

**Lista de Questões – OBMEP NA ESCOLA
Grupo N3 – Ciclo 2**

Em 2017 o Planejamento Acadêmico do Programa OBMEP na Escola prevê a realização de atividades avaliativas em forma de listas de questões. A cada ciclo serão elaboradas pelo Comitê Acadêmico listas com 5 exercícios, sendo que três dessas questões são retiradas de provas anteriores OBMEP, presentes na segunda fase. Essas três questões devem ser resolvidas pelos alunos em casa e posteriormente as soluções são discutidas com os professores. As duas outras questões devem ser resolvidas em sala de aula, como forma de avaliação e de estímulo ao estudo contínuo.

As três questões da segunda fase da OBMEP distribuídas para os alunos em cada ciclo podem ser entendidas como uma espécie de “tarefa de casa”. Entre duas aulas quinzenais com os Professores da Educação Básica (PEB), desejamos que os alunos estudem continuamente, resolvendo pelo menos essas questões, além de assistirem videoaulas no Portal da Matemática, estudarem os bancos de questões, etc.

Não existe uma recomendação explicita para os PEB recolherem dos alunos as soluções destas três questões, embora isso possa ser feito. Entretanto, existe a recomendação de que, em algum momento, essas questões sejam discutidas e que as dúvidas dos alunos sejam esclarecidas pelos professores. Este momento de discussão será muito mais proveitoso para aqueles alunos que leram, tentaram entender o enunciado e tentaram resolver as questões. Para os alunos que não leram as questões, este momento de discussão será menos proveitoso e, deste modo, esperamos que as discussões coletivas das questões deixadas como “tarefa de casa” motivem que todos os alunos se dediquem para resolverem as tarefas deixadas para casa.

As duas questões resolvidas em sala de aula devem ser corrigidas pelos Professores da Educação Básica (PEB) e as soluções ou os eventuais erro mais frequentes também devem ser discutidos com os alunos. A participação dos alunos nessas questões deve ser entendida como mais um momento de aprendizado. Esta é uma oportunidade para os alunos perceberem as partes dos conteúdos que já entenderam melhor e aqueles conceitos e resultados que ainda precisam de maior dedicação. Para essas duas questões, os professores atribuirão uma nota de 0 a 10 para cada aluno da sua turma.

A seguir fornecemos a lista com as cinco questões referentes aos conteúdos presentes no ciclo 3, as soluções, os critérios de correção e alguns comentários, se for o caso.

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N3 – ciclo 2

**ENUNCIADOS: três questões para serem resolvidas em casa com discussão posterior**

**Tarefa de casa 1** **(Prova OBMEP 2012 – 2a Fase – N3 – Questão 3)**

Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura abaixo, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.



1. Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de $3×2×2$ maneiras diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?
2. De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3?
3. De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0?
4. Escreva uma expressão numérica que permita calcular de quantas maneiras Juca pode pintar o número 2013.

**Tarefa de casa 2** **(Prova OBMEP 2011 – 2a Fase – N3 – Questão 5)**

Em uma caixa há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em 10 partes iguais. Nos itens a seguir, considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição.



1. Se forem retiradas duas bolas, qual é a probabilidade de que o segmento determinado pelos pontos correspondentes seja um diâmetro da circunferência?
2. Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo retângulo? U*m ângulo inscrito em uma circunferência é reto se, e somente se, o arco correspondente é uma semicircunferência.*
3. Se forem retiradas quatro bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um retângulo?

**Tarefa de casa 3 (Prova OBMEP 2012 – 2a Fase – N3 – Questão 5)**

Em uma caixa há 9 bolas amarelas numeradas de 1 a 9 e, em uma segunda caixa, há 9 bolas brancas, também numeradas de 1 a 9. Todas as bolas são idênticas, exceto por sua cor e seu número. Uma bola amarela é sorteada e colocada na segunda caixa; a seguir, uma bola é sorteada da segunda caixa.

