sqrt{7} / 7)$ cm

17) triângulo obtusângulo

18) 30º

19) $(5\sqrt{7}/4)$ cm

20) 8 cm

21) $10\sqrt{2}$ milhas

22) 337 metros

Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

Obrigado.

Jeca

Geometria plana
Relações métricas num triângulo qualquer.
Exercícios complementares da aula 10.

01) Dadas as medidas de três segmentos, verificar se é possível construir um triângulo com esses segmentos e determinar a natureza desse triângulo, se o mesmo existir.

a) 6 cm, 8 cm e 10 cm.

Existência	Natureza

b) 6 cm, 8 cm e 9 cm.

Existência	Natureza

c) 6 cm, 8 cm e 12 cm.

Existência	Natureza

d) 6 cm, 8 cm e 15 cm.

Existência	Natureza

e) 9 cm, 5 cm e 12 cm.

Existência	Natureza

f) 12 cm, 5 cm e 13 cm.

Existência	Natureza

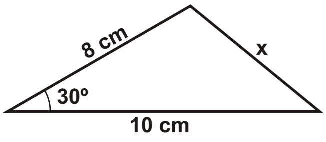
g) 3 cm, 4 cm e 7 cm.

Existência	Natureza

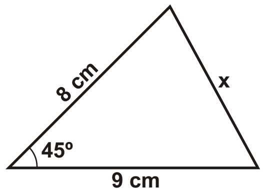
h) 14 cm, 12 cm e 13 cm.

Existência	Natureza

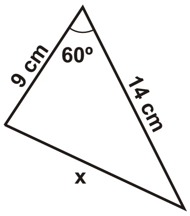
02) Na figura abaixo, encontre o valor de x e cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.



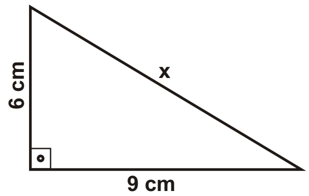
03) Na figura abaixo, encontre o valor de x e cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.



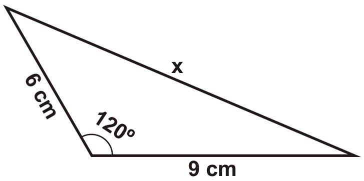
04) Na figura abaixo, encontre o valor de x e cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.



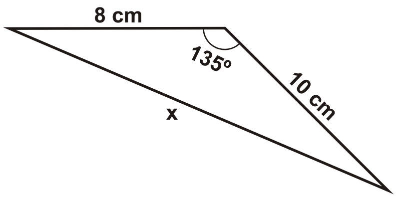
05) Na figura abaixo, encontre o valor de x e cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.



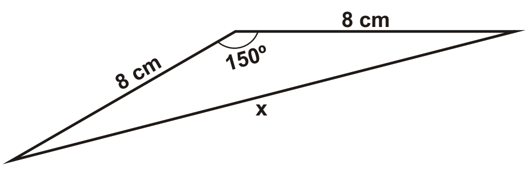
06) Na figura abaixo, encontre o valor de x e cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.



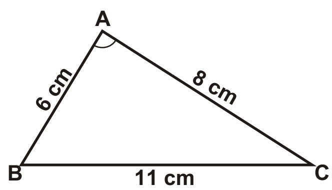
07) Na figura abaixo, encontre o valor de x e cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.



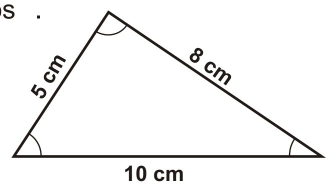
08) Na figura abaixo, encontre o valor de x e cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.



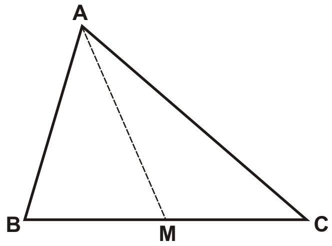
09) No triângulo ABC abaixo, determine o valor de cos



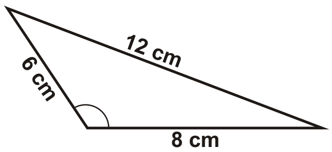
10) No triângulo ABC abaixo, determinar o cos e cos .



11) No triângulo ABC abaixo, sendo AB = 7 cm, BC = 8 cm e AC = 9 cm, determinar a medida da mediana AM, relativa ao lado BC.



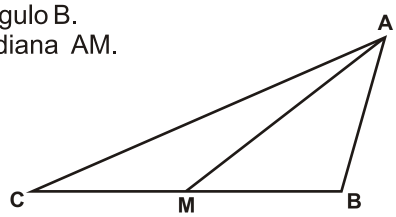
12) No triângulo ABC abaixo, determinar o valor de cos , sen e tg .



13) No triângulo ABC abaixo, o ponto M é medio do segmento BC. Sa bendo que AB = 6 cm, BC = 10 cm e AC = 13 cm, determine :

a) o cosseno do ângulo B.

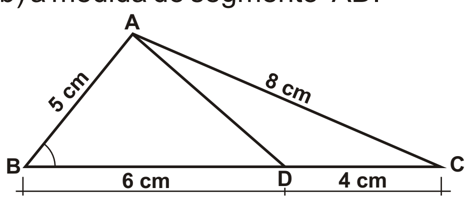
b) a medida da mediana AM.



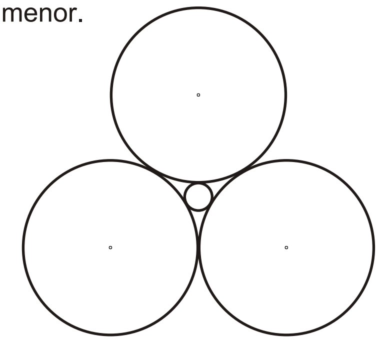
14) Na figura abaixo, determine :

a) o cosseno do ângulo .

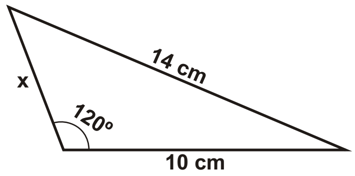
b) a medida do segmento AD.



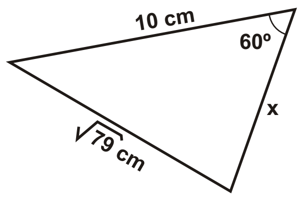
15) (Jeca) Na figura ao lado, as três circunferências maiores têm raio 1 cm, tangenciam-se entre si e tangenciam uma circunferência menor. Determine o raio da circunferência menor.



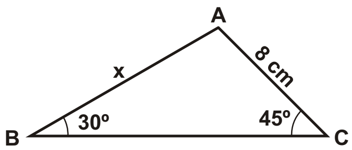
16) Na figura abaixo, encontre o valor de x. Cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.



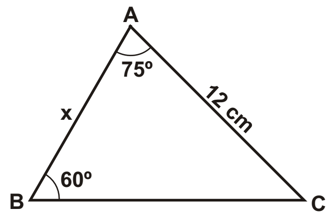
17) Na figura abaixo, encontre o valor de x. Cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.



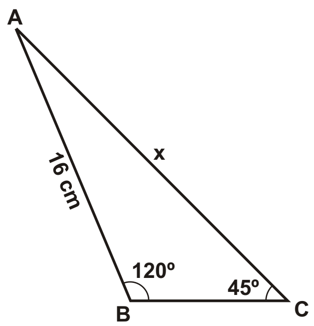
18) No triângulo abaixo, determine o valor de x e cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.



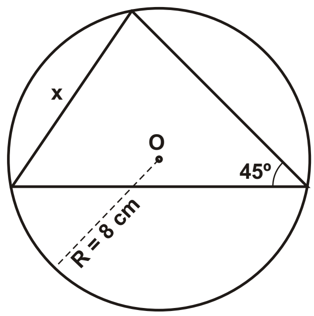
19) No triângulo abaixo, determine o valor de x e cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.



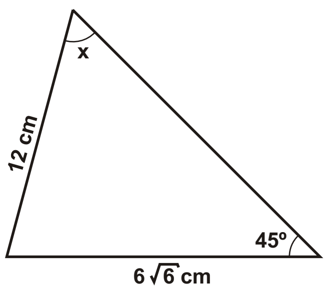
20) No triângulo abaixo, determine o valor de x e cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.



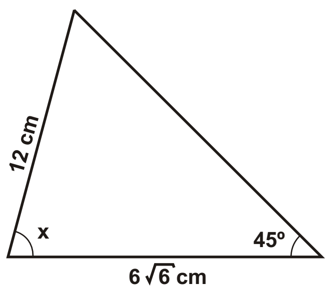
21) No triângulo abaixo, determine o valor de x e cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.



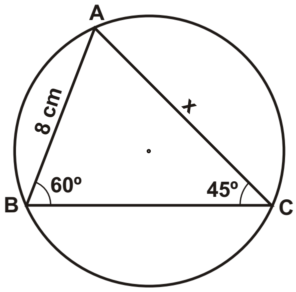
22) No triângulo abaixo, determine o valor de x e cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.



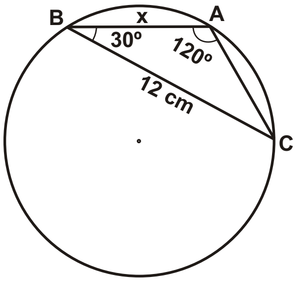
23) No triângulo abaixo, determine o valor de x e cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.



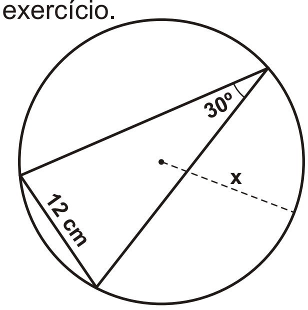
24) Na figura abaixo, determine o valor de x e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.



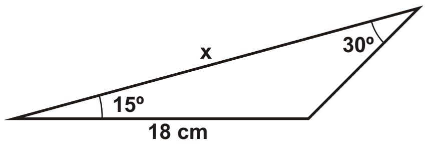
25) Na figura abaixo, determine o valor de x e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.



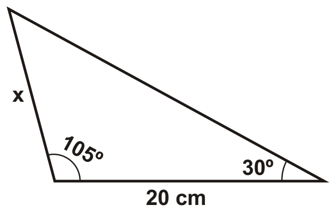
26) No triângulo abaixo, determine o valor de x e cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.



27) No triângulo abaixo, determine o valor de x e cite a propriedade geométrica utilizada na solução do exercício.

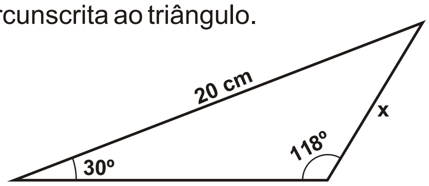


28) Na figura abaixo, determine o valor de x e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

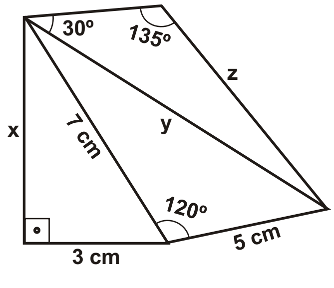


29) Na figura abaixo, determine o valor de x e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

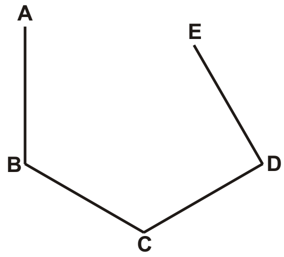
sen 118º = 0,88



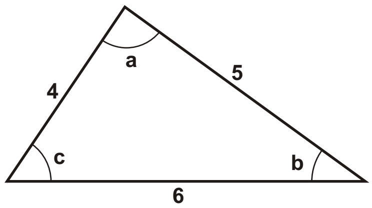
30) Na figura abaixo, determine as medidas de x, y e z.



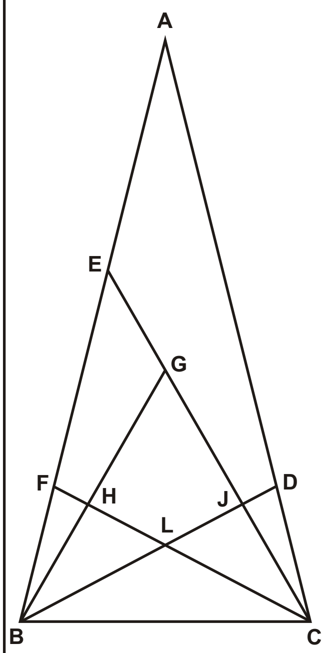
31) (FUVEST-SP) Na figura abaixo,
AB = BC = CD = DE = 2 e ABC = BCD = 2 / 3 e CDE = / 2. Calcule a distância entre os pontos A e E.



32) Dado um triângulo de lados 4, 5 e 6, com ângulos internos a, b e c, prove que a = 2b.



33) (Ibmec- SP) Na figura abaixo, suponha que as medidas dos segmentos BC, BD, CF, BG e CG sejam todas iguais a 2 e que CF e BD sejam, respectivamente, as bissetrizes dos ângulos BCE e CBG.
a) Determine a medida do segmento BE.
b) Calcule sen 75º (Sugestão: 75º = 45º + 30º)
c) Determine a medida do segmento BF.



