3º Encontro: Geometria 1 – Áreas e Perímetros

Áreas

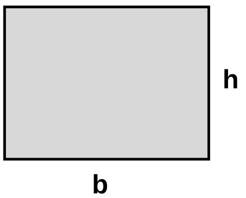
Dada uma figura no plano, vamos definir a área desta figura como o resultado da comparação da figura dada com uma certa unidade de medida. No caso do conceito de área de figuras planas, a unidade de medida utilizada é um quadrado de lado 1 (uma unidade de comprimento). Assim ***um quadrado de lado 1 tem, por definição, uma unidade de área***.

Calculando áreas de polígonos

Nas séries anteriores, você calculou áreas de retângulos, quadrados, paralelogramos quaisquer e triângulos utilizando as fórmulas próprias dessas figuras. Vamos recordar essas fórmulas.

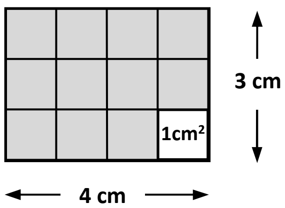
Área do retângulo

Usualmente, chamados um dos lados do retângulo de **comprimento (ou base)** e o outro de **largura (ou altura)** e indicamos da seguinte forma:



b = medida da base
h = medida da altura

Vamos "cobrir" esse retângulo com quadradinhos de 1 cm de lado, ou seja, com quadrados de 1 cm^2 de área.



Observe que esse retângulo contém 4 vezes 3 quadradinhos de 1 cm de lado. Então, para calcular a sua área, basta **multiplicar** as medidas da sua **base** e da sua **altura**. Assim, temos que:

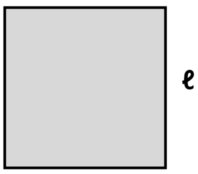
A = 4 cm . 3 cm $\Rightarrow$ **A = 12 cm^2**.

Podemos verificar que, realmente, a área desse retângulo é igual a 12 cm^2, pois nele "cabem" 12 quadradinhos de 1 cm de lado, ou seja, nele "cabem" 12 cm^2.

Você deve notar que ***a área de um retângulo é função da medida da sua base e da sua altura***. A fórmula seguinte nos permite calcular a área de um retângulo. ***A = b . h***.

Área do quadrado

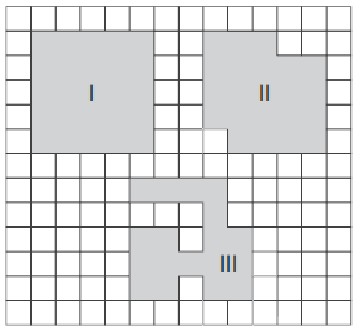
Como você já sabe, todo quadrado é um retângulo cujos lados possuem medidas iguais. Assim, chamando de ℓ a medida do lado de um quadrado temos A = $\ell \cdot \ell = \ell^2$.

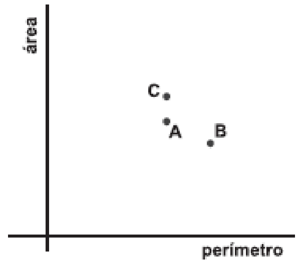


Observação

- Figuras iguais possuem a mesma área.
- Se uma figura está dividida em duas figuras disjuntas, então a soma das áreas dessas duas figuras menores é igual à área da figura total.
- Duas ou mais figuras que possuem a mesma área são chamadas equivalentes.

Exemplo 1: (Obmep 2007 – N2Q15 – 1ª fase) A figura mostra três polígonos desenhados em uma folha quadriculada. Para cada um destes polígonos foi assinalado, no plano cartesiano à direita, o ponto cujas coordenadas horizontal e vertical são, respectivamente, seu perímetro e sua área.

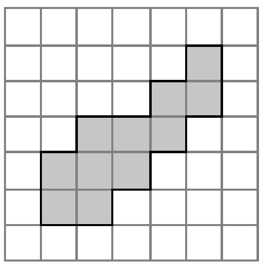




Qual é a correspondência correta entre os polígonos e os pontos?

