

1 O Teorema de Pitágoras

1.1 Leia um Pouco da História

Pitágoras (c.569 - c.480 a.C.) nasceu na ilha de Samos, perto de Mileto onde 50 anos antes tinha nascido Tales. Foi a partir das ideias desses dois grandes personagens que a Matemática se inicia como ciência e pode se desenvolver enormemente nos séculos seguintes.

Pitágoras viajou bastante. Esteve no Egito e na Babilônia (talvez tenha ido até a Índia) onde absorveu os conhecimentos matemáticos e as ideias religiosas de cada região. Voltando ao mundo grego, fundou em Crotona (sudeste da Itália de hoje) uma escola, na verdade uma sociedade secreta, dedicada ao estudo da Matemática e Filosofia, principalmente. Como todos os documentos daquela época se perderam, tudo o que sabemos veio através de referências de outros autores que viveram séculos depois. Por isso, Pitágoras é uma figura obscura na história da Matemática e, para dificultar ainda mais as coisas, a sua escola, além de secreta, era comunitária, ou seja, todo o conhecimento e todas as descobertas eram comuns, pertenciam a todos. Assim, não sabemos sequer se foi o próprio Pitágoras que descobriu o teorema que leva o seu nome, pois era comum naquela época dar todo o crédito de uma descoberta ao mestre. Não conhecemos também qual foi a demonstração original, mas historiadores acreditam que deva ter sido alguma usando áreas.

O Teorema de Pitágoras é um dos mais belos e importantes teoremas da Matemática de todos os tempos e ocupa uma posição especial na história do nosso conhecimento matemático. Foi onde tudo começou. Desde o século 5 a.C. até o século 20 d.C. inúmeras demonstrações do Teorema de Pitágoras apareceram. Em 1940, o matemático americano E. S. Loomis publicou 370 demonstrações, mas ainda há mais.

1.2 Antes de Pitágoras (Na Babilônia)

Temos provas concretas que os babilônios antigos conheciam o Teorema de Pitágoras. Muitos tabletes de barro datados do período de 1800 a 1600 a.C. foram encontrados, decifrados e hoje se encontram em diversos museus. Um deles, chamado Plimpton 322 está na Universidade de Columbia e o fragmento que foi preservado mostra uma tabela de 15 linhas e 3 colunas de números. Os pesquisadores descobriram que esta tabela continha ternos pitagóricos, ou seja, lados de um triângulo retângulo. Como o que restou é apenas um pedaço de um tablete, que deveria fazer parte de um conjunto de tabletes, não se sabe como esses números foram encontrados. Mas uma pista, que os babilônios conheciam alguma forma de encontrar esses números, está em um tablete guardado hoje no Museu Britânico. Nesse tablete está escrito o seguinte:

4 é o comprimento
5 é a diagonal
Qual é a altura?
4 vezes 4 dá 16

5 vezes 5 dá 25
 Tirando 16 de 25 o resto é 9
 Quanto vezes quanto devo tomar para ter 9?
 3 vezes 3 dá 9
 3 é a altura

Isto mostra, sem dúvida, que os babilônios tinham conhecimento da relação entre os lados de um triângulo retângulo. Não há nenhuma demonstração, naturalmente, pois isto ainda estava longe de ser uma preocupação dos matemáticos da época. Eles conheciam receitas que davam certo e, com elas, resolviam inúmeros problemas.

Um outro tablete que merece atenção está no museu da Universidade de Yale. É o único que contém figuras: um quadrado e suas diagonais. Neste fragmento de tablete que se pode ver a seguir, o lado do quadrado é tomado como igual a 30 e o comprimento da diagonal aparece como 42, 25, 35.



Como os babilônios escreviam os números na base 60, o comprimento da diagonal é, na nossa notação decimal,

$$24 + \frac{25}{60} + \frac{35}{3600} = 42,4263889.$$

Isto, dividido por 30, dá 1,414213..., uma aproximação excepcional para $\sqrt{2}$ com seis casas decimais corretas.

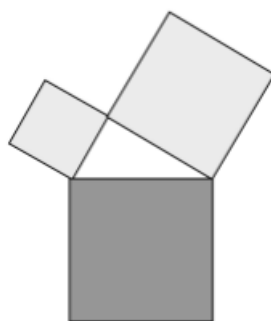
1.3 O Enunciado do Teorema de Pitágoras

Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.

