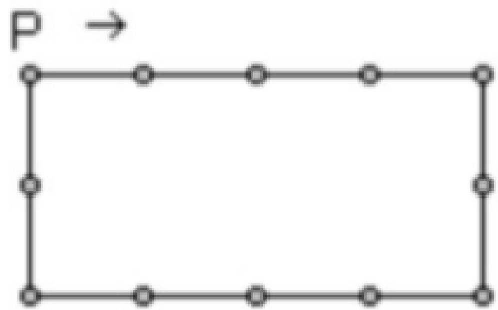
Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Aula 1 – 5º Encontro

Fenômenos Periódicos Padrões

29/10/2016

1. (Exercício 6, pág. 32, "Encontros de Aritmética")
Pedro caminha ao redor de uma praça retangular onde estão dispostas 12 árvores, brincando de tocar cada árvore durante seu passeio. Se no início ele toca árvore indicada na figura que segue, e se ele anda no sentido da seta, indique que árvore ele estará tocando ao encostar em uma árvore pela centésima vez.

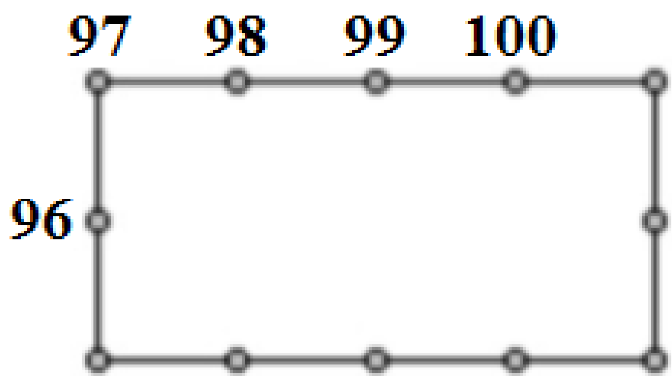


1) Observe que a árvore indicada pela letra P, recebe o número 1, 13, 25, 37, ... que são todos os números que deixam resto 1 quando divididos por 12.

Dividindo 100 por 12 temos, obtemos quociente 8 e resto 4, isto é,

$$100 = 8 \cdot 12 + 4$$

Daí vemos que na centésima vez, Pedro estará tocando a árvore que está 3 posições à frente daquela indicada por P.



2. (OBMEP 2016 – N1Q5 – 2ª fase) Joana fez um quadriculado com 5 linhas e 2016 colunas com as casas amarelas seguindo o padrão da figura, ou seja, subindo e descendo diagonalmente. Em seguida, ela escreveu os números naturais nas casas amarelas em ordem crescente, a partir do 1, de cima para baixo e da esquerda para a direita. Observe abaixo como Joana começou a escrever os números no quadriculado.

a) Qual foi o maior número que Joana escreveu na coluna 9?

b) Qual foi o maior número que Joana escreveu na coluna 2016?

c) Em qual coluna foi escrito o número 597?

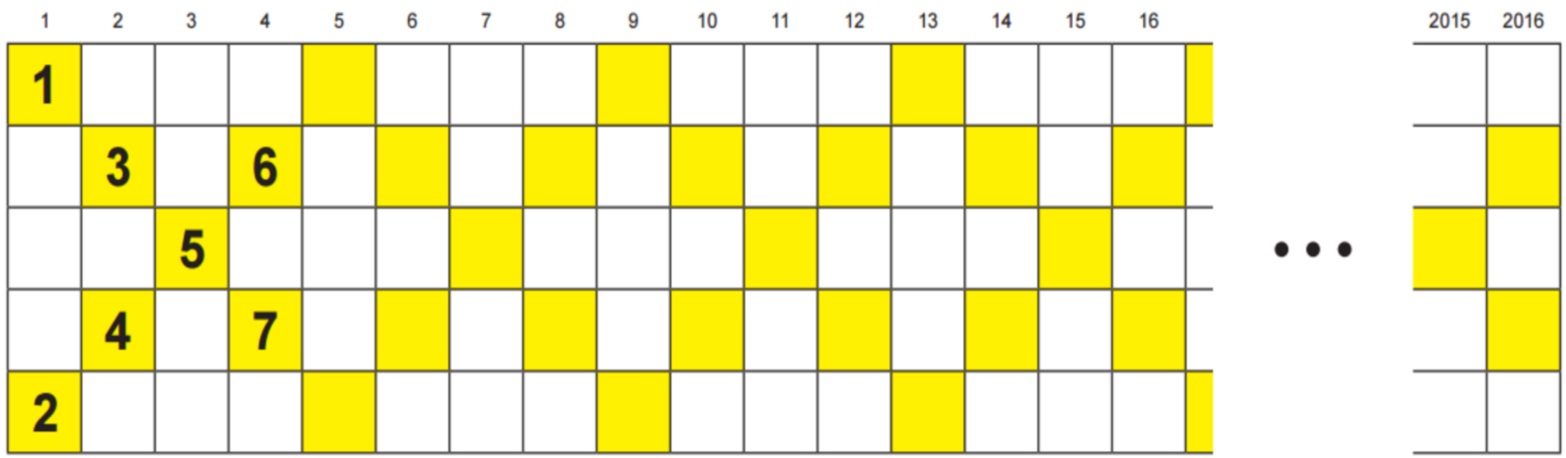
d) Em qual coluna a soma dos dois números escritos é 713?

a) Qual foi o maior número que Joana escreveu na coluna 9?

b) Qual foi o maior número que Joana escreveu na coluna 2016?

