Encontro 10: Máximo divisor comum e Mínimo múltiplo comum.

Definições

- Dados dois ou mais números o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) é o menor número que é múltiplo dos outros dois (ou mais números).

- Dado dois ou mais números, denomina-se **Máximo divisor comum** (M.D.C) desses números o maior desses divisores

Método da Fatoração Simultânea

Primeiro escrevemos os números lado a lado, separados por vírgula. Colocamos uma reta vertical separando os números que serão divididos e os divisores.

Dividimos todos os números por um primo divisor de todos. Assim, dividimos por cada primo até que não seja possível dividir, e passamos para o próximo divisor primo, destacando aqueles divisores que dividem todos os números. No nosso exemplo, 2 e 3, logo o MDC é 6.

12,	36,	18	2
6,	18,	9	3
2,	6,	3	3
2,	2,	1	2
1,	1,	1	

Para obter o MMC, basta continuar dividindo os números pelos fatores primos, independente desses fatores dividirem todos os números ou não.

No exemplo em questão, o MMC será $2^2 x 3^2 = 36$.

Exercícios

Exercício I - Calcule o MMC e o MDC dos números abaixo:

a) 18 e 60

b) 210 e 462

a) Utilizando a decomposição simultânea dos dois números, sempre dividindo os números pelo menor número primo possível, temos:

$$
\begin{array}{r|l}
18,\ 60 & \mathbf{2} \\
9,\ 30 & 2 \\
9,\ 15 & \mathbf{3} \\
3,\ 5 & 3 \\
1,\ 5 & 5 \\
1,\ 1 &
\end{array}
$$

Vamos multiplicar todos os números que ficaram à direita: **2 x 2 x 3 x 3 x 5 = 180**. Portanto, MMC (18, 60) = 180. Mas desses números à direita, os únicos que dividem o 18 e o 60, simultaneamente, são os números destacados: 2 e 3. Multiplicando-os, encontramos o resultado **6**. Logo, o **MDC (18, 60) = 6**.

b) De forma análoga ao item anterior:

210, 462	2
105, 231	3
35, 77	5
7, 77	7
1, 11	11
1, 1	

Basta multiplicar todos os números que ficaram à direita : **2 x 3 x 5 x 7 x 11 = 2.310**. Portanto, MMC (210, 462) = 2.310. Para encontrarmos o MDC, procuramos à direita os números que dividiram o 210 e o 462 simultaneamente, 2, 3 e 7. Multiplicando-os, encontramos o resultado 42. O MDC (210, 462) = 42.

Exercício II - Se $a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ identifique quais dos seguintes números são múltiplos de a.

(a) $2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3$

(b) $2 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 13^2$

(c) $2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$

(d) $2^3 \cdot 5 \cdot 7^6 \cdot 13 \cdot 19^2$

(e) $2^7 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 60$

Se m é um múltiplo de a, então existe um número n tal que $m = na = n.\, 2^3.\, 5.\, 7^2$. Isto implica que na fatoração de m devem aparecer pelo menos os elementos $2^3, 5$ e 7^2 e, portanto, que m deve ter a forma $m = 2^x.\, 5^y.\, 7^z.\, n$, em que $x \geq 3, y \geq 1, z \geq 2$ e n é qualquer natural. Daí segue que, entre todos os números dados, somente em (a), (d) e (e) encontramos múltiplos de a.

Exercício III – Se $a = 2^2.3.5$ e $b = 2^3.5^2$, liste os divisores comuns de a e de b.