Se a é a medida da hipotenusa e se b e c são as medidas dos catetos, o enunciado do Teorema de Pitágoras equivale a afirmar que

$$a^2 = b^2 + c^2$$

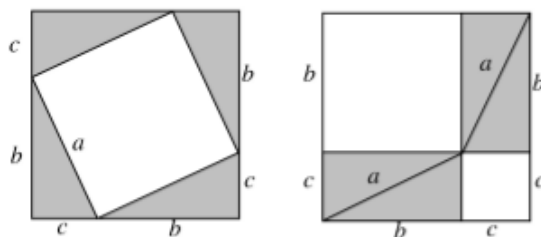
Observando a figura abaixo, o Teorema de Pitágoras afirma que a área sombreada em tom mais claro é igual à área mais escura.



Este fato não é evidente! Muito pelo contrário, é misterioso e intrigante. Para que possamos nos convencer da verdade dessa afirmação, precisamos de uma demonstração. Vamos ver algumas.

1.4 A demonstração clássica

Dado um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c , considere o quadrado cujo lado é $b + c$.

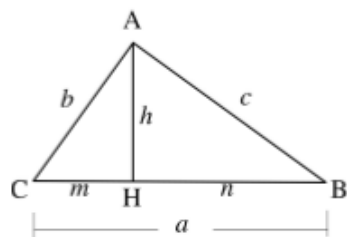


Na figura da esquerda, retiramos do quadrado de lado $b + c$ quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado a . Na figura da direita, retiramos também do quadrado de lado $b + c$ os quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado b e um quadrado de lado c . Logo, a área do quadrado de lado a é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados medem b e c .

Esta simples e engenhosa demonstração pode ter sido a que os pitagóricos imaginaram.

1.5 A demonstração que usa semelhança

Esta talvez seja a demonstração mais frequente. A partir de um triângulo ABC , retângulo em A , traçamos a altura AH e verificamos que os triângulos AHB e AHC são semelhantes ao triângulo ABC .



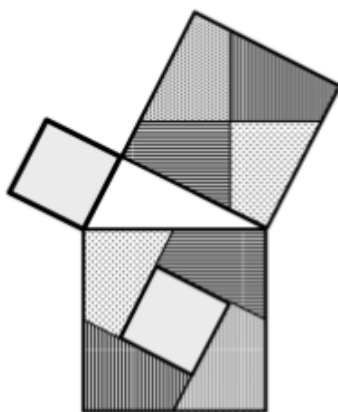
Da semelhança dos triângulos AHC e ABC temos $b^2 = am$ e, da semelhança dos triângulos AHB e ABC , temos $c^2 = an$. Somando essas duas relações membro a membro, encontramos:

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m + n) = a \times a = a^2$$

Esta demonstração é a mais frequente hoje nas escolas porque permite, com um único e pequeno esforço, não só demonstrar o Teorema de Pitágoras de forma bastante simples, como também encontrar as relações importantes do triângulo retângulo. Além das duas relações, que deram origem à demonstração do teorema, obtemos a relação $bc = ah$, que também se interpreta com o conceito de área, e $h^2 = mn$, que revela o importante fato de que a altura é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

1.6 A demonstração de Perigal

Henry Perigal, um livreiro em Londres, publicou em 1873 a demonstração que se pode apreciar na figura a seguir. Trata-se da forma mais evidente de mostrar que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos preenchem o quadrado construído sobre a hipotenusa.



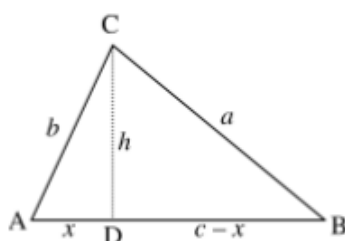
Perigal corta o quadrado construído sobre o maior cateto por duas retas passando pelo seu centro, uma paralela à hipotenusa do triângulo e outra perpendicular, dividindo esse quadrado em quatro partes congruentes. Essas quatro

partes e mais o quadrado construído sobre o menor cateto, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa.

1.7 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

A pergunta agora é: se a , b e c são reais positivos com $a^2 = b^2 + c^2$ será o triângulo de lados a , b , e c retângulo? Intuitivamente, pensamos que sim. Mas, devemos demonstrar isto. Consideremos então um triângulo ABC com $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$.