34) (ITA-SP) No quadrilátero ABCD da figura abaixo, temos BC = CD. Então podemos garantir que:

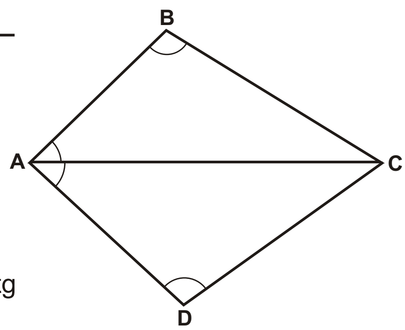
a) $\frac{\text{sen}}{\text{sen}} = \frac{\text{sen}}{\text{sen}}$

b) . = .

c) tg = tg

d) $(BC)^2 = AD \,.\, BD$

e) tg . tg = tg . tg



Respostas desta aula.

01)
a) triângulo retângulo
b) triângulo acutângulo
c) triângulo obtusângulo
d) não existe
e) triângulo obtusângulo
f) triângulo retângulo
g) não existe
h) triângulo acutângulo

2) $2\sqrt{41 - 20\sqrt{3}}$ cm

3) $\sqrt{145 - 72\sqrt{2}}$ cm

4) $\sqrt{151}$ cm

5) $\sqrt{117}$ cm

6) $\sqrt{171}$ cm

7) $2\sqrt{41 + 20\sqrt{2}}$ cm

8) $8\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ cm

9) 7 / 32

10) cos = 61 / 100 cos -11 / 80

11) 7 cm

12) cos = -11 / 24 sen = $\frac{\sqrt{455}}{24}$ tg = $-\frac{\sqrt{455}}{11}$

13)
a) -11 / 40
b) $\frac{\sqrt{310}}{2}$

14)
a) 61 / 100
b) $\frac{\sqrt{610}}{5}$ cm

15) $(2\sqrt{3} - 3 / 3)$ cm

16) 6 cm

17) 3 cm ou 7 cm

18) $8\sqrt{2}$ cm

19) $4\sqrt{6}$ cm

20) $8\sqrt{6}$ cm

21) $8\sqrt{2}$ cm

22) 60º ou 120º

23) 15º ou 105º

24) $4\sqrt{2}$ cm

25) $4\sqrt{3}$ cm

26) 12 cm

27) $18\sqrt{2}$ cm

28) $10\sqrt{2}$ cm

29) 11,36 cm

30) $x = 2\sqrt{10}$ cm $y = \sqrt{109}$ cm $z = \frac{\sqrt{218}}{2}$ cm

31) $2\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$

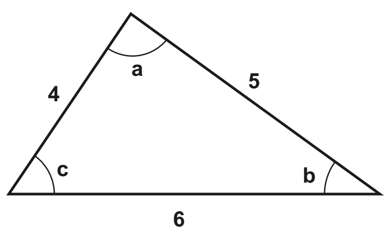
32) demonstração abaixo

33)
a) $\sqrt{6}$
b) $(\sqrt{2} + \sqrt{6}) / 4$
c) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

34) a

32)

Resolução.



Lei dos cossenos $x^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos$

$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, \cos a \Longrightarrow \cos a = \frac{1}{8}$

$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, \cos b \Longrightarrow \cos b = \frac{3}{4}$

$\text{sen}^2\, b + \cos^2 b = 1 \Longrightarrow \text{sen}\, b = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos 2b = \cos^2 b - \text{sen}^2\, b = \frac{9}{16} - \frac{7}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

$\cos a = \cos 2b = \frac{1}{8}$

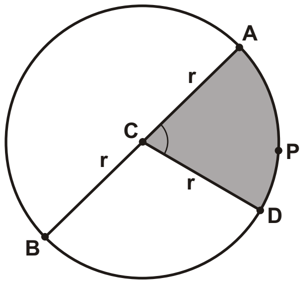
Portanto $a = 2b$

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria plana
Aula 11
Circunferência e círculo.

I) Elementos da circunferência.



C - centro da circunferência
AC = r - raio da circunferência
AB = 2r - diâmetro da circunferência
$A\hat{C}D$ = - ângulo central
$\overset{\frown}{APD}$ - arco da circunferência
AD - corda da circunferência

Dados sobre a circunferência (ou sobre o círculo)

c = 2 r - perímetro ou comprimento da circunferência.

S = r^2 - área do círculo.

360º - abertura, em graus, de uma volta completa na circunferência.

2 rad - abertura, em radianos, de uma volta completa na circunferência.

II) Exercícios.

01) Determinar o perímetro e a área de um círculo de raio 7 m.

02) Determinar o diâmetro e a área de um círculo cujo perímetro mede 36 cm.

03) A roda de um automóvel tem um diâmetro que mede 50 cm. Determine a distância percorrida por esse veículo após uma de suas rodas completar 1750 voltas. Adotar = 3,14 e supor que a roda não deslize durante a rolagem.

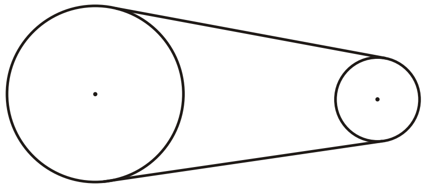
04) Determine quantas voltas por segundo deve dar cada roda de um automóvel na velocidade linear constante de 31,4 m/s, sabendo que o raio de cada roda é 25 cm e que a roda não desliza durante a rolagem. (adotar = 3,14)

05) (UFRJ-RJ) Precorrendo uma distância de 450 m, as rodas de um automóvel dão 250 voltas. Calcule o raio das rodas.

06) (UNIFESP-SP) A figura mostra duas roldanas circulares ligadas por uma correia. A roldana maior, com raio de 12 cm, gira fazendo 100 rotações por minuto, e a função da correia é fazer a roldana menor girar. Admita que a correia não escorregue.

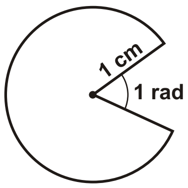
Para que a roldana menor faça 150 rotações por minuto, seu raio, em centímetros, deve ser:

a) 8
b) 7
c) 6
d) 5
e) 4



07) (VUNESP-SP) Em um jogo eletrônico, o "monstro" tem a forma de um setor circular com raio de 1 cm, como mostra a figura.

"monstro"



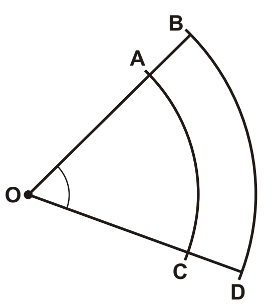
A parte que falta no círculo é a boca do "monstro", e o ângulo de abertura mede 1 radiano. O perímetro do "monstro", em cm, é:

a) - 1
b) + 1
c) 2 - 1
d) 2
e) 2 + 1

08) (UFJF-MG) Testes efetuados em um pneu de corrida constataram que, a partir de 185 600 voltas, ele passa a se deteriorar, podendo causar riscos à segurança do piloto. Sabendo que o diâmetro do pneu é de 0,5 m, ele poderá percorrer, sem riscos para o piloto, aproximadamente:

a) 93 km
b) 196 km
c) 366 km
d) 592 km
e) 291 km

09) (J) A figura abaixo representa um setor circular de centro O e ângulo central . Os arcos AC e BD têm comprimentos 4 e 4,8 , respectivamente. Sendo os segmentos AB e CD congruentes e iguais a 2 cm, determine a medida do segmento OB.



10) (Mack-SP) O ponteiro dos minutos de um relógio mede 4 cm. Supondo = 3, a distância, em centímetros, que a extremidade desse ponteiro percorre em 25 minutos é:

a) 15
b) 12
c) 20
d) 25
e) 10

11) (Fatec-SP) Em um motor há duas polias ligadas por uma correia, de acordo com o esquema abaixo.

Se cada polia tem raio de 10 cm e a distância entre seus centros é de 30 cm, qual das medidas abaixo mais se aproxima do comprimento da correia ?

a) 122,8 cm
b) 102,4 cm
c) 92,8 cm
d) 50 cm
e) 32,4 cm

12) (UFLa-MG) Os raios das rodas traseiras de um trator medem 75 cm e dão 30 voltas, ao mesmo tempo em que as rodas dianteiras dão 90 voltas. O raio de cada uma das rodas dianteiras é:

a) 20 cm
b) 30 cm
c) 25 cm
d) 15 cm
e) 22 cm.

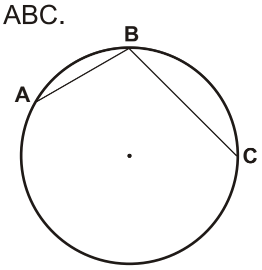
13) (Unisa-SP) Um hexágono regular de lado 3 cm está inscrito numa circunferência. Nessa circunferência, um arco de medida 100º, em centímetros, tem comprimento:

a) 3 /5
b) 5 /6
c)
d) 5 /3
e) 10 /3

14) (UFPI-PI) Numa circunferência na qual está inscrito um quadrado de lado 10 cm, o comprimento, em cm, de um arco dessa circunferência, medindo 120º é:

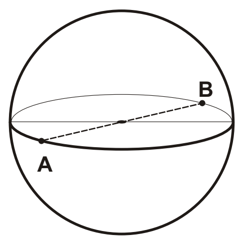
a) $10\sqrt{2}$ /3
b) $\sqrt{5}$ /3
c) $5\sqrt{7}$ /3
d) $10\sqrt{3}$ /2
e) $5\sqrt{2}$ /3

15) (UEG-GO) Na figura abaixo, os segmentos AB e BC correspondem, respectivamente, aos lados de um hexágono regular e de um quadrado, ambos inscritos na circunferência que tem raio 6 cm. Determine o comprimento do arco ABC.

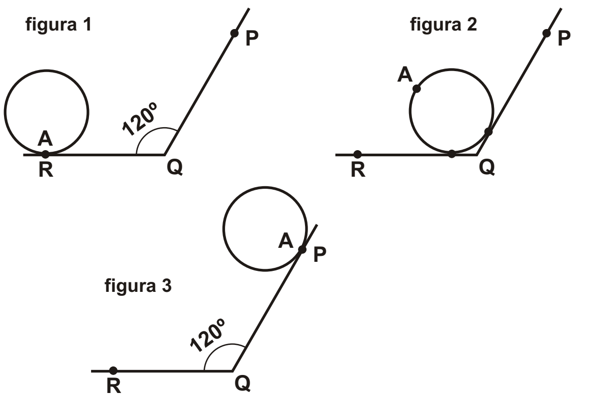


16) (Unifesp-SP) Um inseto vai se deslocar sobre uma superfície esférica de raio 50 cm, desde um ponto A até um ponto B, diametralmente opostos, conforme a figura abaixo. O menor trajeto possível que o inseto pode percorrer tem comprimento, em metros, igual a:

a) /2
b)
c) 3 /2
d) 2
e) 3



17) (UFSCAR-SP) A sequência de figuras mostra um único giro do ponto A, marcado em uma roda circular, quando ela rola, no plano, sobre a rampa formada pelos segmentos RQ e QP.



Além do que indicam as figuras, sabe-se que o raio da roda mede 3 m e que ela gira sobre a rampa sem deslizar em falso. Sendo assim, o comprimento da rampa RQ + QP, em cm, é igual a:

a) $5 \quad + 2\sqrt{3}$

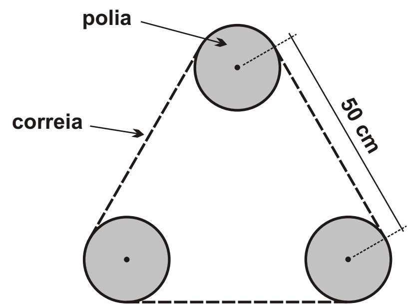
b) $4 \quad + 3\sqrt{5}$

c) $6 \quad + \sqrt{3}$

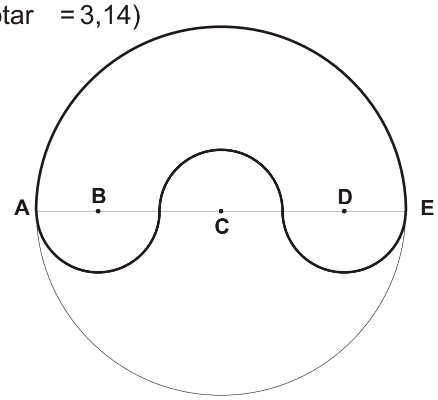
d) $7 \quad - \sqrt{3}$

e) $8 \quad - 3\sqrt{5}$

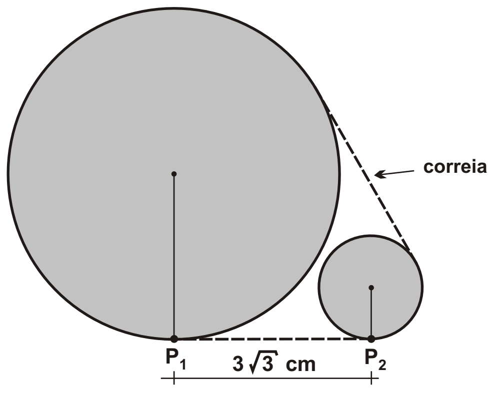
18) (J) Três polias de raio 10 cm têm os seus centros equidistantes 50 cm, como representado na figura abaixo. Adotando = 3, determine o comprimento da correia que envolve as três polias.