Solução. Se d é um divisor de a, os únicos fatores primos de d são 2, 3 e 5. Se d é um divisor de b, os únicos fatores primos de d são 2 e 5. E, se d é um divisor comum de a e b, fazendo a interseção, vemos que os únicos fatores primos de d são 2 e 5. Assim $d = 2^x \cdot 5^y$. O número x não pode ser maior que 2 e 3, que são os expoentes do fator primo 2 nas fatorações de a e de b. Logo, no máximo podemos pegar $x = 2$. De modo análogo, o número y não pode ser maior que 1 e 2, expoentes do fator primo 5 nas fatorações de a e de b e assim, no máximo podemos pegar $y = 1$. Assim, vemos que $x \in \{0, 1, 2\}$ e $y \in \{0, 1\}$. Fazendo todas as possibilidades, podemos listar os divisores comuns de a e de b.

$$\begin{aligned}
x = 0 \text{ e } y = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^0\,5^0 = 1.\\
x = 0 \text{ e } y = 1 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^0\,5^1 = 5.\\
x = 1 \text{ e } y = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^1\,5^0 = 2.\\
x = 1 \text{ e } y = 1 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^1\,5^1 = 10.\\
x = 2 \text{ e } y = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^2\,5^0 = 4.\\
x = 2 \text{ e } y = 1 \quad &\Rightarrow \quad d = 2^2\,5^1 = 20.
\end{aligned}$$

Desta lista de divisores comuns vemos que $mdc(a, b) = 20$.

Exercício IV – Liste todos os divisores comuns de 1560 e 1848.

Pelo que foi visto no exercício anterior, todos os divisores comuns de 1560 e 1848 são divisores do mdc(1560; 1848). Então para resolver o exercício basta calcular este mdc e em seguida basta listar todos os seus divisores.

$$\begin{array}{rcr|l} 1560 & , & 1848 & 2 \\ 780 & , & 924 & 2 \\ 390 & , & 462 & 2 \\ 195 & , & 231 & 3 \\ 65 & , & 77 & \end{array}$$

Como 65 = 5 . 13 e 77 = 7 . 11 são relativamente primos, paramos o processo e concluímos que mdc(1560, 1848) = 2^3 . 3 = 24. Portanto os divisores comuns de 1560 e 1848 são D(24) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

Exercício V – Calcule mdc(15 . 42 ; 15 . 78).

Vamos aplicar o processo pratico para o cálculo do mdc, dividindo os números dados por divisores em comum.

$$\begin{array}{rr|l} 15 \cdot 42\,, & 15 \cdot 78 & 15 \\ 42\,, & 78 & 2 \\ 21\,, & 39 & 3 \\ 7\,, & 13 & \end{array}$$

Como 7 e 13 são primos entre si, paramos o processo e concluímos que o mdc procurado é igual a 15 x 2 x 3 = 15 x 6.

Observe que, a partir da segunda linha do cálculo acima, realizamos, de fato, o cálculo do mdc(42, 78) = 6. Assim, podemos concluir que mdc(15 . 42, 15.78) = 15.mdc(42,78). Generalizando, deste mesmo modo pode-se demonstrar que

$$mdc(n.a, n.b) = n.mdc(a, b)$$

Exercício VI - No alto da torre de uma emissora de televisão, duas luzes "piscam" com frequências diferentes. A primeira "pisca" 15 vezes por minuto e a segunda "pisca" 10 vezes por minuto. Se num certo instante, as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a "piscar simultaneamente"?

a) 12
b) 10
c) 20
d) 15
e) 30

Como o exercício nos questiona “após quantos **segundos** elas voltarão a 'piscar simultaneamente'”, precisamos converter as informações dadas para medidas de “segundos”. Portanto, se a primeira torre “pisca” 15 vezes por minuto, sabendo que um minuto equivale a 60 segundos, podemos fazer **60 : 15 = 4**, pois as luzes da primeira piscam de 4 em 4 segundos. Equivalentemente, os cálculos para a segunda torre são **60 : 10 = 6,** o que nos indica que as luzes da segunda torre piscam de 6 em 6 segundos.

4, 6 | **2**
2, 3 | 2
1, 3| **3**
1, 1 | 3 * 2* 2 = 12

Multiplicando os números que dividem o 4 e o 6, temos **2 x 1 x 3 = 12**.
Portanto, MMC (4,6) = 12. Logo, as torres piscaram juntas a cada **12 segundos**.