1° caso: $A < 90^\circ$ Imaginemos que $b \leq c$. Assim, o ponto D , projeção de C sobre AB , cai no interior do lado AB . Sejam $AD = x$ e $CD = h$.



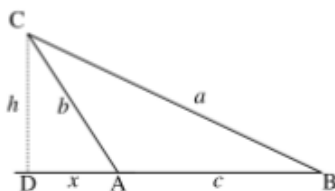
Como o triângulo ADC é retângulo, temos $b^2 = h^2 + x^2$. Como o triângulo BDC é retângulo, temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (c - x)^2 \\ a^2 &= b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cx \end{aligned}$$

ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$, que contradiz a condição inicial.

2° caso: $A > 90^\circ$

Agora, o ponto D cai fora do lado AB .



Os mesmos cálculos que fizemos no caso anterior nos levam a

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx,$$

ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$, novamente contradizendo a condição inicial.

Demonstramos então que em um triângulo ABC , de lados a , b e c ,

$$A < 90^\circ \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$A > 90^\circ \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

Assim, a condição $a^2 = b^2 + c^2$ implica necessariamente que $A = 90^\circ$.

1.8 Ternos Pitagóricos

O triângulo de lados 1, 3 e $\sqrt{10}$ é retângulo? Sim, pois

$$(\sqrt{10})^2 = 1^2 + 3^2$$

Durante toda a história antiga e mesmo até hoje, temos curiosidade em encontrar triângulos retângulos cujos lados são medidos por números inteiros. Todos nós sabemos que o triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo, mas você sabia que o triângulo de lados 372, 925 e 997 é retângulo? Possivelmente não, e eu também não o conhecia antes de redigir estas notas. Este é inclusive o triângulo retângulo de maior perímetro que tem lados menores que 1000. Nossa curiosidade nos leva a seguinte pergunta:

Como encontrar triângulos retângulos cujos lados tenham medidas inteiras?

Definição. Sendo a , b e c inteiros positivos com $b < c < a$ dizemos que (b, c, a) é um terno pitagórico se $a^2 = b^2 + c^2$. Assim, $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$ são exemplos de ternos pitagóricos.

Um terno pitagórico (b, c, a) é chamado primitivo, quando b e c são primos entre si, ou seja, quando $\text{mdc}(b, c) = 1$. Assim, $(3, 4, 5)$ é um terno pitagórico primitivo. Naturalmente, qualquer terno da forma $(3k, 4k, 5k)$ com k inteiro e maior que 1 é também pitagórico, mas não primitivo.

1.9 Uma fórmula que gera ternos pitagóricos

Sendo m e n inteiros positivos com $m > n$ considere:

$$b = m^2 - n^2, c = 2mn, a = m^2 + n^2.$$

Veja que (b, c, a) é um terno pitagórico pois:

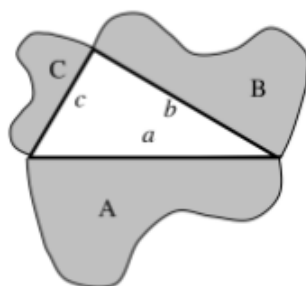
$$b^2 + c^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + n^4 + 2m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2 = a^2.$$

Assim, para qualquer escolha de números inteiros m e n , o terno (b, c, a) é pitagórico. Por exemplo, para $m = 7$ e $n = 4$ encontramos o terno pitagórico $(33, 56, 65)$. Observe que, se nesta fórmula você atribuir para m e n valores ambos pares ou ambos ímpares, você encontrará um terno pitagórico não primitivo, pois todos os termos do terno serão pares. Se a sua escolha de m e n conduzir a

valores de b e c que sejam primos entre si, você encontrará um terno pitagórico primitivo. Esta fórmula é atribuída a Platão (séc.4 a.C.), mas existem outras que você verá nos exercícios.

1.10 Generalizando o Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras afirma que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Agora, imaginemos figuras semelhantes quaisquer, construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.



