Material Teórico - Módulo de Métodos Sofisticados de Contagem

Combinações Completas

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Portal da Matemática
OBMEP

1 Combinações Completas

Em aulas anteriores, estudamos o conceito de "combinações", quando definimos que $C_{n,r}$ é o número de maneiras de escolher r objetos distintos dentre um conjunto de n objetos distintos. Vimos também que podemos escrever $C_{n,r} = \binom{n}{r}$. Agora, iremos estudar o conceito de *combinações completas*, também denominadas *combinações com elementos repetidos*. Vejamos:

> Dado um conjunto de n objetos (distintos), o número de maneiras de escolher r dentre eles, onde podemos escolher várias vezes o mesmo elemento e de forma que a ordem em que os r elementos são escolhidos não é importante, é chamado de número de combinações completas de n escolhe r, sendo denotado por $CR_{n,r}$.

Nosso objetivo é descobrir como calcular o valor de $CR_{n,r}$; note que, aqui, a única restrição é que n e r sejam inteiros não negativos. No caso de combinações simples, o valor de $C_{n,r}$ só é um número positivo quando $r \leq n$. Contudo, o valor de $CR_{n,r}$ será positivo para quaisquer valores (inteiros) não negativos de n e r. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. *Uma loja possui duas caixas, cada uma com um grande número de bolinhas. Uma caixa tem somente bolinhas azuis e a outra tem somente bolinhas verdes, sendo que as bolinhas de uma mesma caixa são todas idênticas. Queremos comprar 6 bolinhas para montar um saquinho de presentes. De quantas maneiras isso pode ser feito, observando-se que a ordem em que as bolinhas são colocadas no saquinho é irrelevante?*

Solução. Assuma que temos pelo menos 6 bolinhas de cada cor (já que cada caixa possui um número grande de bolinhas). Assim não precisamos nos preocupar se é possível terminar de montar um saquinho. Há apenas dois tipos de objetos distintos a serem escolhidos (as bolinhas verdes e as bolinhas azuis), dentre os quais queremos escolher 6 (com possíveis repetições). Assim, a resposta do problema é, por definição, $CR_{2,6}$. Mas, como podemos calcular esse número?

Veja que, como a posição das bolinhas no saquinho não importa, basta determinarmos quantas bolinhas verdes e quantas bolinhas azuis iremos comprar. Denotando por x_1 a quantidade de bolinhas verdes e por x_2 a quantidade de bolinhas azuis, temos que $x_1 + x_2 = 6$. Assim, nesse caso, basta escolhermos x_1 que x_2 estará completamente determinado por $x_2 = 6 - x_1$. Como $x_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ele pode assumir apenas 7 valores, o que nos dá apenas 7 soluções, a saber: $\{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 3), (5, 1), (6, 0)\}$. Logo, há 7 maneiras de realizarmos a compra.

Ressaltamos que $CR_{n,r}$ é diferente de $CR_{r,n}$, sempre que $n \neq r$. No primeiro caso, queremos escolher r objetos (permitindo repetições) dentre um grupo de n tipos de objetos distintos; no segundo, temos a situação inversa (escolher n objetos dentre r tipos).

Exemplo 2. *Uma sorveteria vende 6 sabores de sorvete. De quantas formas podemos comprar uma taça de sorvete com duas bolas, considerando que a ordem em que as bolas são posicionadas na taça não é importante?*

Solução. Da definição, temos que o número de maneiras de montar a taça é $CR_{6,2}$. Como o número de bolas é apenas 2, podemos calcular esse valor diretamente, sem a necessidade de introduzir técnicas novas, com uma pequena análise de casos. Há apenas dois casos: (i) as duas bolas são de sabores diferentes, ou (ii) as duas bolas são do mesmo sabor. No caso (i), podemos montar a taça de $C_{6,2}$ maneiras, já que a ordem em que as bolas são escolhidas é irrelevante; assim, há $6 \cdot 5/2 = 15$ maneiras de montar a taça. Temos, ainda, o caso (ii), onde as duas bolas são do mesmo sabor; nesse caso, basta escolhermos qual será esse sabor, o que pode ser feito de 6 maneiras. Sendo assim, o total de maneiras de montar a taça é igual a $15 + 6 = 21$.