19) (J) Uma pista de automobilismo tem comprimento de 1 milha (1640 m) e é composta por uma semicircunferência maior e três semicircunferências menores congruentes. Determinar os raios das semicircunferências sabendo que B, C e D são os centros das semicircunferências e os pontos A, B, C, D e E são colineares. (Adotar = 3,14)



20) (FUVEST-SP) A figura representa duas polias circulares C_1 e C_2 de raios $R_1 = 4$ cm e $R_2 = 1$ cm, apoiadas em uma superfície plana em P_1 e P_2, respectivamente. Uma correia envolve as polias, sem folga. Sabendo-se que a distância entre os pontos P_1 e P_2 é $3\sqrt{3}$ cm, determine o comprimento da correia.



Respostas desta aula.

01) 14 m e 49 m^2

02) 36 cm e 324 cm^2

03) 2747,5 m

04) 20 voltas

05) (0,90 /) m

06) 8 cm

07) e

08) e

09) 12 cm

10) e

11) a

12) c

13) d

14) a

15) 5 cm

16) a

17) a

18) 210 cm

19) 87,05 cm e 261,15 cm

20) 6($\sqrt{3}$ +) cm

Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

Obrigado.

Jeca

01) (UEPB-PB) Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer 502,4 km sobre uma pista circular de raio 200m. Considerando = 3,14, o número de voltas que ele deve dar é:

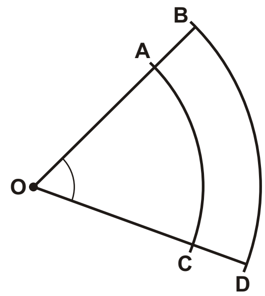
a) 500
b) 350
c) 450
d) 400
e) 300

02) (UCS-RS) A razão entre os comprimentos da Linha do Equador e do diâmetro da Terra é igual à razão entre os comprimentos de uma circunferência qualquer e de seu diâmetro. Essa afirmação é:

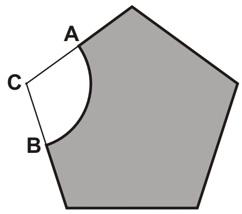
a) verdadeira, e a razão referida vale /2.
b) verdadeira, e a razão referida vale .
c) verdadeira, e a razão referida vale 3 /2.
d) verdadeira, e a razão referida vale 2 .
e) falsa.

03) (UFRJ-RJ) Uma roda de 10 cm de diâmetro gira em linha reta, sem escorregar, sobre uma superfície lisa e horizontal. Determine o menor número de voltas completas para a roda percorrer uma distância maior que 10 m.

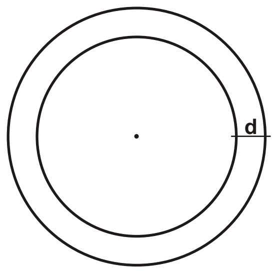
04) (J) A figura abaixo representa um setor circular de centro O e ângulo central . Os arcos AC e BD têm comprimentos 4 e 4,8 , respectivamente. Sendo os segmentos AB e CD congruentes e iguais a 2 cm, determine a medida do ângulo .



05) (J) Na figura abaixo, A e B são os pontos médios de dois lados de um pentágono regular de perímetro 60 m. Sendo C um vértice do pentágono e o centro do setor circular, determine o perímetro da região sombreada. (Adote = 3)

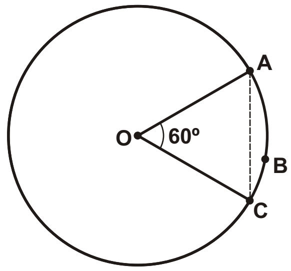


06) (J) Uma pessoa dispõe de uma corda com 46 m de comprimento e pretende fazer duas circunferências concêntricas com ela; uma circunferência menor de raio 10 m e outra maior, conforme a figura abaixo. Determine a distância d entre as circunferências.



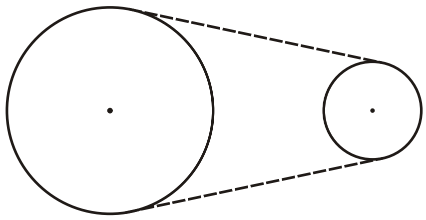
07) (J) Uma mesa circular deve acomodar 8 pessoas, de tal forma que cada pessoa tenha disponível um arco de circunferência de comprimento 60 cm. Adotando = 3, determine o raio da mesa.

08) (J) Na figura abaixo, o arco ABC é 1 cm mais comprido que a corda AC. Determine a medida do raio da circunferência.



09) Uma circunferência tem raio R. Aumentando-se o raio para R + d, determine:
a) o comprimento da circunferência original;
b) o comprimento da circunferência após o raio ter sido aumentado;
c) o aumento do comprimento da segunda circunferência em relação à circunferência original.

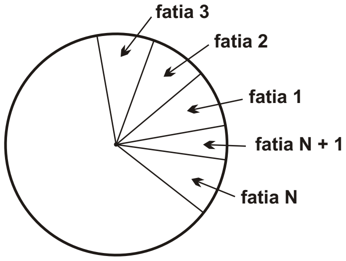
10) (J) A figura abaixo representa duas polias de raios 30 cm e 20 cm. Um motor aclopado à polia maior trabalha com 1750 rotações por minuto. Supondo que a correia que une as polias não escorregue, determine o nº de rotações por minuto da polia menor.



11) Calcule o comprimento de um arco de 2 radianos numa circunferência de raio 40 cm.

12) Calcule o raio de uma circunferência, sabendo que um arco de 3 / 2 radianos mede 50 cm.

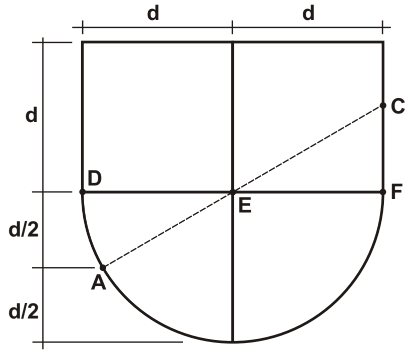
13) (UFSCar-SP) Uma pizza circular será fatiada, a partir do centro, em setores circulares. Se o arco de cada setor medir 0,8 radiano, obtém-se um número máximo de N fatias idênticas, sobrando, no final, uma fatia menor que é indicada na figura por fatia N + 1.



Considerando = 3,14, o arco da fatia N + 1, em radiano, é
a) 0,74
b) 0,72
c) 0,68
d) 0,56
e) 0,34

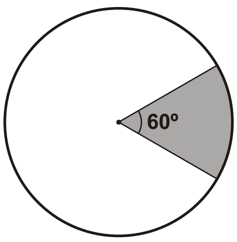
14) (FGV-SP) Na figura estão representados dois quadrados de lado d e dois setores circulares de 90º e raio d. Sabendo que os pontos A, E e C estão alinhados, a soma dos comprimentos do segmento CF e do arco de circunferência AD, em função de d, é igual a

a) $\frac{(2\sqrt{3} + \ )}{6}\,d$
b) $\frac{(3 + \ )}{6}\,d$
c) $\frac{(4\sqrt{3} + \ )}{12}\,d$
d) $\frac{(12 + \ )}{24}\,d$
e) $\frac{(2\sqrt{3} + \ )}{12}\,d$

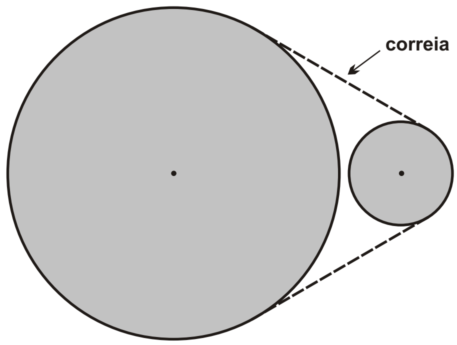


15) (UESB-BA) O setor de 60º destacado na figura abaixo, corresponde à superfície de um canteiro circular plano, no qual pretende-se plantar duas roseiras por metro quadrado. Se o canteiro tem 42 m de diâmetro, quantas roseiras deverão ser plantadas? (Use = 22/7)

a) 22
b) 88
c) 231
d) 462
e) 924



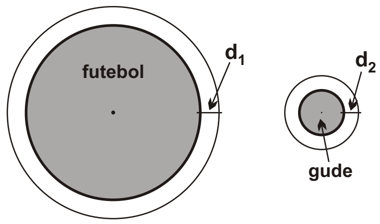
16) (J) A figura abaixo representa duas polias que têm raios 58 cm e 18 cm e a distância entre os seus centros é de 80 cm.
a) Determine o comprimento da correia que envolve as duas polias. (= 3)
b) Determine o nº de voltas da polia menor quando a polia maior dá uma volta.



17) (UFLa-MG) Amarre um barbante, bem ajustado, em volta de uma bola de futebol. Agora amarre um barbante, bem ajustado, em volta de uma bola de gude. Se você aumentar 1 m no comprimento de cada um dos dois barbantes e fizer uma circunferência com cada um deles, haverá uma folga d_1 entre a bola de futebol e o primeiro barbante e uma folga d_2 entre a bola de gude e o segundo barbante.

Assinale a alternativa correta.

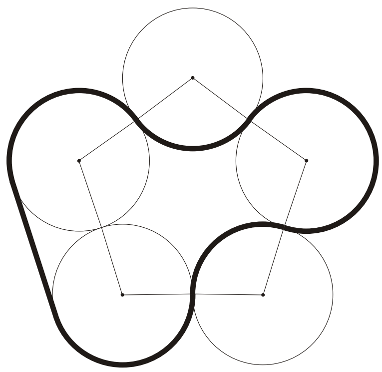
a) $d_1 > d_2$
b) $d_1 < d_2$
c) $d_1 = d_2 + 1$
d) $d_1 = d_2$
e) $(d_2^2 - d_1^2) = 1$



18) (J) Dado um círculo C de área S, determinar qual o aumento necessário no raio desse círculo para se obter um segundo círculo de área 3S.

19) (J) Estudos aerodinâmicos recomendam que a velocidade escalar da ponta de uma hélice de avião seja inferior à velocidade do som no ar (340 m/s). Determine a máxima rotação por minuto que uma hélice de diâmetro 1,70 m pode atingir para obedecer o recomendado pela aerodinâmica. (Adote = 3,14)

20) (J) Uma pista automobilística foi traçada tendo como base um pentágono regular e cinco círculos congruentes, cujos centros estão sobre os vértices do pentágono e se tangenciam. Sabendo que a pista tem 2 milhas de comprimento, determine o raio de cada círculo e o comprimento da única reta dessa pista.
Dados: 1 milha = 1640 m e = 3,14.



Respostas desta aula.

01) d

02) b

03) 16 voltas

04) 72º

05) 58,8 m

06) 3 m

07) 80 cm

08) (3 /   - 3) cm

09)
a) 2 r
b) 2 (r + d)
c) 2 d

10) 2625 rpm

11) 80 cm

12) (100 / 3) cm

13) c

14) a

15) d

16)
a) $(80\sqrt{3} + 268)$ cm
b) 3,22 voltas

17) d)

18) $r(\sqrt{3} - 1)$

19) 3821 rpm

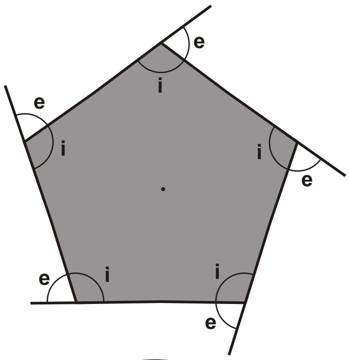
20) 207,38 m e 414,76 m

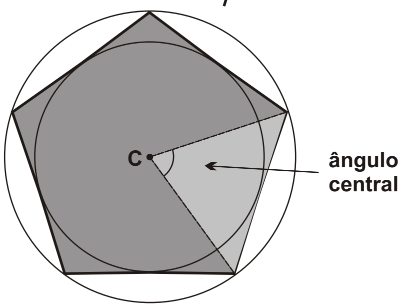
Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.
Obrigado.

Jeca

Geometria plana
Aula 12
Inscrição e circunscrição de polígonos regulares.

I) Polígono regular.





Um polígono é regular se tem:
a) todos os lados congruentes entre si;
b) todos os ângulos internos congruentes entre si;
c) todos os ângulos externos congruentes entre si.

Classificação dos polígonos regulares
3 lados - triângulo equilátero
4 lados - quadrado
5 lados - pentágono regular
6 lados - hexágono regular
etc

Medida de cada ângulo interno de um polígono regular.

$$i = \frac{S_i}{n} \Longrightarrow \boxed{i = \frac{180\,(n - 2)}{n}}$$

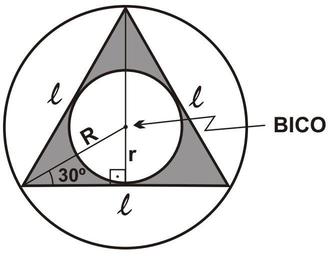
Medida de cada ângulo externo de um polígono regular.

$$e = \frac{S_e}{n} \Longrightarrow \boxed{e = \frac{360}{n}}$$ **(importante)**

Observação - Todo polígono regular pode ser inscrito e circunscrito numa circunferência.