A) I → C, II → B, III → A
B) I → B, II → A, III → C
C) I → A, II → C, III → B
D) I → A, II → B, III → C
E) I → C, II → A, III → B

Exemplo 2: Qual é a área da figura a seguir, usando como unidade a área de um quadrinho? Qual é o perímetro da figura? Quantos quadrinhos podem ser acrescentados à figura de modo a obter o máximo de área sem alterar o perímetro?



Exemplo 3: (Obmep 2006 – N1Q1 – 2ª fase) Miguilim brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem 3 cm, 4 cm e 6 cm. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triangulo com um lado do outro, sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo vemos duas das figuras que ele fez.

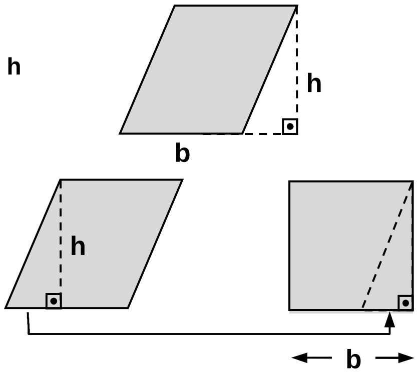
Figura I   Figura II

(a) Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas figuras I e II?
(b) Calcule os perímetros das figuras I e II.
(c) Qual o menor perímetro de uma figura que Miguilim pode formar? Desenhe duas figuras que ele pode formar com esse perímetro.

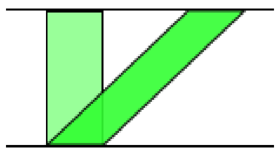
Área de um paralelogramo qualquer

A área de um paralelogramo qualquer é igual ao produto da medida da base pela medida da altura relativa a essa base. Observando as figuras abaixo você poderá comprovar essa fórmula.

A = b . h



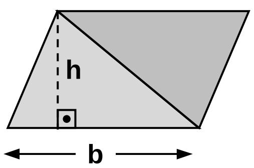
Como a área de um paralelogramo é o produto da base vezes a altura, todos os paralelogramos de mesma base e mesma altura possuem áreas iguais. A figura ao lado ilustra, então, um retângulo e um paralelogramo com áreas iguais.



Área de um triângulo qualquer

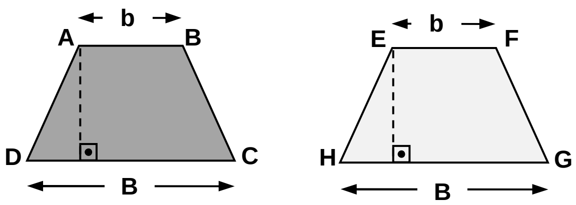
A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura relativa a essa base. Observando o desenho abaixo, você poderá comprovar essa fórmula.

$$A = \frac{b.h}{2}$$



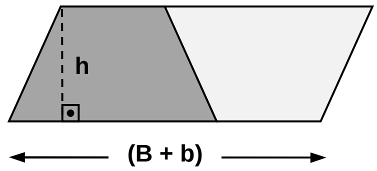
Área do trapézio

Considere os trapézios congruentes ABCD e EFGH seguintes. Vamos indicar a medida da base menor desses trapézios por **b**, a medida da base maior por **B** e a medida da altura por **h**.

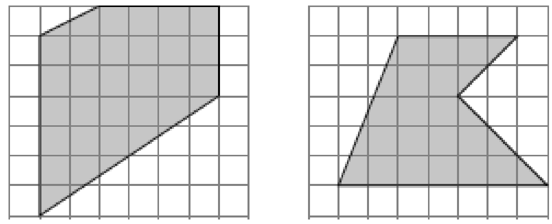


Girando, convenientemente, um dos trapézios, podemos uni-los, formando um paralelogramo. Assim, é fácil perceber que a área de cada trapézio é a metade da área do paralelogramo cuja medida da base (**B + b**) e cuja medida da altura é **h**.