1. Qual é a probabilidade de que a bola sorteada da segunda caixa seja amarela?
2. Qual é a probabilidade de que as duas bolas sorteadas tenham o mesmo número?
3. Qual é a probabilidade de que a bola sorteada da segunda caixa tenha o número 1?

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N3 – ciclo 2

**ENUNCIADOS: duas questões para serem resolvidas em sala de aula**

**Questão 1**

<http://www.obmep.org.br/bq/bq2014.pdf> (Banco de Questões 2014 - Nível 3 - Questão 17)

Papai Noel chegou à casa de Arnaldo e Bernaldo carregando dez brinquedos distintos e enumerados de 1 a 10 e disse a eles: “o brinquedo número 1 é para você, Arnaldo, e o brinquedo número 2 é para você, Bernaldo. Mas esse ano, vocês podem escolher ficar com mais brinquedos contanto que deixem ao menos um para mim”. Diga de quantos modos Arnaldo e Bernaldo podem dividir entre eles o restante dos brinquedos (deixando pelo menos um para Papai Noel).

**Questão 2**

<http://www.obmep.org.br/bq/bq2012.pdf> (Banco de Questões 2012 - Nível 3 - Questão 16)

André, Bianca, Carlos e Dalva querem sortear um livro entre si. Para isto, colocam 3 bolas brancas e 1 preta em uma caixa e combinam que, em ordem alfabética de seus nomes, cada um tirará uma bola, sem devolvê-la à caixa. Aquele que tirar a bola preta ganhará o livro.

1. Qual é a probabilidade de que André ganhe o livro?
2. Qual é a probabilidade de que Dalva ganhe o livro?

Para sortear outro livro entre eles, André sugeriu usar 2 bolas pretas e 6 brancas. Como antes, o primeiro que tirar uma bola preta ganhará o livro; se as primeiras quatro bolas saírem brancas, eles continuarão a retirar bolas, na mesma ordem. Nesse novo sorteio:

1. Qual é a probabilidade de que Dalva ganhe o livro?

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N3 – ciclo 2

**SOLUÇÕES e COMENTÁRIOS**

**Solução da tarefa de casa 1**<http://www.obmep.org.br/provas_static/sf2n3-2012.pdf>

a) O algarismo 1 é composto por dois polígonos, indicados na figura por A e B. Para pintar o polígono A, há 3 opções: branco, cinza e preto. Já para pintar o polígono B, há 2 opções, uma vez que sua cor não pode coincidir com aquela já usada para pintar A. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 1 pode ser pintado de $3×2=6$ maneiras distintas.



b) Iniciamos observando que há 3 opções para pintar o polígono A. Uma vez que A foi pintado, há duas opções para pintar o polígono B e, como o polígono C é vizinho de A e B, só há uma cor possível para C. A cor do polígono D não deve coincidir com a cor de B, logo para cada cor escolhida para B, há 2 opções para a cor de D. Analogamente, há 2 opções para a cor de E. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $3×2×1×2×2=24$ maneiras distintas para pintar o algarismo 3.



c) Vamos distinguir dois casos.

* As cores de A e B coincidem: neste caso há 3 opções de cores para A e B, e restam 2 opções de cores para C e 2 para D. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de $3×2×2=12$ maneiras distintas.
* As cores de A e B são diferentes: neste caso, há 3 opções de cores para pintar A e, para cada uma dessas, há 2 opções para pintar B, restando apenas 1 opção para C e também para D. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de $3×2×1×1=6$ maneiras distintas.

Segue do Princípio Aditivo que o algarismo 0 pode ser pintado de $12+6=18$ maneiras distintas.



d) Basta pintar os algarismos 2, 0, 1 e 3; o 2 pode ser pintado de $3×2×2=12$ maneiras diferentes e o número de maneiras de pintar os outros algarismos já foi calculado nos itens anteriores. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $12×6×24×18=31104$ maneiras distintas de pintar o número 2013.