Sejam então A , B e C as áreas de figuras semelhantes, construídas sobre a hipotenusa a e sobre os catetos b e c de um triângulo retângulo, como mostra a figura acima. Sabemos que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Então,

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \text{ ou } \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$$

$$\frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \text{ ou } \frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2}$$

Portanto,

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}$$

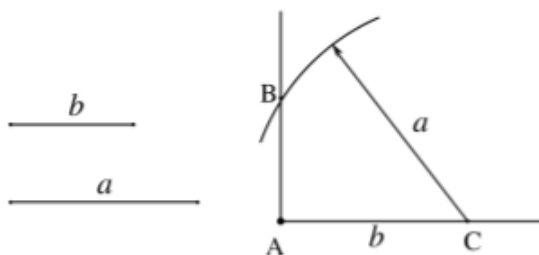
Pela propriedade das proporções, como $a^2 = b^2 + c^2$, concluímos que $A = B + C$. Isto quer dizer que, se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos. Esta é uma generalização do teorema de Pitágoras.

1.11 Construções Geométricas e o Triângulo Retângulo

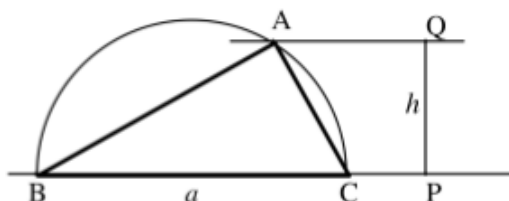
Construir um triângulo retângulo conhecendo dois de seus lados não é difícil.

- a) Se os dois catetos são conhecidos, traçamos duas semirretas perpendiculares e, com o compasso, transportamos sobre elas as medidas dos catetos.

- b) Se conhecemos a hipotenusa e um dos catetos, traçamos novamente as duas semirretas perpendiculares, assinalamos sobre uma delas o cateto $AC = b$ e, com centro em C , traçamos uma circunferência de raio a , que determina na outra semirreta o vértice B .



- c) Suponha agora que se conheça a hipotenusa ($BC = a$) e a altura relativa a ela ($AH = h$). Como o triângulo retângulo pode ser inscrito em uma semicircunferência cujo diâmetro é a hipotenusa, fazemos o seguinte. Traçamos a circunferência de diâmetro $BC = a$ e, sobre uma perpendicular à reta BC traçamos o segmento $PQ = h$. A paralela a BC traçada por Q determina o vértice A sobre a semicircunferência.



1.12 A média aritmética e a média geométrica

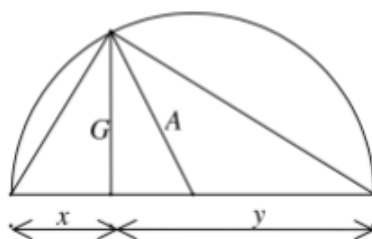
Dados dois números positivos x e y definimos a média aritmética e a média geométrica deles da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{média aritmética: } A &= \frac{x+y}{2} \\ \text{média geométrica: } G &= \sqrt{xy}. \end{aligned}$$

Dados dois segmentos quaisquer, sejam x e y suas medidas. Podemos visualizar estas duas médias no desenho abaixo. O diâmetro da semicircunferência é $x+y$, o segmento que representa a média aritmética é o raio, e o segmento que representa a média geométrica é a altura do triângulo retângulo que possui x e y como as projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Então $G \leq A$ e $G = A$ equivale a $x = y$.

Vamos mostrar agora a solução gráfica de uma equação do tipo

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0.$$



Inicialmente, explicaremos por que a equação está escrita desta forma. Nas construções geométricas, cada letra representa um segmento. Por sua vez, cada segmento representa um número real positivo que é a sua medida em uma certa unidade. Antigamente, há dois mil anos, não existia o conceito de número real. A palavra número significava, na Grécia antiga, número natural. As frações existiam, mas não eram consideradas números, eram apenas razões entre números. De qualquer forma, o que chamamos hoje de números racionais, já existiam, mas os números irracionais ainda estavam muito longe de serem descobertos. Para contornar esta dificuldade, os gregos imaginaram uma solução genial: representar todas as grandezas por segmentos de reta. Eles, naturalmente, não conseguiam medir todos os segmentos, porque não tinham números suficientes, mas isto não importava. Toda grandeza podia ser representada por um segmento de algum tamanho. As operações de adição e subtração podem ser feitas com segmentos. Um segmento pode ser multiplicado por um número natural ou dividido em qualquer número de partes iguais.

As construções geométricas nada mais são que operações com segmentos. Além de somar, subtrair, multiplicar ou dividir por número natural, o que mais se pode fazer com recursos exclusivamente gráficos, usando basicamente a régua e o compasso? Muita coisa, desde que se perceba que regras são naturalmente impostas.