II) Principais polígonos regulares.

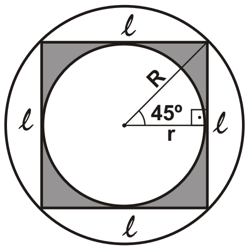
1) Triângulo equilátero.



Em todo triângulo equilátero os quatro pontos notáveis (BICO) coincidem num mesmo ponto.

$\boxed{r = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}}$ $\boxed{R = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}}$

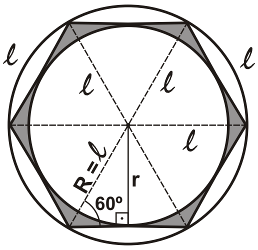
2) Quadrado.



ℓ - **lado do polígono regular**

$\boxed{r = \frac{\ell}{2}}$ $\boxed{R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}}$

3) Hexágono regular.



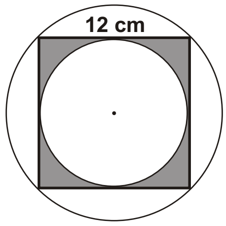
Todo hexágono regular pode ser dividido em seis triângulos equiláteros.

$\boxed{r = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$ $\boxed{R = \ell}$

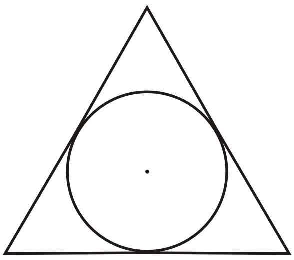
III) Apótema de um polígono regular.

O apótema de um polígono regular é a distância entre o centro do polígono e o ponto médio de qualquer lado. O apótema é o raio da circunferência inscrita no polígono.

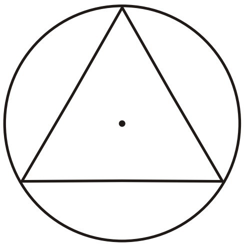
Exercício 01 - Determinar o raio da circunferência inscrita e o raio da circunferência circunscrita em um quadrado de lado 12 cm.



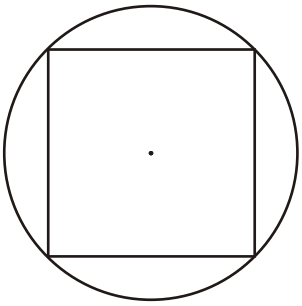
02) Determine o raio da circunferência inscrita num triângulo equilátero de lado 4 cm.



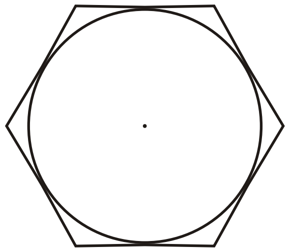
03) Determine o raio da circunferência circunscrita num triângulo equilátero de lado 8 cm.



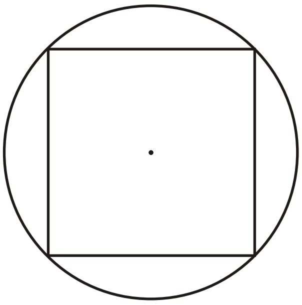
04) Determine o raio da circunferência circunscrita num quadrado de lado 14 cm.



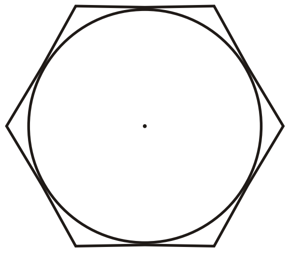
05) Determine o lado de um hexágono regular circunscrito em uma circunferência de raio 3 cm.



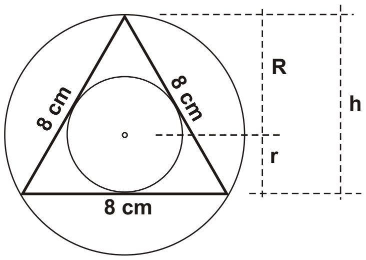
06) Determine o lado de um quadrado inscrito num círculo de raio k.



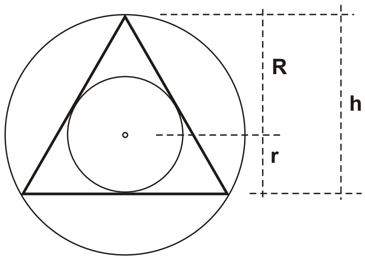
07) Determine o raio de um círculo inscrito num hexágono regular de lado 2k.



08) Sabendo-se que o lado de um triângulo equilátero é 8 cm, determine:
a) a altura do triângulo;
b) o raio da circunferência inscrita no triângulo;
c) o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

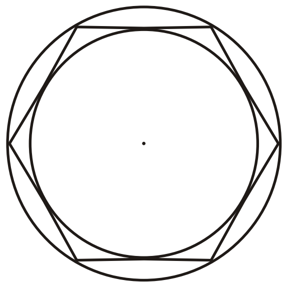


09) Sabendo-se que a altura de um triângulo equilátero é 12 cm, determine:
a) o lado do triângulo;
b) o raio da circunferência inscrita no triângulo;
c) o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

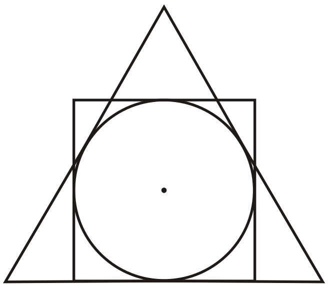


10) Determine a medida do lado de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio 5 cm.

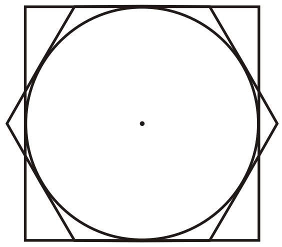
11) Determine o raio da circunferência inscrita num hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 7 cm.



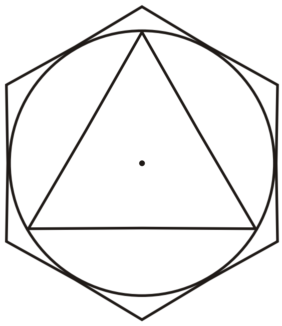
12) Qual é a razão entre o lado de um triângulo equilátero e o lado de um quadrado circunscritos à mesma circunferência ?



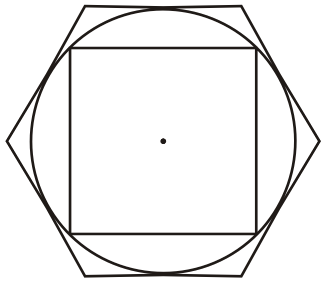
13) Qual é a razão entre o lado de um hexágono regular e o lado de um quadrado circunscritos à mesma circunferência ?



14) Qual é a razão entre o perímetro do hexágono regular circunscrito e o perímetro do triângulo equilátero inscrito numa mesma circunferência ?



15) Qual é a razão entre o lado do hexágono regular circunscrito e o perímetro do quadrado inscrito numa mesma circunferência ?



Respostas desta aula.

01) 6 cm e $6\sqrt{2}$ cm

02) $(2\sqrt{3} / 3)$ cm

03) $(8\sqrt{3} / 3)$ cm

04) $7\sqrt{2}$ cm

05) $2\sqrt{3}$ cm

06) $k\sqrt{2} / 2$

07) $k\sqrt{3}$

08)
a) $4\sqrt{3}$ cm
b) $(4\sqrt{3} / 3)$ cm
c) $(8\sqrt{3} / 3)$ cm

09)
a) $8\sqrt{3}$ cm
b) 4 cm
c) 8 cm

10) $5\sqrt{3}$ cm

11) $(7\sqrt{3} / 2)$ cm

12) $\sqrt{3}$

13) $\sqrt{3} / 3$

14) 4 / 3

15) $\sqrt{6} / 12$

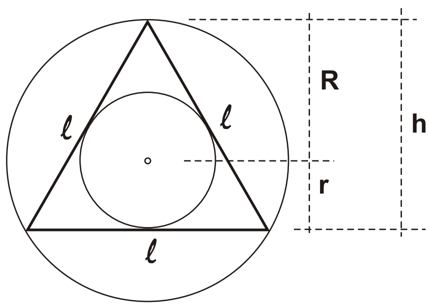
Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

Obrigado.

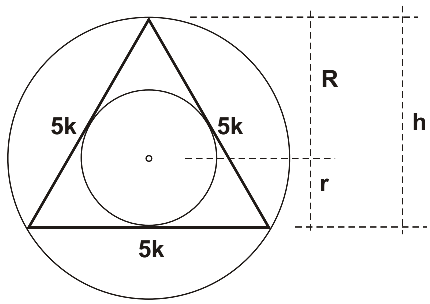
Jeca

Geometria plana
Inscrição e circunscrição de polígonos regulares.
Exercícios complementares da aula 12.

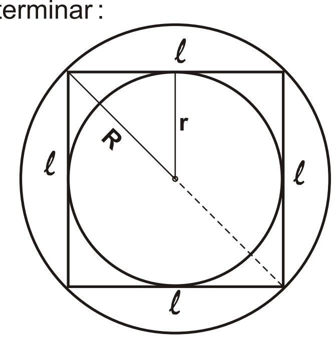
1) Sabendo-se que a altura de um triângulo equilátero é 3 cm, determinar :
a) o raio da circunferência inscrita no triângulo.
b) o apótema do triângulo.
c) o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.
d) o lado do triângulo.



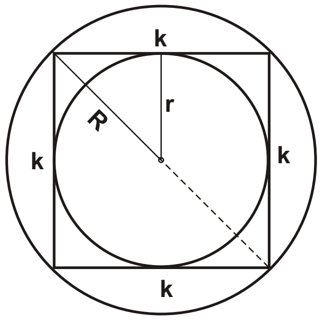
2) Sabendo-se que o lado de um triângulo equilátero é 5k, determinar em função de k :
a) a altura do triângulo.
b) o raio da circunferência inscrita e o apótema.
c) o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.



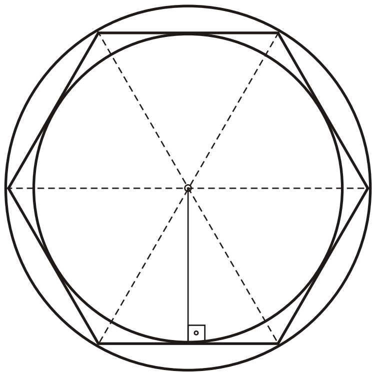
3) Sabendo-se que o raio da circunferência circunscrita a um quadrado é 8 cm, determinar :
a) o apótema e o raio da inscrita.
b) o lado do quadrado.
c) o perímetro do quadrado.



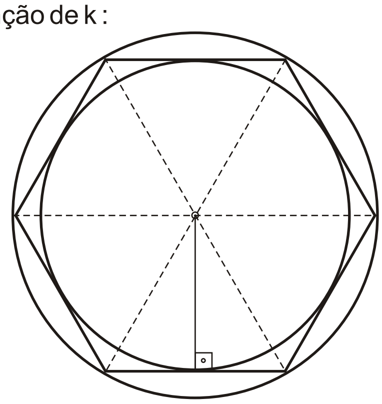
4) Sabendo-se que um quadrado tem lado k, determinar em função de k :
a) o perímetro do quadrado.
b) o apótema e o raio da circunferência inscrita no triângulo.
c) a diagonal do quadrado e o raio da circunscrita.



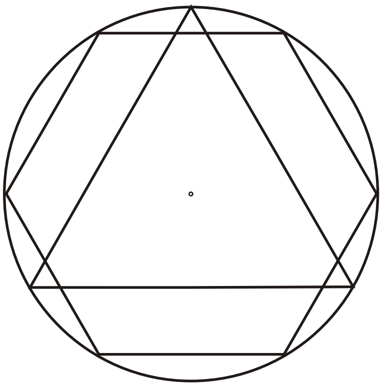
5) Sabendo-se que um hexágono regular tem lado 7 cm, determinar :
a) o raio da circunferência circunscrita ao hexágono.
b) o apótema e o raio da circunferência inscrita no hexágono.
c) o perímetro do hexágono.



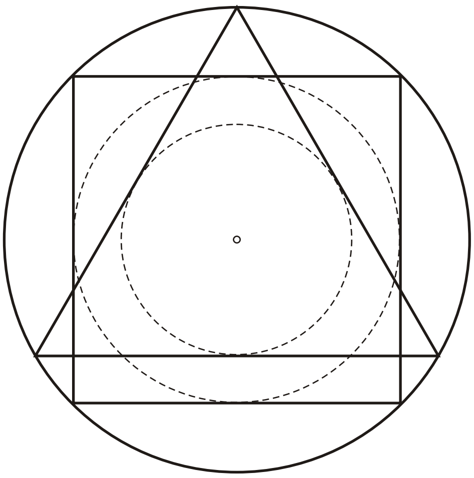
6) Sabendo-se que o apótema de um hexágono regular é 3k, determinar em função de k :
a) o raio da circunferência inscrita no hexágono.
b) o raio da circunferência circunscrita no hexágono.
c) o lado e o perímetro do hexágono.



