Módulo de Princípios Básicos de Contagem

Combinação

Segundo ano

Combinação

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Numa sala há 6 pessoas e cada uma cumprimenta todas as outras pessoas com um único aperto de mão. Quantos foram os apertos de mão?

Exercício 2. De quantas formas podemos escolher 2 pessoas, de um grupo de 5, para uma viagem?

Exercício 3. Dispondo de 6 frutas, quantas vitaminas podemos fazer utilizando exatamente três destas frutas?

Exercício 4. Quantos drinks podem ser feitos com três bebidas, se dispomos de cinco tipos de bebidas?

Exercício 5. São dados 10 pontos no plano, de maneira que não existe reta que contenha mais de dois destes pontos.

a) Qual o número de retas que contém dois destes pontos?

b) Quantos triângulos podem ser desenhados, cujos vértices são três destes pontos?

c) Quantos heptágonos podem ser desenhados, cujos vértices são sete destes pontos?

Comentário para professores:. A quantidade de maneiras das quais podemos tormar p elementos de um conjunto de n elementos $(n \geq p)$ é a mesma que tomar $(n - p)$ elementos, ou seja, é indiferente se contamos de quantas maneiras podemos tomar p ou deixar p. Assim $C_{n,p} = C_{n,n-p}$.

Exercício 6. Dado o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Quantos são os subconjuntos com apenas

a) 2 elementos?

b) 4 elementos?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que possuem apenas 3 elementos?

Exercício 8. Num torneio com 6 times, cada time joga com cada um dos outros uma única vez. Quantos são os jogos?

Exercício 9. O volante da Mega-Sena contém 60 números (cada um chamado de dezena), que são $01, 02, 03, ..., 60$. O resultado de um sorteio é composto de 6 dezenas, sorteadas entre as 60 dezenas.

a) Quantos são os resultados possíveis?

b) Quantos resultados são formados por 4 números pares e 2 números ímpares?

c) Quantos são os resultados contendo o número 13?

Exercício 10. Em grupo de 14 pessoas, existem 5 médicos, 6 advogados e 3 engenheiros. Quantas comissões de 7 pessoas podem ser formadas, cada qual constituída de 3 médicos, 2 advogados e 2 engenheiros?

Exercício 11. Em um grupo de 10 pessoas, das quais figuram Ana, Beatriz, Carla e Daniela. Quantas comissões com cinco pessoas podemos formar

a) ao todo?

b) nas quais figura Ana, mas não Beatriz?

c) nas quais figuram Ana ou Beatriz ou Carla ou Daniela, mas nunca as quatro juntas?

Exercício 12. Sejam os vértices de um octógono regular.

a) Quantos triângulos podemos obter unindo três destes vértices?

b) Destes triângulos, quantos são retângulos?

Exercício 13. Quantas são as diagonais de um decágono convexo?

Exercício 14. Em tabuleiro de xadrez (8 x 8), quantos retângulos podemos desenhar cujos lados estão sobre as linhas deste tabuleiro?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Dadas duas retas paralelas r e s. Sobre r tomam-se 5 pontos e sobre s tomam-se 4 pontos. Quantos triângulos podemos formar com vértices em 3 desses 9 pontos?

Exercício 16. De um pelotão de 10 soldados, quantas equipes de cinco soldados podem ser formadas se em cada equipe um soldado é destacado como líder?

Exercício 17. Uma estante de biblioteca tem 16 livros: 11 exemplares do livro COMBINATÓRIA É FÁCIL e 5 exemplares do livro COMBINATÓRIA NÃO É DIFÍCIL. Considere que os livros de mesmo título sejam indistinguíveis. Determine de quantas maneiras diferentes podemos dispor os 16 livros na estante de modo que dois exemplares de COMBINATÓRIA NÃO É DIFÍCIL nunca estejam juntos.