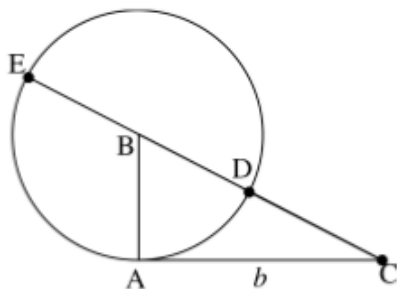
Em primeiro lugar, se a e b são segmentos, não existe nada, por exemplo, que se represente por $a^2 + b$. Isto porque a^2 é a área de um quadrado de lado a que, naturalmente, não pode ser somado com um segmento. Portanto, contas que hoje fazemos sem preocupação com números naturais, não tinham significado no passado. Assim, a equação $x^2 - 2ax + b^2 = 0$, que vamos resolver, tinha antigamente o seguinte significado.

Os segmentos a e b são dados. A solução da equação é o segmento x , tal que a área do quadrado de lado x somada com a área do quadrado de lado b é igual à área do retângulo, cuja base é o dobro de a e cuja altura é x . Para encontrar este segmento x vamos, inicialmente, aplicar a conhecida fórmula da equação do segundo grau:

$$x = \frac{2a \pm \sqrt{(2a)^2 - 4b^2}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Esta expressão é fácil de construir, pois $\sqrt{a^2 - b^2}$ representa um dos catetos de um triângulo retângulo que possui hipotenusa a e o outro cateto igual a b .

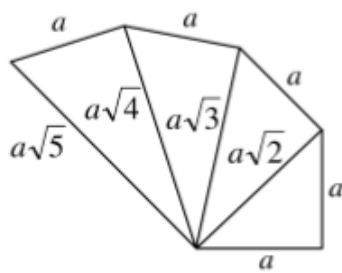
Portanto, dados dois segmentos a e b com $a > b$ construímos o triângulo ABC com cateto $AC = b$ e hipotenusa $BC = a$ e as soluções x_1 e x_2 da equação $x^2 - 2ax + b^2 = 0$ estão na figura a seguir:



Nesta figura, $AC = b$, $CB = a$, $BA = BD = BE = \sqrt{a^2 - b^2}$ e, portanto, $CD = x_1 = a - \sqrt{a^2 - b^2}$ e $CE = x_2 = a + \sqrt{a^2 - b^2}$.

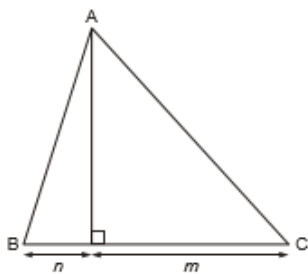
1.13 Segmentos do tipo $a\sqrt{n}$

Observe que, dado um segmento a , obter o segmento $a\sqrt{2}$ é muito fácil. Basta desenhar um triângulo retângulo com os dois catetos iguais a a . A hipotenusa desse triângulo é igual a $a\sqrt{2}$. Na figura a seguir, mostramos que, traçando segmentos de comprimento a , perpendiculares à hipotenusa de cada triângulo anterior, obtemos a sequência de segmentos $a\sqrt{n}$, com n natural.



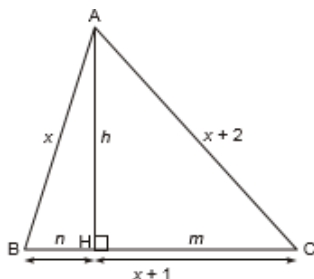
1.14 Exercícios

1. No triângulo ABC , o comprimento dos lados AB , BC e CA , nessa ordem, são números inteiros e consecutivos. A altura relativa a BC divide este lado em dois segmentos de comprimentos m e n , como indicado. Quanto vale $m - n$?



- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 6

Solução:(alternativa D)



Colocando $AB = x$ temos $BC = x + 1$ e $AC = x + 2$. Seja h a altura relativa a BC . Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos ABH e AHC obtemos $n^2 + h^2 = x^2$ e $(x + 2)^2 = m^2 + h^2$. Segue que $h^2 = x^2 - n^2$ e $h^2 = (x + 2)^2 - m^2$, donde $(x + 2)^2 - m^2 = x^2 - n^2$, ou seja, $(x + 2)^2 - x^2 = m^2 - n^2$.