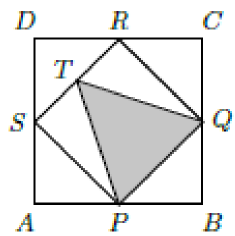
$$A = \frac{(B + b) . h}{2}$$



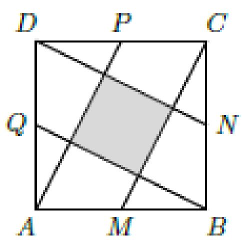
Exemplo 4: Decompondo em figuras geométricas mais simples, calcule a área de cada uma das seguintes figuras desenhadas em uma malha de quadrados de lado 1.



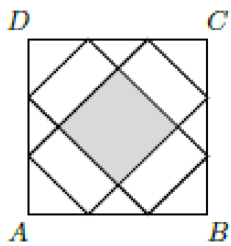
Exemplo 5: (Obmep 2009 – N1Q10 – 1ª fase) Na figura, o quadrado ABCD tem área 40 cm^2. Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do quadrado e T é o ponto médio do segmento RS. Qual é a área do triângulo PQT?



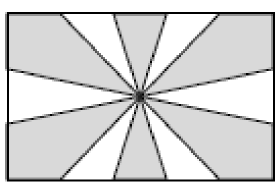
Exemplo 6: Na figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado 10 e M, N, P e Q são pontos médios dos lados deste quadrado. Qual é a área do quadrado sombreado?



Exemplo 7: Na figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado 18. Sobre cada um dos seus lados estão marcados dois pontos que dividem o lado do quadrado em 3 partes iguais. Traçando alguns segmentos que unem estes pontos, foi obtida a seguinte figura. Qual é a área do quadrado sombreado?



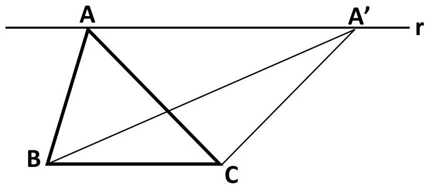
Exemplo 8: (Banco de Questões 2011, N1Q11, página 15) O Tio Mané é torcedor doente do Coco da Selva Futebol Clube e resolveu fazer uma bandeira para apoiar seu time no jogo contra o Desportivo Quixajuba. Para isto, comprou um tecido branco retangular com 100 cm de largura e 60 cm de altura. Dividiu dois de seus lados em cinco partes iguais e os outros dois em três partes iguais, marcou o centro do retângulo e pintou o tecido da forma indicada na figura. Qual é a área do tecido que Tio Mané pintou?



Áreas: Propriedades importantes

Propriedade 1

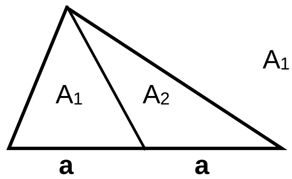
A área de um triângulo não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base.



Na figura acima, a reta r é paralela a BC. Os triângulos ABC e A′BC têm mesma área, pois possuem mesma base e mesma altura.

Propriedade 2

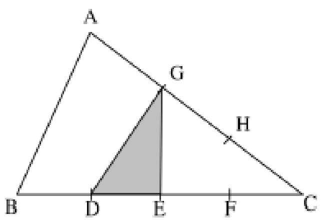
Em um triângulo, uma mediana divide sua área em partes iguais.



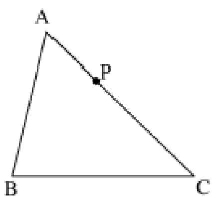
$A_1 = A_2$

De fato, os dois triângulos interiores possuem mesma base e mesma altura. Logo, possuem mesma área.
Quando duas figuras possuem mesma área, dizemos que elas são equivalentes. Portanto, o enunciado desta propriedade pode ser: “Uma mediana divide o triângulo em dois outros equivalentes.”

