Aritmética 3

Izabela Silva

Números Primos

- Definição: Um número natural, diferente de zero ou 1, é **primo** se é divisível apenas por 1 e por ele mesmo. Caso contrário, é dito **composto**, ou seja, pode ser escrito por produto de números primos.

Obs.: Dos seguintes números: 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13

Números Primos:

2, 3, 5, 7, 11, 13

Números Compostos:

4(2×2), 6(2× 3), 8(2×2×2), 10(2× 5)

Fatoração

Observe o número $12 = 2 \times 2 \times 3$

- Cada uma das parcelas é um número primo que não pode ser escrito como um produto de números menores;
- 12 está fatorado como um produto de números primos;
- $2 \times 2 \times 3$ é uma fatoração do número 12 em números primos.

$$\Downarrow$$

Teorema Fundamental da Aritmética

Todo número natural maior que 1 pode ser escrito como um produto de números primos.

- $1820 = 2^2 \times 5 \times 7 \times 13$

Verificamos que apenas os números $2, 5, 7, 13$ dividem 1820 e que, portanto, nenhum outro número primo divide 1820 $\Rightarrow$ Quando vemos um número fatorado como produto de números primos, somente os primos que aparecem nesta fatoração são divisores do número dado.

- Em linguagem matemática: Um número primo p divide um certo número natural a somente quando p é um dos fatores primos que aparece na fatoração de a.

Máximo Divisor Comum

- *Exercício 1:* **Dois rolos de arame, um de 210 metros e outro de 330 metros, devem ser cortados em pedaços de mesmo comprimento. De que modo isto pode ser feito se desejamos que cada um destes pedaços tenha o maior comprimento possível?**
- *Solução:* Primeiramente pode-se discutir algumas possibilidades.
- Podemos cortar cada um dos rolos em pedaços de um metro, obtendo 210 pedaços de um rolo e 330 pedaços de outro rolo.
- Mas podemos obter pedaços maiores, cortando em pedaços de, digamos, três metros. Neste caso obtemos $\frac{210}{3} =$ 70 pedaços de um rolo e $\frac{330}{3} =$ 110 pedaços do outro rolo.

- Podemos obter um pedaço ainda maior, de 10 metros, obtendo $\frac{210}{10} = 21$ pedaços de um rolo e $\frac{330}{10} =$ 33 pedaços do outro rolo.
- Queremos dividir cada um dos rolos em pedaços de, digamos, d metros ⇒ d deve ser divisível por 210 e 330 .

$$D(210) = \{1,2,3,5,6,7,10,14,15,21,30,35,42,70,105,210\}$$
$$D(330) = \{1,2,3,5,6,10,11,15,22,30,33,55,66,110,165,330\}$$

$$D(210) \cap D(330) = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$$

- Mas, segundo o enunciado, queremos pedaços do maior comprimento possível que, segundo nossa interpretação, deve ser o maior divisor comum dos números 210 e 330. Da lista anterior, vemos que este numero e 30. Deste modo, então, podemos dividir os rolos em pedaços de 30 metros, obtendo $\frac{210}{3} = 7$ pedaços e $\frac{330}{30} = 11$ pedaços.
- Assim, podemos dizer que: *mdc(a,b)* é o maior divisor comum de *a* e *b*.

Mínimo Múltiplo Comum

- *Exemplo:* Uma lâmpada pisca de 14 em 14 segundos e uma outra lâmpada pisca de 20 em 20 segundos. Um cronômetro zerado foi ligado exatamente quando estas lâmpadas piscam juntas. Se o cronômetro foi desligado na primeira vez que as lâmpadas piscaram juntas novamente, que tempo ele marcou?
- *Solução:*
- Como uma das lâmpadas piscam de 14 em 14 segundos, ela vai piscar nos instantes 0, 14, 28 42, ... ou seja em todos os múltiplos de 14.
- Análogo, para a lâmpada que pisca de 20 em 20 segundos, todos os instantes são múltiplos de 20.

$$M(14) = \{14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126, 140, 154, ...\}$$
$$M(20) = \{20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, ...\}$$

Então, vemos que as lâmpadas vão piscar juntas nos instantes que são múltiplos comuns de 14 e 20. Como, o exercício pede para determinar o instante em que as lâmpadas vão piscar juntas, esse instante pé identificado como o menor múltiplo comum entre 14 e 20, que é igual a 140 segundos.

A partir desse exemplos temos que: *mmc(a,b)* é o menor múltiplo comum de *a* e *b*.

Calculo do *mdc* e do *mmc:* dada a fatoração

- *Exemplo 1:* Se $a=2^2.3.5$ e $b = 2^3.5^2$, liste os divisores comuns de a e b.
- *Solução:* Se d é divisor de a, os únicos fatores primos de d são $2,3,5$.

Se d é um divisor de b, os únicos fatores primos de d são $2,5$.

$a \cap b = 2$ e 5, assim, $d = 2^x.5^y$

- x não pode ser maior que 2 e 3, que são os expoentes do fator primo 2 nas fatorações;
- De modo análogo, y não pode ser maior que 1 e 2.

- Assim, o máximo de expoente que *x* pode assumir é 2 e *y* é 1.

$$x=\{0,1,2\} \text{ e } y=\{0,1\}$$

- Possibilidades de divisores comuns entre *a* e *b*:

$$x = 0 \text{ e } y = 0 \Rightarrow d = 20\ 50 = 1.$$

$$x = 0 \text{ e } y = 1 \Rightarrow d = 20\ 51 = 5.$$

$$x = 1 \text{ e } y = 0 \Rightarrow d = 21\ 50 = 2.$$

$$x = 1 \text{ e } y = 1 \Rightarrow d = 21\ 51 = 10.$$

$$x = 2 \text{ e } y = 0 \Rightarrow d = 22\ 50 = 4.$$

$$x = 2 \text{ e } y = 1 \Rightarrow d = 22\ 51 = 20.$$

Da lista observamos que $mdc(a,b)=20$.

Calculo do *mdc* e do *mmc: fatorando simultaneamente*

- *Exemplo:* Calcule *mdc e mmc* de 980 e 1050.
- *Solução:* Marcamos com um quadradinho os fator primo que divide os dois números simultaneamente.

$$
\begin{array}{rr|c}
980, & 1050 & \boxed{2} \\
490, & 525 & 2 \\
245, & 525 & 3 \\
245, & 175 & \boxed{5} \\
49, & 35 & 5 \\
49, & 7 & \boxed{7} \\
7, & 1 & 7 \\
1, & 1 &
\end{array}
$$

Assim, *mdc*(980,1050)=$2.5.7 = 70$ e

mmc(980,1050)=$2^2.3.5^2.7^2 = 14700$