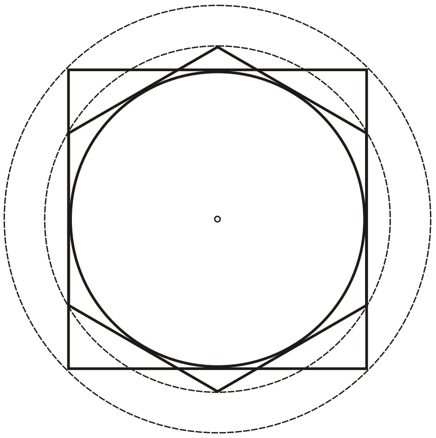
7) Determinar a razão entre o perímetro de um triângulo equilátero e o perímetro de um hexágono regular inscritos numa mesma circunferência.



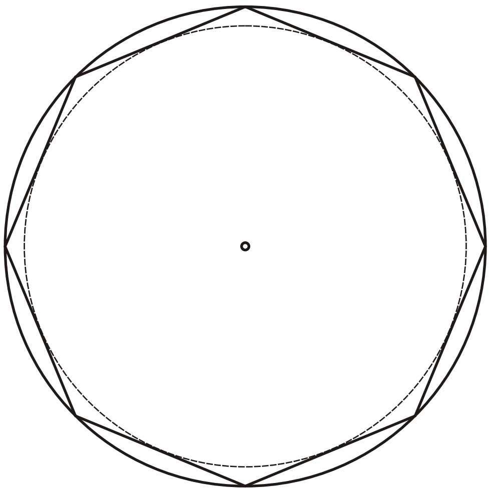
8) Na figura abaixo, o quadrado e o triângulo equilátero estão inscritos numa mesma circunferência. Determinar a razão entre o raio da circunferência inscrita no quadrado e o raio da circunferência inscrita no triângulo.



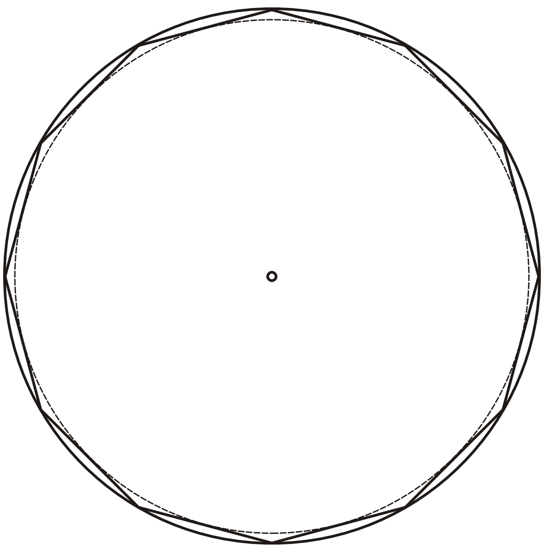
9) Um quadrado e um hexágono regular são circunscritos a uma mesma circunferência. Determinar a razão entre o raio da circunferência circunscrita ao hexágono e o raio da circunferência circunscrita ao quadrado.



10) Um octógono regular está inscrito numa circunferência de raio 12 cm. Determinar :
a) o lado e o perímetro desse octógono.
b) o raio da circunferência inscrita nesse octógono.



11) Um dodecágono regular está inscrito numa circunferência de raio 7 cm. Determinar :
a) o lado e o perímetro desse dodecágono.
b) o raio da circunferência inscrita nesse dodecágono.



Respostas desta aula.

01)
a) 1 cm
b) 1 cm
c) 2 cm
d) $2\sqrt{3}$ cm

02)
a) $5k\sqrt{3}/2$
b) $5k\sqrt{3}/6$
c) $5k\sqrt{3}/3$

03)
a) $4\sqrt{2}$ cm
b) $8\sqrt{2}$ cm
c) $32\sqrt{2}$ cm

04)
a) 4k
b) $k/2$
c) $k\sqrt{2}$
d) $k\sqrt{2}/2$

05)
a) 7 cm
b) $(7\sqrt{3}/2)$ cm
c) 42 cm

06)
a) 3k
b) $2k\sqrt{3}$
c) $2k\sqrt{3}$
d) $12k\sqrt{3}$

07) $\sqrt{3}/2$

08) $\sqrt{2}$

09) $\sqrt{6}/2$

10)
a) $12\sqrt{2-\sqrt{2}}$ cm e $96\sqrt{2-\sqrt{2}}$ cm

b) $6\sqrt{2+\sqrt{2}}$ cm

11)
a) $7\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm e $84\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm

b) $(7\sqrt{2+\sqrt{3}}/2)$ cm

Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.
Obrigado.

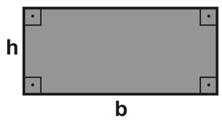
Jeca

Geometria plana
Aula 13
Áreas das figuras planas.

I) Áreas das figuras planas.
Área é a medida de superfície.

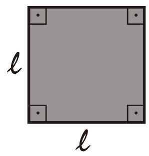
II) Áreas das figuras poligonais.

1) Área do retângulo.



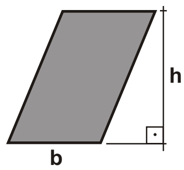
S = b . h

2) Área do quadrado.



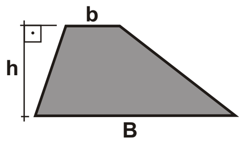
$S = \ell^2$

3) Área do paralelogramo.



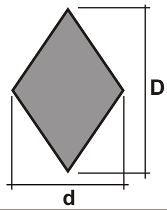
S = b . h

4) Área do trapézio.



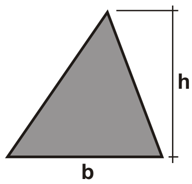
$S = \left(\frac{b + B}{2}\right) \cdot h$

5) Área do losango.



$S = \frac{d \cdot D}{2}$

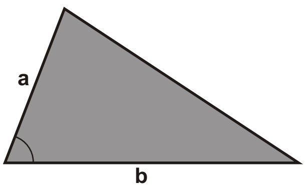
6) Área do triângulo.



$S = \frac{b \cdot h}{2}$

III) Outras fórmulas para o cálculo da área de um triângulo.

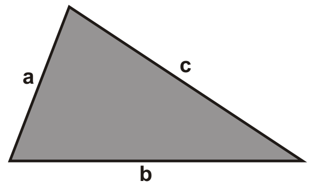
1) Em função de dois lados e do ângulo entre eles.



(Importantíssima)

$S = \frac{1}{2}\ a \cdot b \cdot \text{sen}$

2) Em função dos 3 lados (Fórmula de Hierão)

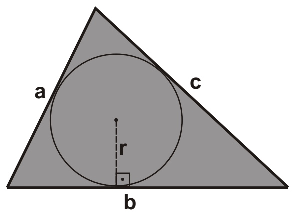


p - semiperímetro

$p = \frac{a + b + c}{2}$

$S = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)}$

3) Em função do raio da circunferência inscrita.

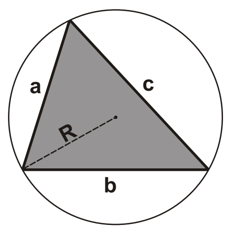


p - semiperímetro

$p = \frac{a + b + c}{2}$

S = p . r

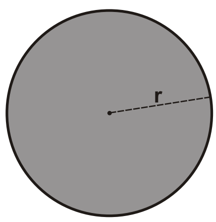
4) Em função do raio da circunferência circunscrita.



$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

IV) Áreas das figuras circulares.

1) Área do círculo.



r - raio do círculo.

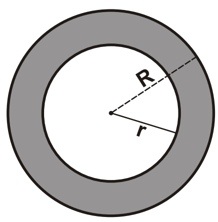
Área do círculo

$S = \ r^2$

Perímetro do círculo

$c = 2\ \ r$

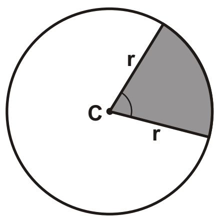
1) Área da coroa circular.



R - raio do círculo maior
r - raio do círculo menor

$S = \ R^2 - \ r^2$

3) Área do setor circular.



r - raio do círculo.

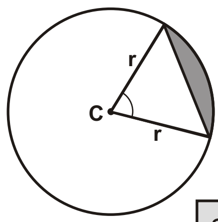
Regra de três

360^{o} —— r^2

—— S_{setor}

$$S_{setor} = \frac{\quad}{360} \cdot r^2$$

4) Área do segmento circular.



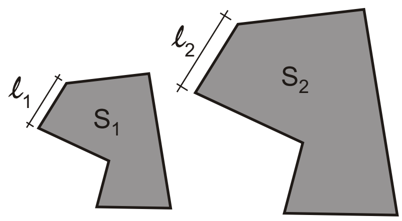
Lembrar que a área do triângulo é dada por

$$S_{triângulo} = \frac{1}{2}\ a\,.\,b\,.\,\text{sen}$$

$$S_{segmento\ circular} = S_{setor} - S_{triângulo}$$

V) Áreas das figura semelhantes.

Duas figuras planas são ditas semelhantes se uma delas é a redução ou a ampliação da outra.

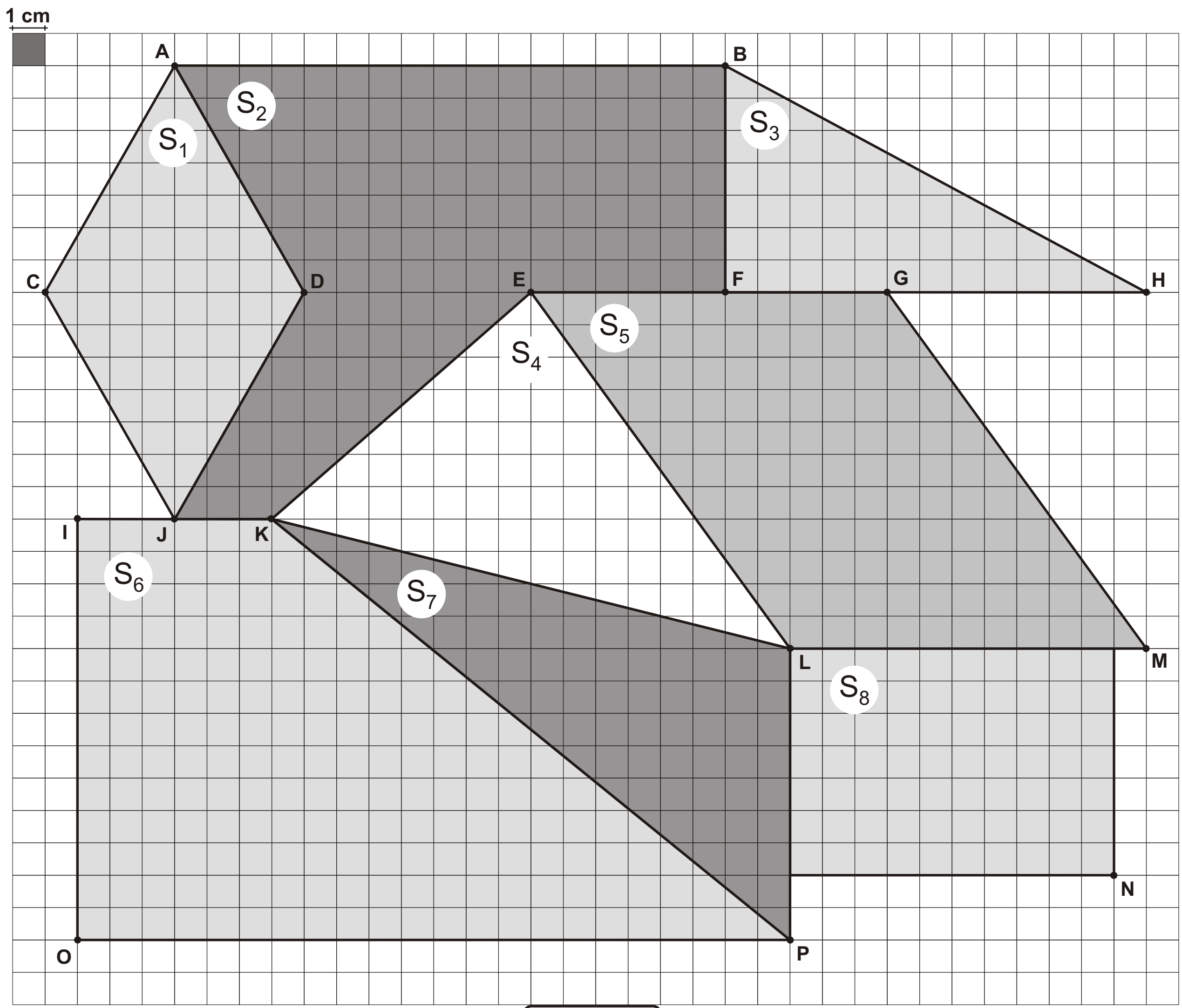


Se duas figuras planas são semelhantes, então vale a relação:

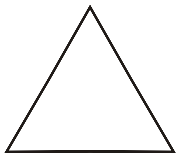
$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2$$

ℓ - comprimento
S - área

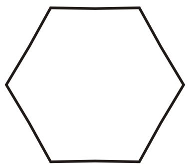
Exercício 01 - A figura abaixo é um quadriculado onde cada quadradinho tem lado 1 cm. Todos os pontos, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O e P estão exatamente sobre os cruzamentos das linhas que compõem o quadriculado. Com base no desenho e nestas informações, calcule a área de cada polígono (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7 e S_8). Faça os cálculos dentro do próprio desenho.