Observação 3. *Comparando a solução do exemplo acima com a do Exemplo 1, poderíamos também montar uma equação para resolver o Exemplo 2. Para tanto, observe que o que define uma taça é apenas a quantidade de bolas de cada tipo de sorvete. Como há seis tipos, precisamos de seis variáveis, $x_1, \ldots, x_6$, onde x_i indica a quantidade de bolas do tipo i colocadas na taça. Mas, como devemos escolher apenas 2 bolas, temos que $x_1 + \ldots + x_6 = 2$, o que limita bastante a liberdade que temos para escolher os valores das variáveis. Logo mais, veremos uma maneira geral de como calcular o número de soluções de equações como essa.*

Observação 4. *Um erro comum ao tentar resolver o problema do Exemplo 2, seria escolher o sabor de cada bola de forma independente. O primeiro poderia ser escolhido de 6 maneiras e o segundo também, o que nos daria um total de $6 \cdot 6 = 36$ escolhas. O leitor, percebendo que estamos contando em excesso, então é tentado a dividir o resultado por 2, já que a ordem das bolas não importa. Isso resultaria num total de $36/2 = 18$ maneiras de montar a taça, o que também não está correto. O problema com essa "solução" é que nem todas, dentre as 36 maneiras, haviam sido contabilizadas duas vezes, já que as bolas podem ter um mesmo sabor. Por isso, essa "solução" não funciona diretamente.*

Exemplo 5. *Uma fábrica de automóveis dispõe de 3 cores para pintar 6 carros idênticos, cada um com uma única cor. De quantos modos isso pode ser feito?*

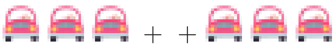
Solução. Aqui, devemos escolher a cor de cada um dos 6 carros. Assim, precisamos fazer 6 escolhas dentre um total de 3 possibilidades. Ou seja, teremos um total de $CR_{3,6}$ maneiras.

Vamos chamar as cores de 1, 2, e 3. Agora, como os carros são idênticos, a ordem em que eles são pintados não é importante. Para cada modo de pintar os carros, sejam x_1, x_2 e x_3, respectivamente os números de cores dos tipos 1, 2 e 3. Sendo assim, devemos ter $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Então, veja que estamos querendo encontrar a quantidade de soluções de tal equação, onde x_1, x_2 e x_3 são inteiros não negativos.

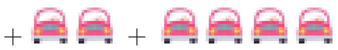
Vamos representar cada solução de $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ graficamente, onde distribuímos os 6 carros entre os sinais de '+'. Por exemplo, a solução $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2)$ pode ser representada por:

.

Veja que a quantidade de carro à esquerda do primeiro sinal '+' representa o valor de x_1, a quantidade de carros entre o primeiro e o segundo sinais '+' representa o valor de x_2 e a quantidade à direita do segundo sinal '+' representa o valor de x_3. Veja, ainda, que esses valores podem ser nulos. Por exemplo, a solução $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 3)$ é representada por

,

e a solução $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 4)$ por

.

Podemos, então, concluir que o número de maneiras de escolher os valores de x_1, x_2 e x_3 é igual ao número de maneiras de distribuir os símbolos '' e '+' sobre os 8 traços abaixo:

.

Para isso, basta escolhermos em quais das 8 posições iremos colocar os dois sinais '+', o que pode ser feito de $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ maneiras. Logo, há 28 maneiras de colorir os carros.

Um erro comum, em tentativas de soluções para o exemplo anterior, seria assumir que cada carro pode ser pintado com uma dentre 3 cores de forma independente, obtendo que o número de modos de pintar os carros seria 3^6. Além disso, não há como simplesmente dividirmos 3^6 por um valor inteiro e obter a resposta correta, Outro erro seria tentar resolver o problema com combinação simples.