Exercício 18. Em todos os 53 finais de semana do ano 2000, Júlia irá convidar duas de suas amigas para sua casa em Teresópolis, sendo que nunca o mesmo par de amigas se repetirá durante o ano.

a) Determine o maior número possível de amigas que Júlia poderá convidar.

b) Determine o menor número possível de amigas que Júlia poderá convidar.

Exercício 19. De quantas maneiras podem ser escolhidos três números naturais distintos, de 1 a 30, de modo que sua soma seja par?

Exercício 20. O número 2568 possui dígitos em ordem crescente. Os números 5667 e 3769 não possuem dígitos em ordem crescente. Quantos são os números naturais entre 1000 e 9999 que possuem seus dígitos em ordem crescente?

Exercício 21. Led, um famoso herói de jogos, tem um novo desafio: abrir o portal do dragão. O portal possui 10 cadeados distintos. Para o portal ser aberto, o herói deve possuir pelo menos uma chave para cada cadeado. Para conseguir as chaves dos cadeados, Led deve abrir caixas espalhadas pelo jogo. Existem 45 caixas em tal jogo e cada uma delas contém duas chaves distintas. Além disso, cada chave abre exatamente um dos 10 cadeados, duas chaves de uma mesma caixa abrem cadeados diferentes e não existem duas caixas tais que suas chaves abrem exatamente os mesmos dois cadeados. Qual o número mínimo de caixas que Led deve abrir para garantir a posse de 10 chaves distintas e assim abrir o portal?

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1. (Extraído da Vídeo Aula) $C_{6,2} = \dfrac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$

2. (Extraído da Vídeo Aula) $C_{5,2} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$

3. $C_{6,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20.$

4. $C_{5,3} = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = 10.$

5. a) $C_{10,2} = \dfrac{10!}{8! \cdot 2!} = 45.$

b) $C_{10,3} = \dfrac{10!}{7! \cdot 3!} = 120.$

c) $C_{10,7} = \dfrac{10!}{3! \cdot 7!} = 120.$

Comentário para professores:. A quantidade de maneiras das quais podemos tormar p elementos de um conjunto de n elementos ($n \geq p$) é a mesma que tomar $(n - p)$ elementos, ou seja, é indiferente se contamos de quantas maneiras podemos tomar p ou deixar p. Assim $C_{n,p} = C_{n,n-p}$.

6. a) $C_{6,2} = \dfrac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$

b) $C_{6,4} = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = 15.$

2 Exercícios de Fixação

7. (Extraído da Vídeo Aula) $C_{5,3} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$

8. (Extraído da Vídeo Aula) $C_{6,2} = \dfrac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$

9. (Extraído da Vídeo Aula)

a) $C_{60,6} = 50.063.860.$

b) $C_{30,4} \cdot C_{30,2} = 27.405 \cdot 435 = 11.921.175.$

c) $C_{59,5} = 5.006.386.$

10. (Extraído da Vídeo Aula) $C_{5,3} \cdot C_{6,2} \cdot C_{3,2} = 10 \cdot 15 \cdot 3 = 450$ comissões.

11. a) $C_{10,5} = \dfrac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$

b) Como Ana estará na comissão e Beatriz não, retam oito pessoas para quatro vagas, ou seja, $C_{8,4} = \dfrac{8!}{4! \cdot 4!} = 70.$

c) Devemos subtrair do total de comissões, as comissões nas quais nenhuma delas participa e as comissões nas quais todas participam. Temos então $C_{10,5} - C_{6,5} - C_{6,1} = 252 - 6 - 6 = 240$ comissões.

12. a) $C_{8,3} = \dfrac{8!}{5! \cdot 3!} = 56.$

b) Traçando a circunferência circunscrita à este octógono, basta tomar dois vértices pertencentes às extremidades de um diâmetro desta circunferência que, juntamente com qualquer outro vértice, formam um triângulo retângulo. Como são 4 possibilidades de diâmetros sobre os vértices e 6 pontos que sobrarão, teremos um total de $4 \cdot 6 = 24$ triângulos retângulos.