**Solução da tarefa de casa 2**<http://www.obmep.org.br/provas_static/2011/sf2n3-2011.pdf>

a) 1ª solução: O princípio multiplicativo mostra que o número de maneiras de retirar duas bolas, uma a uma, é $10×9=90$. Dessas retiradas, há dez que determinam diâmetros, a saber, (1,6), (2,7), (3,8), (4,9), (5,10), (6,1), (7,2), (8,3), 9,4), (10,5). Logo a probabilidade pedida é $\frac{1}{9}$.

2ª solução: Retira-se uma bola qualquer. Das nove possibilidades de retirar outra bola, apenas uma determinará, junto com a primeira, um diâmetro. Logo a probabilidade de retirar duas bolas que determinam um diâmetro é $\frac{1}{9}$.

b) O princípio multiplicativo mostra que o número de maneiras de retirar três bolas, uma a uma, é $10×9×8=720$. Para que uma retirada determine um triângulo retângulo, ela deve conter duas bolas a e b que determinam um diâmetro e uma terceira bola x distinta dessas duas; ordenando essas bolas das $3!=6$ maneiras possíveis, vemos que há seis retiradas que consistem dessas bolas. Como há cinco pares de bolas que determinam um diâmetro e a bola extra pode ser escolhida de oito maneiras diferentes, o número de retiradas que determinam um triângulo retângulo inscrito é $6×5×8=240$. Logo a probabilidade procurada é $\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$.

c) O número de retiradas de quatro bolas é $10×9×8×7$ e cada uma dessas retiradas determina um quadrilátero inscrito. Por outro lado, as bolas de uma retirada que determina um retângulo inscrito devem determinar dois diâmetros. Há dez escolhas para a primeira bola de uma tal retirada e a bola diametralmente oposta pode então aparecer em qualquer uma das três posições seguintes; as outras duas bolas podem então ser escolhidas de oito maneiras diferentes, correspondentes aos quatro diâmetros ainda não determinados. Assim, as retiradas que determinam um triângulo retângulo são em número de $10×3×8$ e a probabilidade procurada é então $\frac{10×3×8}{10×9×8×7}=\frac{1}{21}$.

**Solução da tarefa de casa 3**<http://www.obmep.org.br/provas_static/sf2n3-2012.pdf>

a) Ao se sortear uma bola da 2ª caixa, há 10 bolas idênticas, uma das quais é amarela. Logo, a probabilidade de que a segunda bola retirada seja amarela é $\frac{1}{10}$.

b) Ao se sortear uma bola da 2ª caixa, há duas bolas com o mesmo número da primeira bola sorteada (uma amarela e uma branca). A probabilidade de que uma delas seja a 2ª bola sorteada é $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

c) 1ª solução: A primeira bola pode ser sorteada de 9 maneiras e a segunda de 10. O número total de possibilidades para o sorteio das duas bolas é, portanto, $9×10=90$. Para contar quantos são os sorteios em que a segunda bola tem o número 1, consideraremos dois casos:

* *A bola sorteada da 1ª caixa tem o número 1.* Neste caso, há apenas uma possibilidade para o sorteio da 1ª bola, mas duas para o sorteio da 2ª (já que há duas bolas com o número 1 na segunda caixa quando ela é sorteada). Logo, há $1×2=2$ formas de se obter 1 na 2ª bola.
* *A bola sorteada da 1ª caixa tem o número diferente de 1.* Neste caso, há 8 possibilidades para o sorteio da 1ª bola, e apenas uma para o sorteio da 2ª (já que há somente uma bola com o número 1 na segunda caixa quando ela é sorteada). Logo, há $8×1=8$ formas de se obter 1 na 2ª bola.

A probabilidade de que a segunda bola tenha o número 1 é, portanto,

$$\frac{número de casos favoréveis}{número de casos possíveis}=\frac{2+8}{90}=\frac{1}{9}$$

2ª solução: As bolas de 1 a 9 figuram em igual quantidade em ambas as caixas. Logo, mesmo depois de passada uma bola da 1ª para a 2ª, todos os números continuam tendo a mesma chance de serem sorteados. Portanto, a probabilidade de que a segunda bola seja a bola de número 1 é $\frac{1}{9}$.