A solução do exemplo anterior pode ser generalizada de forma direta para o caso em que queremos escolher r objetos dentre n tipos distintos de objetos, permitindo escolhas repetidas de tipos. Observe que escolher os r objetos é equivalente a definir quantas cópias de cada um dos n tipos de objetos serão selecionadas. Portanto, denotando por x_i, para $1 \leq i \leq n$, a quantidade de cópias do tipo i que foram escolhidas, concluímos que:

> O valor de $CR_{n,r}$ é igual ao número de soluções da equação
> $$x_1 + \cdots + x_n = r,$$
> onde $x_1, \ldots, x_n$ são inteiros não negativos.

Vejamos como podemos determinar o número de tais soluções. Vamos representar cada um dos r objetos selecionados pelo símbolo $*$. Como no Exemplo 5, cada solução da equação anterior pode ser reprentada por uma sequência formada pelos símbolos $*$ e $+$. Como temos r objetos, devemos ter r cópias do símbolo $*$. Observe, ainda, que a expressão $x_1 + \cdots + x_n$ possui $n - 1$ cópias do símbolo $+$. Sendo assim, nossa sequência terá, ao todo, $n - 1 + r$ símbolos. Por exemplo, no caso particular em que $n = 6$ e $r = 7$, a sequência

$$* * * + * + + + * * + *,$$

representa a solução $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (3, 1, 0, 0, 2, 1)$ para a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 7$.

Como cada sequência de $n - 1 + r$ símbolos $*$ e $+$ está inteiramente determinado pelas posições ocupadas pelos símbolos $+$, temos que o número de sequências desse tipo é igual a $\binom{n-1+r}{n-1}$. Em resumo:

$$CR_{n,r} = \binom{n - 1 + r}{r}. \tag{1}$$

Exemplo 6. *De quantas maneiras podemos comprar dez picolés de uma loja que os oferece em três sabores? Assuma que a loja possui pelo menos dez picolés de cada tipo em estoque.*

Solução 1. Temos uma aplicação direta de combinações completas. Devemos escolher 10 objetos dentre 3 opções. Assim a reposta é

$$CR_{3,10} = \binom{3 - 1 + 10}{3 - 1} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66.$$

Por vezes, é melhor repetir o argumento que levou a (1) do que aplicar diretamente tal fórmula, em cada caso de interesse. Vejamos como fazer isso, no caso do exemplo anterior.

Solução 2. Cada maneira de comprar os picolés corresponde a uma solução da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, onde x_i representa a quantidade de picolés do tipo i, para $1 \leq i \leq 3$. Representando cada picolé por $*$, temos dez símbolos $*$ e temos dois símbolos $+$, para montar uma sequência com um total de 12 símbolos que representa uma solução da equação acima. E o número de tais sequência é igual a $\binom{12}{2} = 66$.

Em alguns casos, problemas envolvendo combinações completas podem ter restrições adicionais sobre o número de elementos de cada tipo que podem ser escolhidos ou distribuídos.

Exemplo 7. *Uma pessoa dispõe de balas de hortelã, de caramelo e de coco, e pretende montar saquinhos com 13 balas cada, de modo que, em cada saquinho, haja no mínimo três balas de hortelã e duas balas de caramelo. Um saquinho diferencia-se do outro pelo número de balas de cada tipo. De quantas maneiras distintas a pessoa pode montar o saquinho?*