13. Basta contar de quantas maneiras podemos tomar dois dos dez vértices do decágono e descontarmos os segmentos que formam lados. Temos então $C_{10,2} - 10 = 45 - 10 = 35.$

14. Para desenhar o tabuleiro foram necessários nove segmentos de retas horizontais e nove verticais. Para construir o retângulo, basta tomarmos duas retas horizontais e duas verticais, ou seja, $C_{9,2} \cdot C_{9,2} = 36 \cdot 36 = 1296$ retângulos.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

15. (Extraído da Vídeo Aula) Basta tomar dois pontos de uma reta e um da outra, ou seja, $4 \cdot C_{5,2} + 5 \cdot C_{4,2} = 4 \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 70$ triângulos.

16. (PUC - RJ - Extraído da Vídeo Aula) Escolhe-se primeiro o líder e, com o restante, escolhem-se os outros quatro da equipe, ou seja, $10 \cdot C_{9,4} = 10 \cdot 126 = 1.260$ equipes.

17. (UFRJ - Extraído da Vídeo Aula) No início, final ou entre dois livros de COMBINATÓRIA É FÁCIL, deve haver no máximo um livro de COMBINATÓRIA NÃO É DIFÍCIL. Assim, organizando espaçadamente os onze livros daquele título, obtemos doze espaços (início, fim e entre eles) que deverão ser preenchidos com livros deste título, ou seja, $C_{12,5} = \dfrac{12!}{7! \cdot 5!} = 792$ maneiras diferentes de dispor todos os livros.

18. (UFRJ - Extraído da Vídeo Aula)

a) Escolhendo duas amigas diferentes a cada final de semana, ela conseguirá convidar no máximo $2 \cdot 53 = 106$ amigas.

b) Júlia deverá escolher uma quantidade mínima de amigas e combiná-las de maneira que consiga preencher todos os finais de semana, ou seja, ela deverá escolher uma quantidade n de amigas de tal forma que $C_{n,2} \geq 53$. Daí temos $\dfrac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} \geq 53$. Segue que $n(n-1) \geq 106$. Como n deve ser inteiro e positivo, seu menor valor é 10.

19. (UNICAMP - Extraído da Vídeo Aula) Para que tenhamos soma par, devemos dividir em dois casos:

i) três números pares: $C_{15,3} = 455$;

ii) dois números ímpares e um número par: $15 \cdot C_{15,2} = 15 \cdot 105 = 1.575$.

Assim, o total de maneiras é $455 + 1575 = 2030$.

20. (Extraído da Vídeo Aula) O primeiro fato é que o 0 não pode fazer parte do número pois, se fizesse, não poderia estar à esquerda e se estivesse na casa da unidade, dezena ou centena, seria menor que alguém à esquerda. O segundo fato é que todos os algarismos devem ser diferentes. Tomemos agora um destes que atende às característica do problema, por exemplo, 1234. É fácil perceber que, de todas as permutações com os algarismos 1, 2, 3 e 4, apenas em uma delas eles estão em ordem crescente, ou seja, basta escolher quatro algarismos de nove que teremos apenas uma sequência possível. Sendo assim, o total de números é $C_{9,4} = 126$.

21. (Extraído da OBM 2013) Suponha que, após abrir C caixas, Led ainda não consiga abrir o portal. Isso significa que há pelo menos uma chave que ele não possui. Então, as caixas que ele abriu possuíam pares de chaves capazes de abrir não mais que 9 cadeados. Logo, teremos $C \leq C_{9,2} = 36$. De fato, se ele abrir caixas que possuem todos os pares das chaves de um conjunto de 9 cadeados, ele não conseguirá abrir o portal. Por outro lado, nota-se também que se Led abrir 37 caixas distintas, saberemos que suas chaves não poderão ser um subconjunto de chaves capazes de abrir não mais que 9 cadeados, pois é maior que 36. Então, o número mínimo de caixas que Led deve abrir é 37.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com