**Solução da Questão 1 (resolvida em sala de aula)**

Para cada um dos 8 brinquedos, do número 3 ao número 10, devemos decidir se ele vai pertencer a Arnaldo, a Bernaldo ou deve ser deixado para Papai Noel. Se multiplicarmos então

$$3×3×3×3×3×3×3×3=3^{8}$$

contaremos as formas de dividir os brinquedos entre Arnaldo, Bernaldo e Papai Noel, incluindo os casos em que Papai Noel fica sem nenhum brinquedo. Restará então contar o número de formas de dividir todos os brinquedos entre Arnaldo e Bernaldo (sem deixar nada para Papai Noel), e subtrair esse número de $3^{8}$. Para dividir os brinquedos entre Arnaldo e Bernaldo devemos decidir, por cada um dos 8 brinquedos, para qual dos dois o brinquedo vai. Assim temos

$$2×2×2×2×2×2×2×2=2^{8}$$

formas de dividir os brinquedos entre Arnaldo e Bernaldo. Finalmente a resposta é

$$3^{8}-2^{8}=6305$$

formas de dividir os brinquedos.

**Critérios de correção da Questão 1** (resolvida em sala de aula)
Esta questão vale 5 pontos, distribuídos da seguinte maneira:

* Encontrar o número de formas de dividir os 8 brinquedos entre 3 pessoas: $2,0$ pontos;
* Encontrar que deve-se subtrair o número de formas de dividir os 8 brinquedos entre 2 pessoas: $2,0$ pontos;
* Concluir que a resposta é a diferença entre $3^{8}$ e $2^{8}$: $1,0$ ponto.

**Solução da Questão 2 (resolvida em sala de aula)**

a) Para André ganhar o livro ele deve retirar a bola preta. Como a caixa contém quatro bolas das quais apenas uma é preta, a probabilidade de ele retirar a bola preta é $\frac{1}{4}$.

Uma outra solução aparece na solução do item b).

b) Mantendo as regras do sorteio, vamos pintar uma bola branca de azul e outra de vermelho; temos então quatro bolas diferentes na caixa. O número de sorteios possíveis passa a ser $4×3×2×1=24$; desses, Dalva ganha o livro quando André, Bianca e Carlos ficam com as bolas branca, azul e vermelha, o que pode acontecer de $3×2×1=6$ maneiras diferentes. Logo, a probabilidade de Dalva ganhar o livro é $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$. Esse raciocínio se aplica a qualquer um dos amigos, justificando assim o comentário anterior sobre a justiça do sorteio.

c) Dalva só pode ganhar o livro no caso em que as três primeiras bolas sorteadas sejam brancas e a quarta preta. De fato, se as quatro primeiras bolas sorteadas forem brancas, sobrarão na caixa duas brancas e duas pretas e uma bola preta será retirada antes que chegue a sua vez. As quatro primeiras bolas podem ser sorteadas de $8×7×6×5$ modos. Para que Dalva ganhe o livro, as três primeiras devem ser brancas e a quarta preta, o que pode ocorrer de $6×5×4×2$ modos. Logo, a probabilidade de que Dalva ganhe o livro é $\frac{6×5×4×2}{8×7×6×5}=\frac{1}{7}$.

**Critérios de correção da Questão 2** (resolvida em sala de aula)
Esta questão vale 5 pontos, distribuídos da seguinte maneira:

* Resolver o item a): $1,0$ ponto;
* No item b) contar o número de casos possíveis: $1,0$ ponto;
* No item b) contar o número de casos favoráveis e concluir: $1,0$ ponto;
* No item c) provar que Dalva só pode ganhar o livro se as três primeiras bolas sorteadas são brancas e a quarta preta. $1,0$ ponto;
* No item c) contar o número de casos possíveis, casos favoráveis e concluir: $1,0$ ponto.