02) Determinar a área de um triângulo equilátero de lado 16 cm.



03) Determinar a área de um hexágono regular de lado 4 cm.



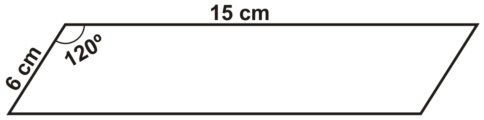
04) Determinar a área de um dodecágono regular inscrito numa circunferência de raio 8 cm.

05) Determinar a área de um triângulo de lados 5 cm, 6 cm e 7 cm.

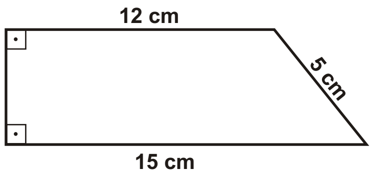
06) Dado um triângulo de lados 5 cm, 6 cm e 7 cm, determinar o raio da circunferência inscrita no triângulo e a altura relativa ao lado que mede 6 cm.

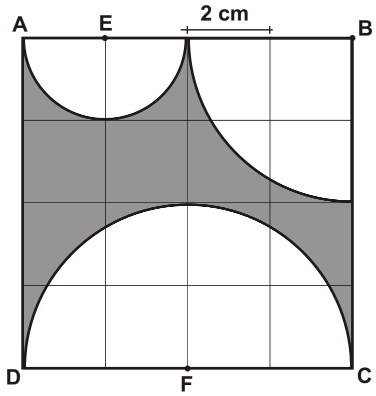
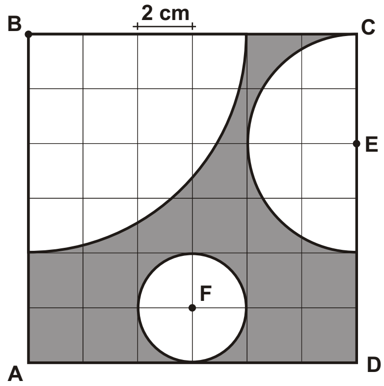
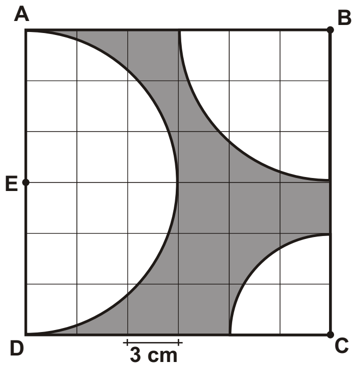
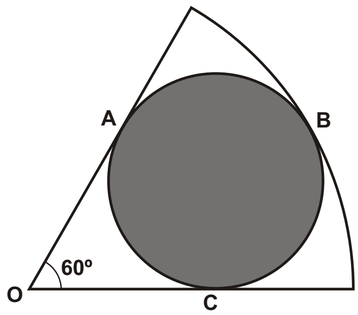
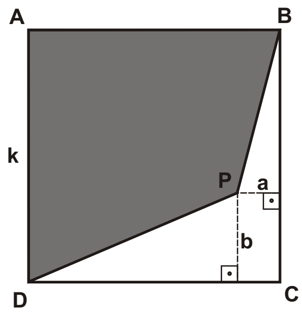
07) Dado um triângulo de lados 5 cm, 6 cm e 7 cm, determinar o raio da circunferência circunscrita nesse triângulo.

08) Determinar a área do paralelogramo abaixo.

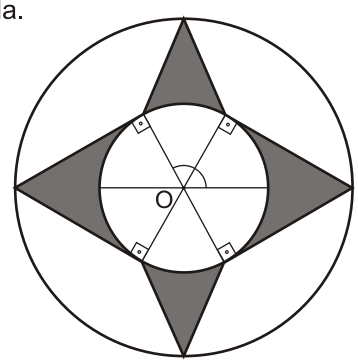


09) Determinar a área do trapézio abaixo.



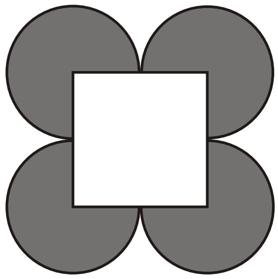
10) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado, dividido em 16 quadradinhos de lado 2 cm. Sendo E e F os centros dos dois semicírculos e B o centro do setor circular e sabendo que as figuras circulares tangenciam os lados dos quadradinhos, determine a área da região sombreada. (deixar em função de)	11) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado, dividido em 36 quadradinhos de lado 2 cm. Sendo E o centro do semicírculo, F o centro do círculo e B o centro do setor circular e sabendo que as figuras circulares tangenciam os lados dos quadradinhos, determine a área da região sombreada. (deixar em função de)
	
12) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado, dividido em 36 quadradinhos de lado 3 cm. Sendo E o centro do semicírculo e B e C os centros dos setores circular e sabendo que as figuras circulares tangenciam os lados dos quadradinhos, determine a área da região sombreada. (deixar em função de)	13) Na figura abaixo, A, B e C são pontos de tangência e o círculo está inscrito no setor circular de centro O, raio 3 cm e ângulo central 60º. Determinar a área do círculo.
	
14) Um trapézio tem base maior 5k, base menor 2k e altura 4k. A área do trapézio, em função de k, é : a) $7k^3$ b) $11k$ c) $7k^2$ d) $14k^2$ e) $12k^2$	15) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado de lado **k**. Sendo P um ponto que dista **a** de BC e **b** de CD, a área do quadrilátero ABPD, em função de **k**, de **a** e de **b**, é : a) $k(k-\frac{a}{2}-\frac{b}{2})$ b) $k(k+\frac{a}{2}-\frac{b}{2})$ c) $k(k+\frac{a}{2}+\frac{b}{2})$ d) $k(k-\frac{a}{2}+\frac{b}{2})$ e) $k^2-(\frac{a}{2}+\frac{b}{2})$ 

16) (UFV-MG) As circunferências da figura abaixo são concêntricas e têm raios de 1 cm e 2 cm. Determine a área da região hachurada.

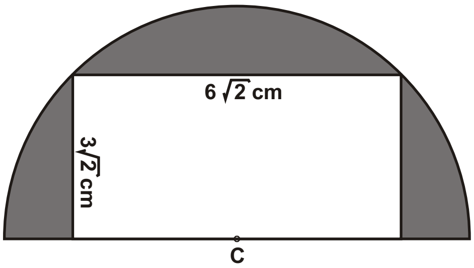


17) Na figura abaixo, estão representados quatro círculos congruentes tangentes entre si e um quadrado de lado 5 cm, cujos vértices são os centros dos quatro círculos. A área da região sombreada, em cm^2, é :

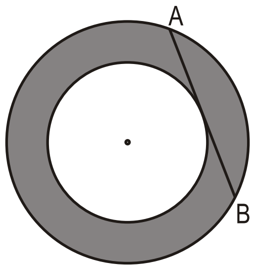
a) 100   - 100
b) 100   - 25
c) 75   / 2
d) 50   / 3
e) 75   / 4



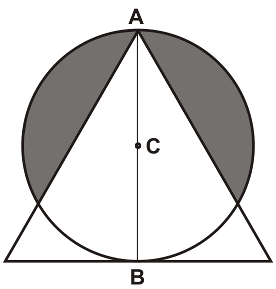
18) A figura abaixo representa uma semi-circunferência de centro C , onde existe um retângulo inscrito. Determinar a área da região sombreada.



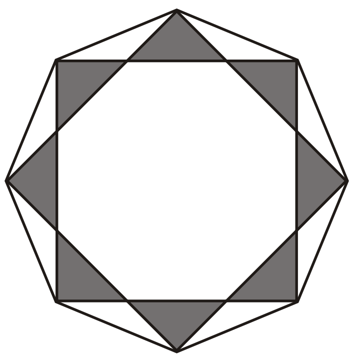
19) Determinar a área da coroa circular abaixo, sabendo-se que AB mede 10 cm e tangencia o círculo interno.



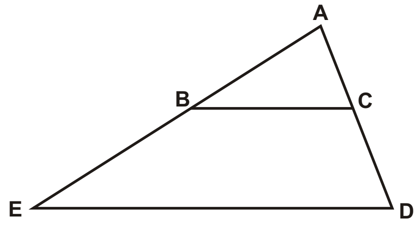
20) Na figura abaixo, o diâmetro AB coincide com a altura do triângulo equilátero de lado 12 cm. Sendo C o centro da circunferência, determine a área da região externa ao triângulo e interna à circunferência.



21) Na figura abaixo estão representados dois octógonos regulares. A medida do lado do maior é 8 cm e o octógono menor tem os seus lados apoiados sobre as diagonais do maior. Determine a área da região sombreada.

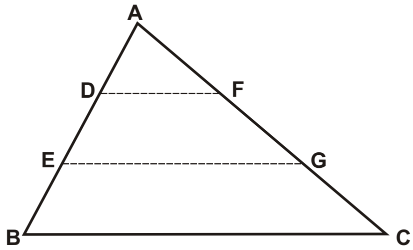


22) (Fuvest-SP) Na figura, BC é paralelo a DE, AB = 4 e BD = 5. Determine a razão entre as áreas do triângulo ABC e do trapézio BCDE.

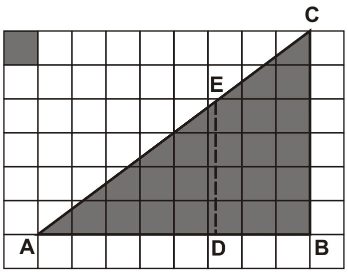


23) Na figura abaixo, o triângulo ADF tem área K. Sabendo-se que DF // BC e que AD = DE = EB e que AF = FG = GC, pode-se afirmar que a área do triângulo ABC vale :

a) 9K
b) $9K^2$
c) 3K
d) $3K^2$
e) 6K



24) (Fuvest-SP) No papel quadriculado da figura abaixo, adota-se como unidade de comprimento o lado do quadrado sombreado. DE é paralelo a BC. Determinar a medida de AD na unidade adotada para que a área do triângulo ADE seja a metade da área do triângulo ABC.

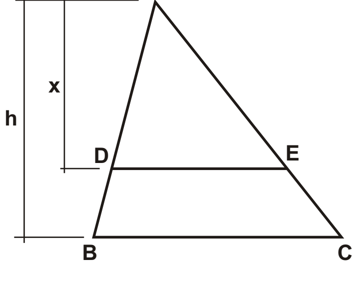


25) (Unifesp) Você tem dois pedaços de arame de mesmo comprimento e pequena espessura. Um deles você usa para formar o círculo da figura 1, e o outro você corta em 3 partes iguais para formar os três círculos da figura 2.

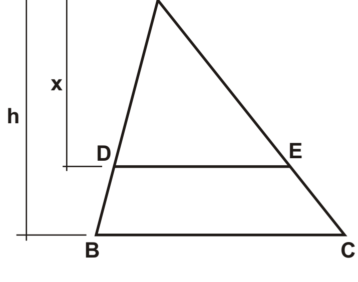
Se S é a área do círculo maior e s é a área de um dos círculos menores, a relação entre S e s é dada por:

a) S = 3s b) S = 4s c) S = 6s d) S = 8s e) S = 9s

26) Na figura abaixo, o triângulo ABC tem altura h = 12 cm. Sabendo-se que DE é paralelo a BC, determinar o valor de x para que a área do triângulo ADE seja o dobro da área do trapézio BCED.



27) Na figura abaixo, o triângulo ABC tem altura h = 12 cm. Sabendo-se que DE é paralelo a BC, determinar o valor de x para que a área do triângulo ADE seja um terço da área do trapézio BCED.



Respostas desta aula.

01) $S_1 = 56\ cm^2$ $S_2 = 140\ cm^2$ $S_3 = (91/2)\ cm^2$
$S_4 = 72\ cm^2$ $S_5 = 121\ cm^2$ $S_6 = 182\ cm^2$
$S_7 = 72\ cm^2$ $S_8 = 70\ cm^2$

02) $64\sqrt{3}\ cm^2$

03) $24\sqrt{3}\ cm^2$

04) $192\ cm^2$

05) $6\sqrt{6}\ cm^2$

06) $2\sqrt{6}\ cm^2$

07) $(35\sqrt{6}/24)\ cm^2$

08) $45\sqrt{3}\ cm^2$

09) $54\ cm^2$

10) $2(32 - 7\ \ )\ cm^2$

11) $4(36 - 7\ \ )\ cm^2$

12) $9(36 - 31\ \ /4)\ cm^2$

13) $\ \ cm^2$

14) d

15) a

16) $(2(\sqrt{3} + 1) - \ \ )\ cm^2$

17) e

18) $18(\ \ - 2)\ cm^2$

19) $25\ \ cm^2$

20) $18(\ \ - 3\sqrt{3}/4)\ cm^2$

21) $128(2 - \sqrt{2})\ cm^2$

22) 16 / 65

23) a

24) $4\sqrt{2}$ uc

25) e

26) $4\sqrt{6}$ cm

27) 6 cm

Importante para mim.

Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

Obrigado.

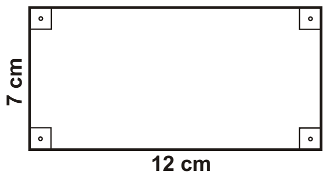
Jeca

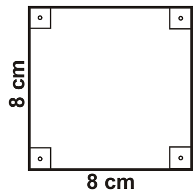
GeoJeca

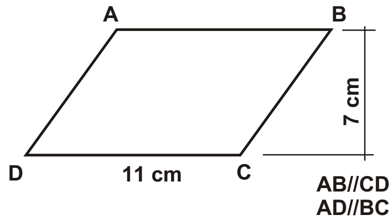
Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

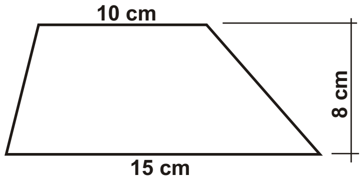
Geometria plana
Áreas das figuras planas.
Exercícios complementares da aula 13.

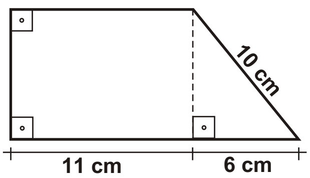
01) Determinar a área de cada figura abaixo.

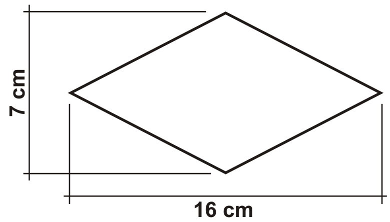
a)


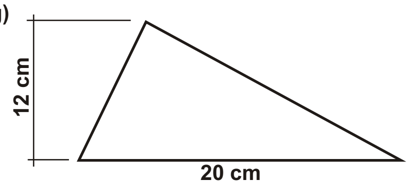
b)


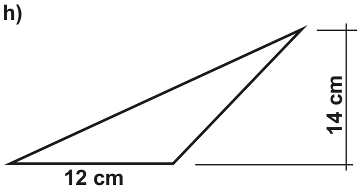
c)


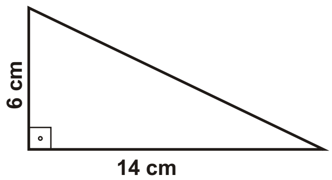
d)


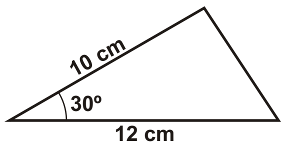
e)


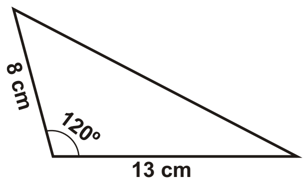
f)


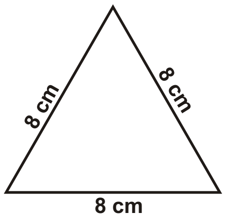
g)


h)


i)


j)


k)


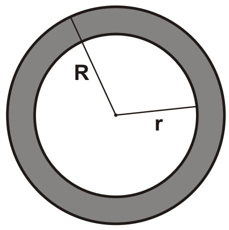
l)


02) Determinar a área e o perímetro de um círculo de raio 13 cm.

03) Determinar a área e o raio de um círculo de perímetro c = 14   cm.

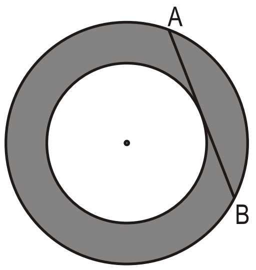
04) Determinar o raio e o perímetro de um círculo de área A = 64 cm^2.

05) Determinar a área da coroa circular abaixo.

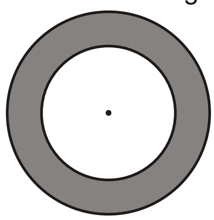


R = 11 cm
r = 9 cm

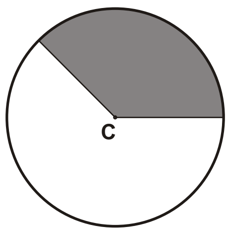
06) Determinar a área da coroa circular abaixo, sabendo-se que AB mede 10 cm e tangencia o círculo interno.



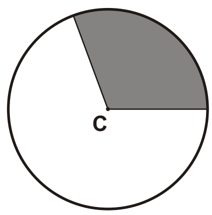
07) Determinar o perímetro do círculo maior da coroa circular de área 39 cm^2 , sabendo-se que a diferença entre os raios é igual a 3 cm.



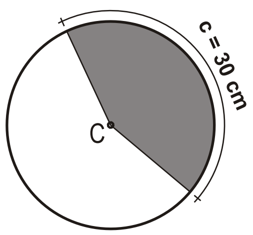
08) Determinar a área do setor circular de raio 9 cm e ângulo central igual a 135º.



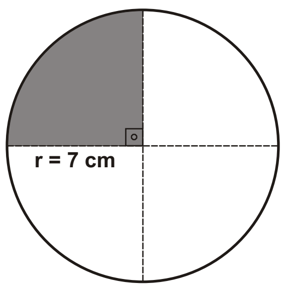
09) Determinar a área do setor circular de raio 8 cm e ângulo central 2 radianos.



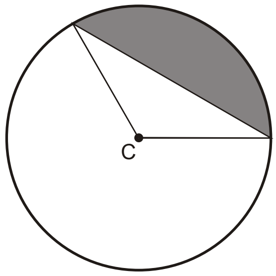
10) Determinar a área de um setor circular de raio 12 cm cujo arco correspondente tem comprimento c = 30 cm.



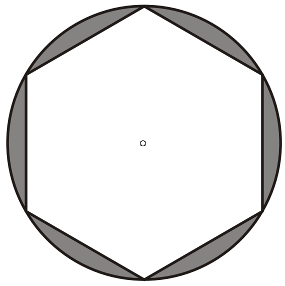
11) Determinar a área da região sombreada.



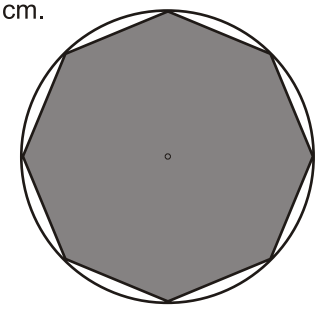
12) Determinar a área do segmento circular de raio 9 cm e ângulo central 120º



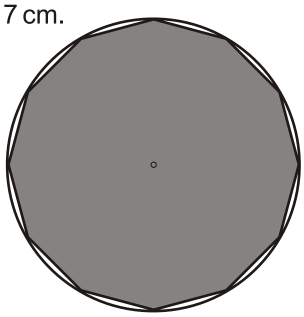
13) Na figura abaixo, o hexágono é regular e tem lado 4 cm. Determinar a área da região hachurada.



14) Determinar a área de um octógono regular inscrito numa circunferência de raio 14 cm.

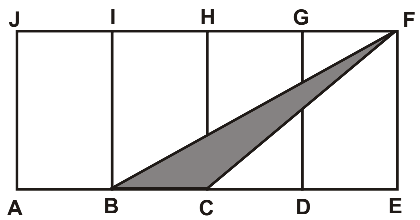


15) Determinar a área de um dodecágono regular inscrito numa circunferência de raio 7 cm.

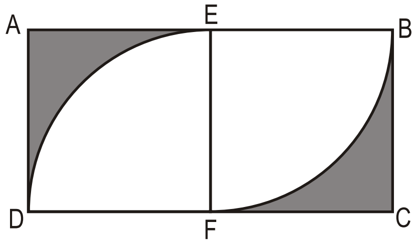


16) Determinar a área de um polígono regular com 40 lados inscrito numa circunferência de raio 7 cm.
(Dado sen 9º = 0,1564)

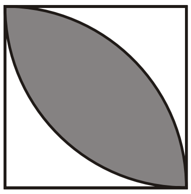
17) Sendo S a área do retângulo AEFJ, AB = BC = CD = DE e AJ // BI // CH // DG // EF, determinar a área do triângulo BCF em função de S.



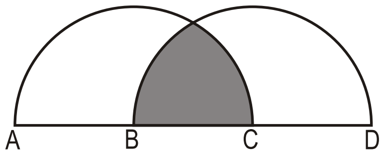
18) Na figura abaixo, ABCD é um retângulo de lados k e 2k onde as regiões circulares tangenciam os lados de ABCD. Determinar a área das regiões sombreadas em função de k.



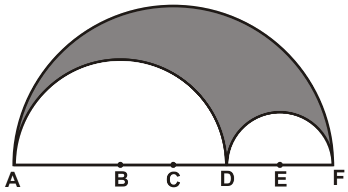
19) Na figura abaixo, as partes circulares tangenciam os lados do quadrado de perímetro 16 cm. Determinar a área da região sombreada.



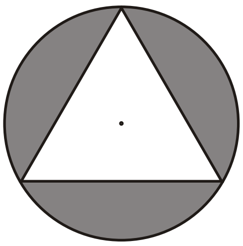
20) Na figura abaixo, B e C são os centros dos semi-círculos. Sendo AB = BC = CD = 8 cm, determinar a área da região sombreada.



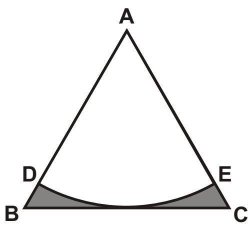
21) Os três semi-círculos abaixo têm centros B, C e E. Sendo BC = CD = DE = EF = 2 cm e AB = 4 cm, determinar a área da região sombreada.



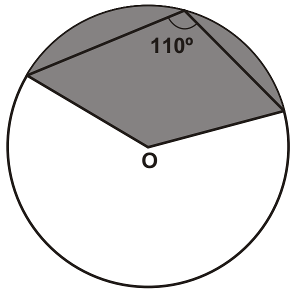
22) O triângulo abaixo é equilátero de lado 16 cm e está inscrito em um círculo. Determinar a área da região sombreada.



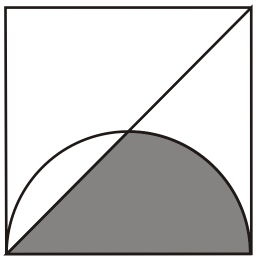
23) O triângulo abaixo é equilátero de lado k e DE é um arco de circunferência tangente ao lado BC do triângulo. Determinar a área da região sombreada.



24) (MACKENZIE - SP 2000) Determinar a área do setor assinalado no círculo de raio 1 e centro O.



25) (Fuvest - SP 2000) Na figura seguinte, estão representados um quadrado de lado 4, uma de suas diagonais e uma semi-circunferência de raio 2. Determinar a área da região hachurada.

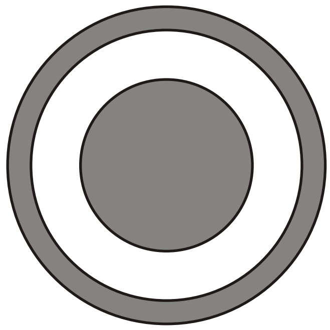


26) (Unicamp - SP) No canto A de uma casa de forma quadrada ABCD, de 4 metros de lado, prende-se uma corda flexível e inextensível, em cuja extremidade livre é amarrada uma pequena estaca que serve para riscar o chão, o qual se supõe que seja plano. A corda tem 6 metros de comprimento, do ponto em que está presa até sua extremidade livre. Mantendo-se a corda sempre esticada de tal forma que inicialmente sua extremidade livre esteja encostada à parede BC, risca-se um contorno no chão, em volta da casa, até que a extremidade livre toque a parede CD.

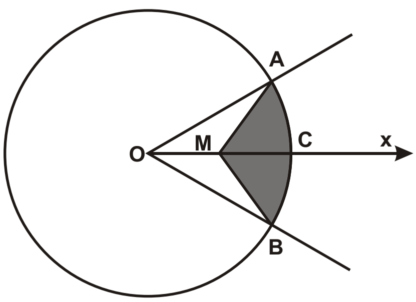
a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.

b) Calcule a área da região exterior à casa, delimitada pelo traçado da estaca.

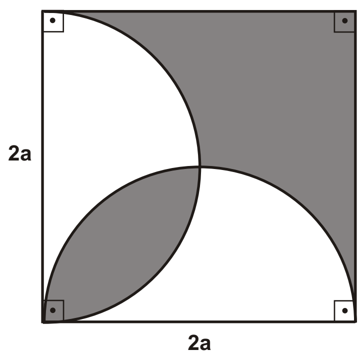
27) (Cesgranrio - RJ) Na figura, os três círculos são concêntricos e as áreas das duas regiões hachuradas são iguais. Determinar o raio do círculo intermediário sabendo-se que o raio do círculo menor é 5 m e o do maior é 13 m.