Exemplo 9: O triângulo ABC da figura abaixo tem área igual a 30. O lado BC está dividido em quatro partes iguais, pelos pontos D, E e F, e o lado AC está dividido em três partes iguais pelos pontos G e H. Qual é a área do triângulo GDE?

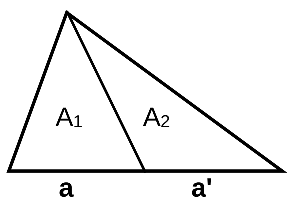


Exemplo 10: É dado um triângulo ABC e um ponto P do lado AC mais próximo de A que de C. Traçar uma reta por P que divida o triângulo ABC em duas partes de mesma área.



Propriedade 3

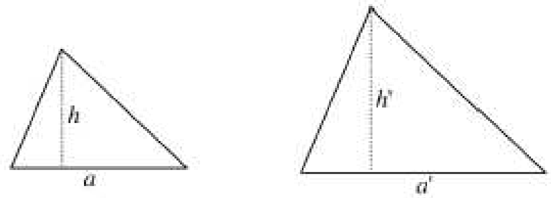
Se dois triângulos têm mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. A afirmação acima tem comprovação imediata a partir da fórmula que calcula a área do triângulo.



$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a}{a'}$$

Propriedade 4

A razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Observe, na figura a seguir, dois triângulos semelhantes com bases **a** e **a′** e alturas **h** e **h′**.



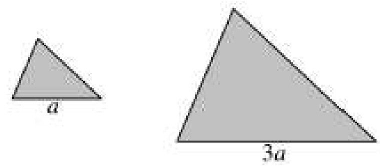
Como são semelhantes, a razão entre as bases é a mesma razão entre as alturas. Esse número é a razão de semelhança das duas figuras:

$$k = \frac{a}{a'} = \frac{h}{h'}$$

Porém, se A e A′ são as áreas dos dois triângulos temos:

$$\frac{A}{A'} = \frac{ah/2}{a'h'/2} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k = k^2$$

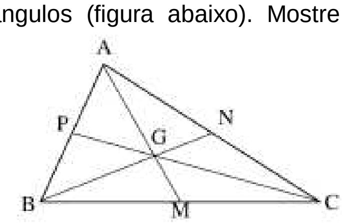
Exemplo 11: Os dois triângulos da figura abaixo são semelhantes. Se a área do menor é igual a 8, qual é a área do maior?



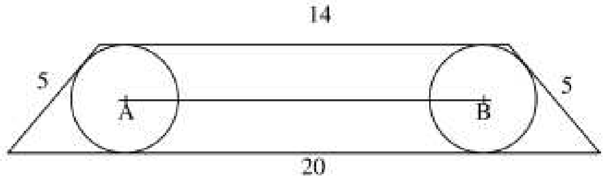
A propriedade 4, que mostramos para triângulos, vale naturalmente para polígonos, pois estes podem ser divididos em triângulos. Mas, é importante saber que esta propriedade vale para quaisquer figuras semelhantes.
A razão entre as áreas de figuras semelhantes quaisquer é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Exemplo 12: Em algum momento, na primeira metade do século passado, uma pessoa chamada Afrânio tinha um valioso terreno desocupado, perto do centro da cidade do Rio de Janeiro. Com a urbanização da cidade, ruas novas foram abertas e o terreno de Afrânio ficou reduzido a um triângulo ABC, retângulo em B, ainda de grande valor, pois o lado AB media 156 metros. Pois bem, Afrânio morreu e em seu testamento os advogados encontraram as instruções para dividir o terreno “igualmente” entre seus dois filhos. Era assim: “um muro deve ser construído perpendicularmente ao lado AB, de forma que os dois terrenos resultantes da divisão tenham mesmo valor; o que tem a forma de um trapézio será do meu filho mais velho e o outro será do mais novo”.
Os advogados concluíram que os terrenos deviam ter mesma área, pois o testamento dizia que deveriam ter mesmo valor. Mas não foram capazes de decidir em que posição deveria ficar o muro. Conta meu avô que o episódio ganhou as páginas dos jornais por vários dias, com leitores opinando de diversas maneiras sobre a posição correta do muro. Ele falava e se divertia muito com as opiniões absurdas mas, ao mesmo tempo, me instigava a resolver o problema. E o problema retorna para vocês.
Em que posição, relativamente ao lado AB do terreno, o muro deve ser construído?