Usando a identidade $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ obtemos então $(x + 2 - x)(x + 2 + x) = (m - n)(m + n)$. Como $m + n = x + 1$ segue que $2(2x + 2) = (m - n)(m + n)$, segue que, donde $4(x + 1) = (m - n)(x + 1)$. Como $x + 1 \neq 0$ podemos dividir ambos os membros desta última expressão por $x + 1$ e obtemos finalmente $m - n = 4$.

2. Determine a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo se seus catetos medem:

a) 3cm e 4cm.

b) 5cm e 12cm.

c) 1cm e 1cm.

d) $\frac{1}{2}cm$ e $\frac{3}{2}cm$.

e) $\sqrt{3}cm$ e $\sqrt{5}cm$.

Solução: Chamando a medida da hipotenusa de a , temos

a)

$$a^2 = 3^2 + 4^2$$

$$a^2 = 25$$

$$a = 5.$$

b)

$$a^2 = 5^2 + 12^2$$

$$a^2 = 169$$

$$a = 13.$$

c)

$$a^2 = 1^2 + 1^2$$

$$a^2 = 2$$

$$a = \sqrt{2}.$$

d)

$$a^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$a^2 = \frac{10}{4}$$

$$a = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

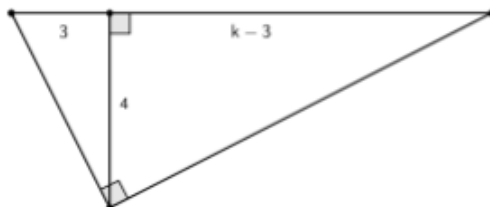
e)

$$a^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{5}^2$$

$$a^2 = 8$$

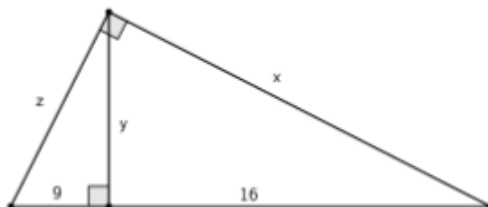
$$a = 2\sqrt{2}.$$

3. Determine o valor de k na figura abaixo.



Solução: Aplicando as relações métricas no triângulo retângulo, temos $3(k - 3) = 4^2$. Segue que $k = \frac{25}{3}$.

4. Determine os valores de x , y , z , no triângulo abaixo.

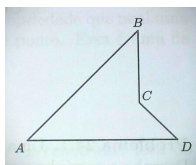


Solução: Usando as relações métricas no triângulo retângulo, temos, inicialmente, $y^2 = 9 \times 16$, segue que $y = 12$. Aplicando agora o Teorema de Pitágoras, temos $x^2 = 16^2 + 12^2$ e $z^2 = 9^2 + 12^2$. Segue que $x = 20$ e $z = 15$.

4. Duas palmeiras crescem em lados opostos de um rio. Uma tem $10m$ de altura e a outra tem $15m$. A distância entre as bases das árvores é de $25m$. No topo de cada palmeira está um pássaro. Um peixe aparece no rio entre as árvores e os dois pássaros mergulham na direção dele simultaneamente. Se os pássaros voam ao longo de retas a velocidades iguais e alcançam o peixe no mesmo instante, a que distância da base da palmeira mais baixa o peixe apareceu?

Solução: Podemos chutar uma resposta. Se o peixe tiver aparecido em um ponto a $15m$ da base da palmeira mais baixa, estará a $10m$ da base da palmeira mais alta. Então o triângulo formado ligando-se a base e o topo da palmeira mais baixa a esse ponto é congruente ao triângulo formado por esse ponto, a base e o topo da palmeira mais alta. Assim os pássaros alcançariam o peixe simultaneamente.

5. A vela de um barco tem a forma do quadrilátero $ABCD$, como mostra o diagrama. Os ângulos A , B , C têm 45° cada, enquanto que C tem 225° . Se $AC = 4$ metros, encontre a área da vela.



Solução: Estenda o lado BC até intersectar o lado AD no ponto M . Os ângulos A e B do triângulo AMB têm 45 graus cada, logo este triângulo é um triângulo retângulo isósceles. Analogamente, o triângulo CMD também é um triângulo retângulo isósceles. Sejam $AM = x$ e $CM = y$. A área da vela é igual a soma das áreas dos triângulos AMB e CMD , de modo que é igual a $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$. Pelo Teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = AC^2 = 4^2 = 16$. Portanto, a área da vela é $8m^2$.