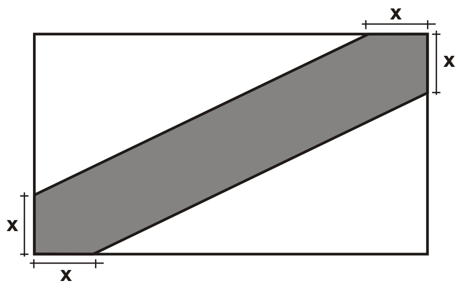
28) (Vunesp - SP) O ângulo central AÔB referente ao círculo da figura adiante, mede 60º e OX é sua bissetriz. Se M é o ponto médio do raio OC que mede $\sqrt{5}$ cm, calcular a área da figura hachurada.



29) Calcular a área da região hachurada.



30) A bandeira retangular representada na figura mede 4 m de comprimento por 3 m de largura. A faixa escura cobre 50% da superfície da bandeira. Determinar a medida de x.

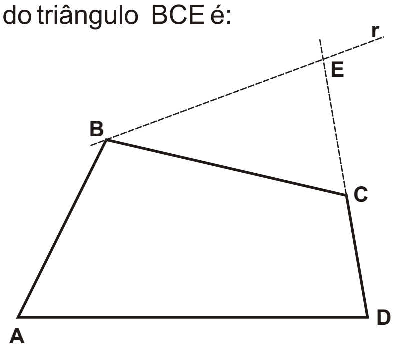


31) (Fuvest-SP) Um trapézio isósceles está circunscrito a uma circunferência de raio 2 cm e tem um ângulo interno de 60º. Determinar a área desse trapézio.

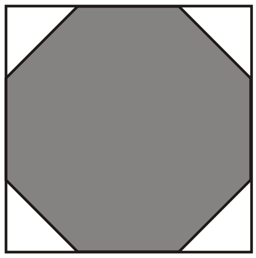
32) (Fuvest-SP) Um losango está circunscrito a uma circunferência de 2 cm de raio. Calcule a área desse losango, sabendo que um de seus ângulos mede 60º.

33) (FUVEST-SP) Na figura abaixo, a reta r é paralela ao segmento AC, sendo E o ponto de intersecção de r com a reta determinada por D e C. Se as áreas dos triângulos ACE e ADC são 4 e 10, respectivamente, e a área do quadrilátero ABED é 21, então a área do triângulo BCE é:

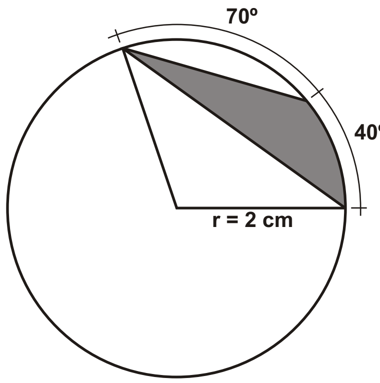
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10



34) (Fuvest-SP) Cortando-se os cantos de um quadrado, como mostra a figura, obtém-se um octógono regular de lados iguais a 10 cm.
a) Qual a área total dos quatro triângulos cortados ?
b) Calcule a área do octógono.

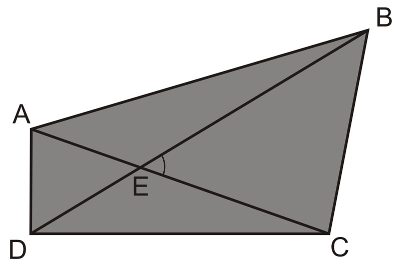


35) Determinar a área da região sombreada.

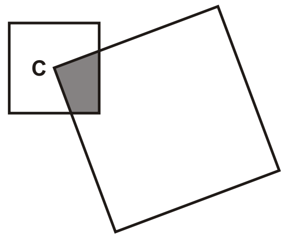


36) (FUVEST-SP) Na figura seguinte, E é o ponto de intersecção das diagonais do quadrilátero ABCD e é o ângulo agudo BÊC. Se EA = 1, EB = 4, EC = 3 e ED = 2, então a área do quadrilátero ABCD será :

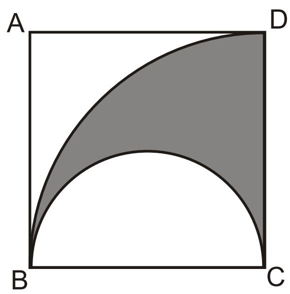
a) 12sen b) 8sen c) 6sen d) 10cos e) 8cos



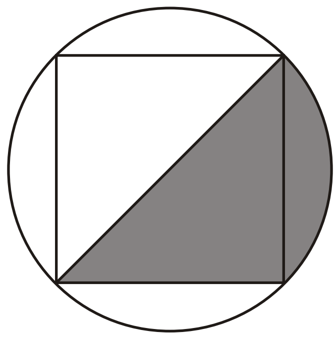
37) (FUVEST-SP) Os quadrados da figura têm lados medindo 10 cm e 20 cm, respectivamente. Se C é o centro do quadrado de menor lado, qual o valor da área hachurada ?



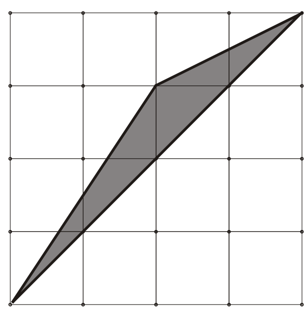
38) (UEL-PR) Na figura, ABCD é um quadrado cujo lado mede k. Um dos arcos está contido na circunferência de centro C e raio k, e o outro é uma semicircunferência de centro no ponto médio de BC e de diâmetro k. Determinar a área da região hachurada.



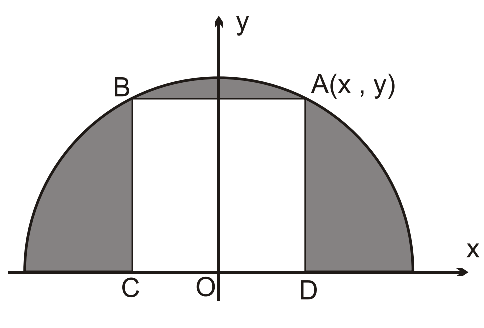
39) (UEL-PR) Na figura abaixo, o quadrado está inscrito na circunferência. Sabendo que a medida do lado do quadrado é 4 m, determinar a área da parte sombreada.



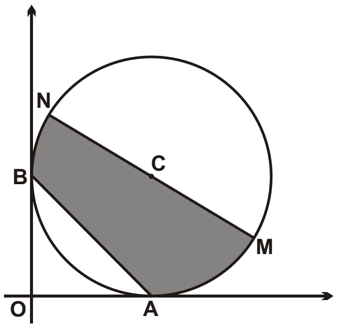
40) (FUVEST-SP) Considere o triângulo representado na malha pontilhada com quadrados de lados iguais a 1 cm. Determine a área desse triângulo.



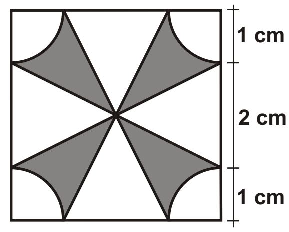
41) (FUVEST-SP) Considere o quadrado ABCD inscrito na semi-circunferência de centro na origem. Se (x , y) são as coordenadas do ponto A, determinar a área da região exterior ao quadrado e interior à semi-circunferência em função de x e y.



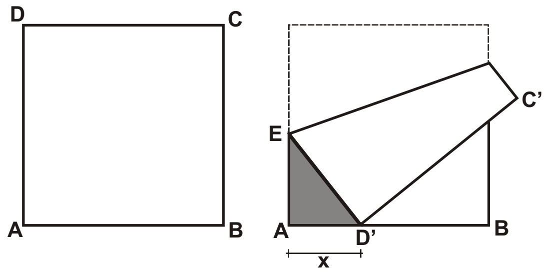
42) (Fuvest) A circunferência dada pela figura abaixo tem centro em C, raio igual a 2 cm e é tangente aos eixos coordenados x e y nos pontos A e B. Determinar a área da região hachurada.



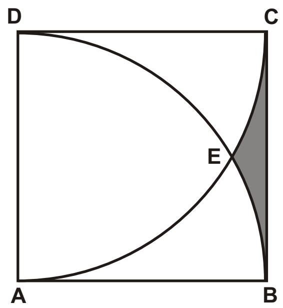
43) (UFSCAR-SP) Considere a região R sombreada, exibida a seguir, construída no interior de um quadrado de lado medindo 4 cm. Sabendo-se que os arcos de circunferência que aparecem nos cantos do quadrado têm seus centros nos vértices do quadrado e que cada raio mede 1 cm, pedem-se :
a) a área não sombreada do quadrado;
b) a área da região sombreada R.



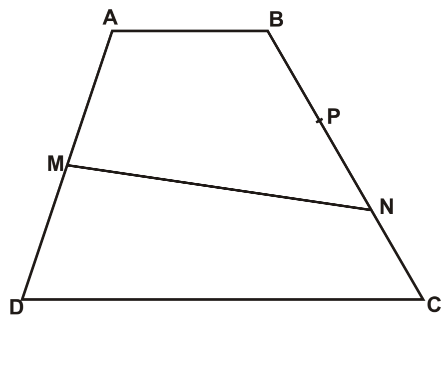
44) (UEL-PR) Tome uma folha de papel em forma de um quadrado de lado igual a 21 cm e nomeie os seus vértices A, B, C, D, conforme figura 1. A seguir, dobre-a de maneira que o vértice D fique sobre o lado AB (figura 2). Seja D' esta nova posição do vértice D e x a distância de A a D'. Determinar a função que expressa a área do triângulo retângulo sombreado, em função de x.



45) (Fuvest) Na figura, ABCD é um quadrado de lado 1, DEB e CEA são arcos de circunferências de raio 1, centrados em A e D, respectivamente. Determinar a área da região hachurada.

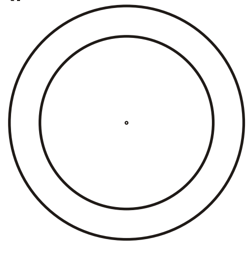


46) (FUVEST) O trapézio ABCD abaixo é tal que AB = 10, M é médio de AD, BN = 2NC e as áreas dos quadriláteros ABNM e CDMN são iguais. Determinar a medida de CD.



47) (Jeca) Na figura abaixo, a coroa circular tem a mesma área que o círculo menor. Determinar o raio do círculo menor, sabendo-se que o raio do círculo maior é R.

(Figuras semelhantes)



Respostas desta aula.

01)
a) $84\ cm^2$
b) $64\ cm^2$
c) $77\ cm^2$
d) $100\ cm^2$
e) $112\ cm^2$
f) $56\ cm^2$
g) $120\ cm^2$
h) $84\ cm^2$
i) $42\ cm^2$
j) $30\ cm^2$
k) $26\sqrt{3}\ cm^2$
l) $16\sqrt{3}\ cm^2$

02) $169\ \ cm^2$ e $26\ \ cm$

03) $49\ \ cm^2$ e $7\ cm$

04) $8\ cm$ e $16\ \ cm$

05) $40\ \ cm^2$

06) $25\ \ cm^2$

07) $16\ \ cm$

08) $(243\ \ /8)\ cm^2$

09) $64\ cm^2$

10) $180\ cm^2$

11) $(49\ \ /4)\ cm^2$

12) $(27(4\ \ -3\sqrt{3})/4)\ cm^2$

13) $8(2\ \ -3\sqrt{3})\ cm^2$

14) $392\sqrt{2}\ cm^2$

15) $147\ cm^2$

16) $153{,}27\ cm^2$

17) $S/8$

18) $k^2(4-\ \ )/2$

19) $8(\ \ -2)\ cm^2$

20) $(16(4\ \ -3\sqrt{3}\ )/3)\ cm^2$

21) $8\ \ cm^2$

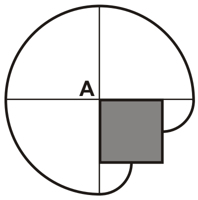
22) $(64(4\ \ -3\sqrt{3}\ )/3)\ cm^2$

23) $k^2(2\sqrt{3}-\ \ )/8$

24) $7\ \ /18$

25) $2+$

26)
a) desenho



b) $29\ \ m^2$

27) $12\ m$

28) $(5(2\ \ -3)/12)\ cm^2$

29) $2a^2$

30) $1\ m$

31) $(32\sqrt{3}\ /3)\ cm^2$

32) $(32\sqrt{3}\ /3)\ cm^2$

33) b

34)
a) $100\ cm^2$
b) $200(\sqrt{2}+1)\ cm^2$

35) $(4\ \ /9)\ cm^2$

36) a

37) $25\ cm^2$

38) $\ \ k^2/8$

39) $2(\ \ +2)\ m^2$

40) $2\ cm^2$

41) $(\ \ (x^2+y^2)/2)-2xy$

42) $(\ \ +2)\ cm^2$

43)
a) $(\ \ +8)\ cm^2$
b) $(8-\ \ )\ cm^2$

44) $(441x-x^3)/84)\ cm^2$

45) $1-(\sqrt{3}/4)-(\ \ /6)$

46) 20

47) $R\sqrt{2}\ /2$

Importante para mim.
Se você, resolvendo esta lista, descobrir alguma resposta errada, por favor, mande uma mensagem especificando qual a resposta errada para o e-mail *jecajeca@uol.com.br*
Somente assim, poderei corrigir eventuais erros.

Obrigado.

Jeca

Fim