Exemplo 13: As medianas de um triângulo dividem esse triângulo em 6 outros triângulos (figura abaixo). Mostre que todos têm mesma área.



Exemplo 14: A figura a seguir mostra um trapézio com bases medindo 20 cm e 14 cm e com os outros dois lados medindo 5 cm cada um. Duas circunferências com centros A e B são tangentes às bases, uma ao lado esquerdo e outra ao lado direito. Pergunta-se qual é o comprimento do segmento AB.



O número π

O número π é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Esta razão dá sempre o mesmo valor, ou seja, independe da circunferência, porque duas circunferências quaisquer são semelhantes. Todas as circunferências são semelhantes entre si. Se **C** é o comprimento da circunferência de raio **R**, então por definição:

$$\frac{C}{2R} = \pi$$

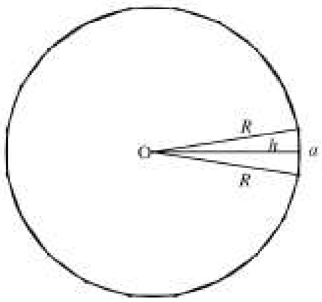
Área do círculo

A área do círculo é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos regulares inscritos.

Imaginemos um polígono regular com n lados (n bem grande) inscrito na circunferência de raio R (figura abaixo). Dividamos o polígono em triângulos isósceles iguais, todos com vértice no centro da circunferência. Cada triângulo tem dois lados iguais a **R**, um lado igual a **α**, lado do polígono, e altura **h** relativa a essa base.

A área do polígono é

$$A_n = n\frac{\alpha h}{2} = \frac{(n\alpha)h}{2} = \frac{p_n h}{2} \ ,$$



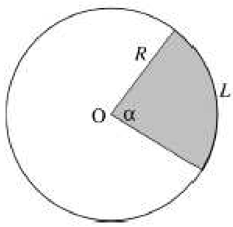
onde $\mathbf{p_n}$ é o perímetro do polígono. Quando **n** cresce indefinidamente, $\mathbf{p_n}$ tende ao comprimento da circunferência e **h** tende ao raio. A área do círculo é então:

$$A = \frac{2\pi R R}{2} = \pi R^2$$

Área de Setores circulares

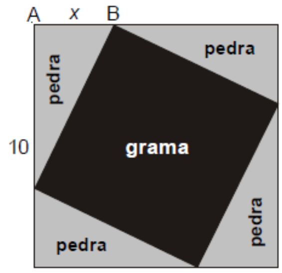
Frequentemente precisaremos calcular áreas de setores circulares (veja figura). Repare que a área de um setor de um círculo é proporcional ao ângulo central, ou ainda, proporcional ao comprimento de seu arco. Para justificar isto, basta observar que dobrando o ângulo central a área do setor dobra, triplicando o ângulo central a área do setor triplica, e assim por diante.

Na figura ao lado **R** é o raio do círculo com centro no ponto O, **α** é o ângulo central correspondente ao arco de comprimento **L**.



Questões propostas

Q1. (Obmep–Q04–2ªfaseN3–2005)) Um prefeito quer construir uma praça quadrada de 10 m de lado, que terá quatro canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento do segmento AB está indicado por x na figura.



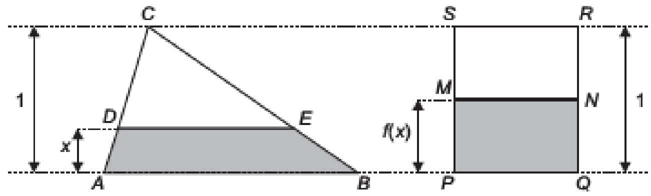
A) Calcule a área do canteiro de grama para x = 2.