Exercício VII - Nas últimas eleições, três partidos políticos tiveram direito, por dia, a 90 s, 108 s e 144 s de tempo gratuito de propaganda na televisão, com diferentes números de aparições. O tempo de cada aparição, para todos os partidos, foi sempre o mesmo e o maior possível. A soma do número das aparições diárias dos partidos na TV foi de quanto tempo?

Para resolver essa questão, precisamos recorrer à ideia do Máximo Divisor Comum, pois queremos que o tempo de cada aparição seja o maior possível.
Façamos então a fatoração simultânea dos tempos de aparição de cada político:

90, 108, 144 | **2**
45, 54, 72 | 2
45, 27, 36 | 2
45, 27, 18 | 2
45, 27, 9 | **3**
15, 9, 3 | **3**
5, 3, 1 | 3
5, 1, 1 | 5
1, 1, 1 |

Já que estamos procurando o MDC, vamos procurar aqueles números que dividiram os três números ao mesmo tempo. Fazendo a multiplicação deles, temos: **2 x 3 x 3 = 18**.
Encontramos o tempo de aparição de cada político, 18 segundos. Precisamos agora descobrir quantas aparições cada um deles realizou. Vejamos:

90: 18 = 5 aparições
108/18 = 6 aparições
144 : 18 = 8 aparições

Somando as aparições de cada um, encontramos **5 + 6 + 8 = 19** aparições.

Exercício VIII - José possui um supermercado e pretende organizar de 100 a 150 detergentes, de três marcas distintas, na prateleira de produtos de limpeza, agrupando-os de 12 em 12, de 15 em 15 ou de 20 em 20, mas sempre restando um. Quantos detergentes José tem em seu supermercado?

Se José arruma os detergentes em grupos de múltiplos de 12, 15 ou 20, e sobra 1, vamos então encontrar o mínimo múltiplo comum entre esses números e adicionaremos 1 ao resultado. Vejamos:

12, 15, 20 | 2
6 , 15 , 10 | 2
3 , 15 , 5 | 3
1 , 5 , 5 | 5
1 , 1 , 1 |

Temos que multiplicar os números que apareceram à direita: **2 x 2 x 3 x 5 = 60**.
Todos os múltiplos de 60 serão também múltiplos comuns a 12, 15 e 20.
Vejamos os múltiplos de 60:
M(60) = {0, 60, 120, 180, 240, ...}
Você pode observar que o único dos múltiplos de 60 que se encaixa na quantidade de detergentes do supermercado de José é o 120. Mas falta ainda acrescentarmos aquele detergente que sempre restava, portanto, podemos concluir que no supermercado de José havia **121 detergentes**.

Exercício IX - Em uma lousa são escritos os 2014 inteiros positivos de 1 até 2014. A operação permitida é escolher dois números *a* e *b*, apagá-los e escrever em seus lugares os números *mdc* (*a*,*b*) (Máximo Divisor Comum) e *mmc* (*a*,*b*) (Mínimo Múltiplo Comum). Essa operação pode ser feita com quaisquer dois números que estão na lousa, incluindo os números que resultaram de operações anteriores. Determine qual a maior quantidade de números 1 que podemos deixar na lousa.

Resolução - A maior quantidade de números 1 que podemos deixar é 1007. Primeiro vamos mostrar como obtê-los. Para isso, basta tomar os pares de números consecutivos, (1, 2), (3, 4), (5,6), . . ., (2013,2014) e realizar a operação em cada par. Sabendo que números consecutivos não têm fator comum, cada um dos máximos divisores comuns será 1.

Não é possível obter mais do que isso pois a quantidade de números pares não se altera no decorrer das operações. Isso ocorre pois, se operarmos com dois números pares, teremos como resultado dois números pares, se operarmos com dois números ímpares teremos como resultado dois números ímpares e se operarmos com um número par e um número ímpar obteremos também um número par e um número ímpar. Começamos com 1007 números pares e sempre teremos 1007 números pares.