Solução. Considere uma maneira de escolher as balas para montar um saquinho. Representando respectivamente por x_1, x_2 e x_3 os números de balas de hortelã, caramelo e coco, temos que

$$x_1 + x_2 + x_3 = 13. \tag{2}$$

Nesse problema temos uma restrição adicional sobre os valores de x_1 e x_2, a saber: $x_1 \geq 3$ e $x_2 \geq 2$. Para lidar com tais restrições, operamos as mudanças de variáveis $y_1 = x_1 - 3$, $y_2 = x_2 - 2$ e $y_3 = x_3$. Isolando os valores de x_1, x_2 e x_3 e substituindo-os na equação (2), obtemos:

$$(y_1 + 3) + (y_2 + 2) + y_3 = 13$$

ou, ainda,

$$y_1 + y_2 + y_3 = 8.$$

Agora, a única restrição sobre os valores de y_1, y_2, y_3 é que eles sejam inteiros não negativos. Logo, a quantidade de solução para a última equação é igual a

$$CR_{3,8} = \binom{3-1+8}{3-1} = \binom{10}{2} = 45.$$

Exemplo 8. *Sejam r e n inteiros dados, com $r \geq n$. De quantos modos podemos escolher r objetos dentre n tipos distintos de objetos, de modo que pelo menos um objeto de cada tipo seja escolhido?*

Solução. Considere uma maneira de selecionar os r objetos. Para cada i, com $1 \leq i \leq n$, seja x_i o número de objetos do tipo i que foram selecionados. Aqui, temos a restrição adicional de que $x_i \geq 1$ para todo i. Sendo assim, vamos fazer a seguinte mudança de variáveis: $y_i = x_i - 1 \geq 0$, para cada i. Temos, então, que a equação $x_1 + \cdots + x_n = r$, equivale a $(y_1 + 1) + \cdots + (y_n + 1) = r$ ou, ainda, a

$$y_1 + \cdots + y_n = r - n.$$

O número de soluções dessa última equação, onde os y_i são números inteiros não negativos quaisquer, é igual a

$$CR_{n,r-n} = \binom{n-1+r-n}{n-1} = \binom{r-1}{n-1}.$$

Portanto, essa é também a resposta para nosso problema original.

Por fim, vamos ver um caso onde há restrições que limitam o número máximo de objetos de um certo tipo.

Exemplo 9. *De quantas maneiras podemos comprar 12 picolés de uma loja que os oferece em 4 sabores, digamos morango, framboesa, uva e chocolate, sabendo que a loja possui em seu estoque apenas 5 picolés de morango. Assuma que a loja possui pelo menos 10 picolés de cada um dos outros três sabores.*

Solução. Considere uma maneira de comprar os picolés. Sejam m, f, u, c respectivamente as quantidade de picolés de morango, framboesa, uva e chocolate. Temos que

$$m + f + u + c = 12, \tag{3}$$

com as seguinte restrições: $0 \leq m \leq 5$ e os valores de f, u, c são não negativos. Primeiramente, vamos ignorar a restrição $m \leq 5$ e contar o número de soluções não negativas da equação $m + f + u + c = 12$. A resposta segue diretamente da fórmula (1):

$$\binom{4-1+12}{4-1} = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = 455.$$

Agora, dessas 455 soluções, devemos desconsiderar aquelas em que $m \geq 6$. Vamos, então, contar quantas são as soluções ruins (ou seja, inválidas). Isso pode ser feito como nos exemplos anteriores, com auxílio de uma substituição de variável. Pondo $m' = m - 6$, temos $m = m' + 6$. Substituindo esse valor na equação 3 obtemos a equação equivalente $m' + 6 + f + u + c = 12$ ou, ainda,

$$m' + f + u + c = 6.$$

Essa equação, por sua vez, possui $\binom{4-1+6}{4-1} = \binom{9}{3} = 84$ soluções.

Então, concluímos que, das 455 soluções, 84 são ruins (pois violam a restrição sobre m) e devem ser descartadas. Logo, o número de soluções que satisfazem as restrições do problema é igual a $455 - 84 = 371$.

Observamos que o caso onde há um limite superior para a quantidade de vários dos objetos a serem escolhidos, pode ser resolvido de forma semelhante. Contudo, será necessário fazer uma análise de casos e o número de casos cresce muito rapidamente com o número de restrições adicionadas. Além disso, precisaremos usar o chamado *Princípio da Inclusão-Exclusão* (veja a referência [1]) para conseguir combinar o número de soluções encontradas em