B) Escreva a expressão da área do canteiro de grama em função de x. Sabe-se que o canteiro de grama custa R$ 4,00 por metro quadrado e os canteiros de pedra custam R$ 3,00 por metro quadrado. Use esta informação para responder aos dois itens a seguir.

C) Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?

D) Se o prefeito tem apenas R$ 358,00 para gastar com os cinco canteiros, qual é a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?

Q2. (Obmep–Q03–2ªfaseN3–2008) Na figura, o triângulo *ABC* e o retângulo *PQRS* têm a mesma área e a mesma altura 1. Para cada valor de *x* entre 0 e 1 desenha-se o trapézio *ABED* de altura *x* e depois o retângulo *PQNM* de área igual à do trapézio, como na figura. Seja *f* a função que associa a cada *x* a altura do retângulo PQNM.



(a) Qual é a razão entre *AB* e *PQ*?

(b) Qual é o valor de $f(\frac{1}{2})$?

(c) Ache a expressão de *f* (*x*) e desenhe o gráfico de *f*.

Q3. (Obmep–Q05–2ªfaseN3–2009) Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida 2 são posicionados como mostra a figura 1. A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas figuras 2 e 3, *x* indica a distância entre os vértices *A* e *B* dos dois triângulos.

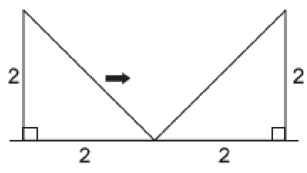


Figura 1

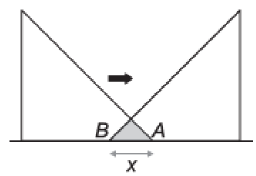


Figura 2

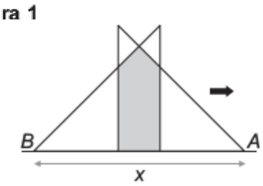


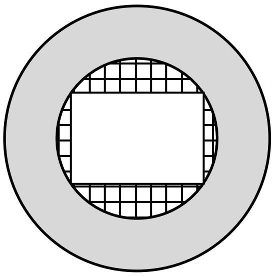
Figura 3

Para cada *x* no intervalo [0,4], seja *f* (*x*) a área da região comum aos dois triângulos (em cinza nas figuras).

(a) Calcule *f* (1) e *f* (3).

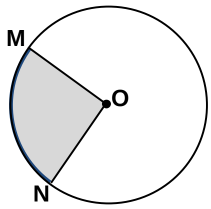
(b) Encontre as expressões de *f* nos intervalos [0,2] e [2,4] e esboce o seu gráfico.
(c) Qual é a área máxima da região comum aos dois triângulos?

Q4. A figura mostra uma praça, vista de cima. A parte central é um jardim retangular de 16 m de comprimento por 12 m de largura. A parte do círculo menor, exterior ao jardim, é coberta por paralelepípedos. A caçada externa, limitada pelas duas circunferências de mesmo centro, é cimentada. Sua largura é constante e igual a 4 m. Nessa calçada, as pessoas podem transitar livremente.



a) Qual é a área do jardim?
b) Qual é a área da parte coberta por paralelepípedos?
c) Qual é a área da calçada externa?
d) Qual é a mqnor distância que uma pessoa pode percorrer, na caçada, para dar uma volta completa?
e) E a maior?

Q5. O raio da circunferência da figura mede 12 cm. O arco MN assinalado mede 8π cm. Obter a medida α do ângulo central associado e a área do setor circular em destaque.



Q6. O comprimento de uma circunferência é 308 cm. Use $\frac{22}{7}$ como o valor aproximado de π e calcule:

a) a área do círculo correspondente;
b) o comprimento de um arco dessa circunferência, correspondente a um ângulo central de 72º;
c) a área do setor circular associado.