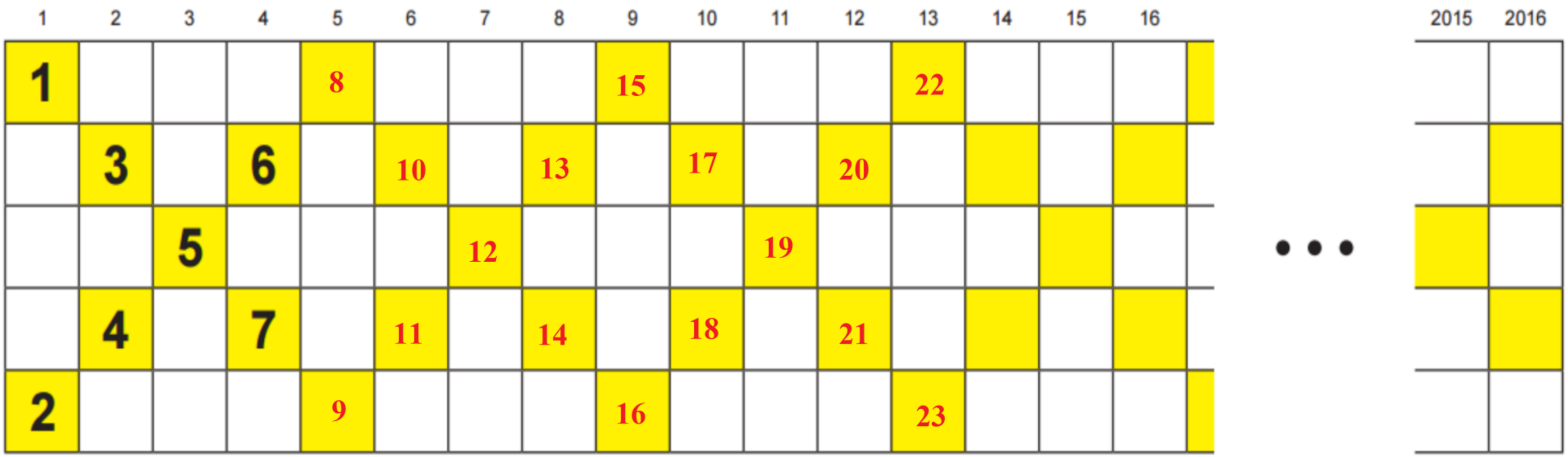
c) Em qual coluna foi escrito o número 597?

d) Em qual coluna a soma dos dois números escritos é 713?



2)

a) 1º modo: Podemos ir simplesmente completando o tabuleiro até a coluna 9.



2º modo: Observe que as casas amarelas estão distribuídas de modo que, a cada 4 colunas, a disposição dessas casas se repete.

Portanto, a distribuição das casas amarelas na coluna 9 é a mesma da coluna 1, pois

$$9 = 4 + 4 + 1 \quad ou \quad 9 = 2 \cdot 4 + 1$$

Além disso, observamos que os números escritos em linhas ímpares, a partir da coluna 4, são obtidos somando-se 7 aos respectivos números escritos na mesma linha e na quarta coluna anterior. Consequentemente, o maior número que Joana escreveu na coluna 9 é

$$2 + 7 + 7 = 16 \quad ou \quad 7 \cdot 2 + 2 = 16$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		2015	2016
1				8				15				22						
	3		6		10		13		17		20							
		5				12				19						• • •		
	4		7		11		14		18		21							
2				9				16				23						

b) Qual foi o maior número que Joana escreveu na coluna 2016?

Sabemos que a cada 4 colunas temos um ciclo.

Logo,

$$2016 = 4 \cdot 504$$

Isto é, 2016 é a última coluna do ciclo 504.

Observe que

$$\text{Ciclo } 1 \text{ , última casa é } 7 = 7 \cdot 1$$

$$\text{Ciclo } 2 \text{ , última casa é } 14 = 7 \cdot 2$$

$$\text{Ciclo } 3 \text{ , última casa é } 21 = 7 \cdot 3$$

.....

$$\text{Ciclo } 504 \text{ , última casa é } 7 \cdot 504 = 3528$$

Portanto Joana escreveu o número 3528 na maior casa (de baixo) da coluna 2016.

c) Em qual coluna foi escrito o número 597?

Temos

$$597 = 7 \cdot 85 + 2$$

Isto é,

597 é o segundo número da primeira coluna do ciclo 86.

Então temos 85 ciclos completos + 1 coluna (1ª do ciclo 86).

Como cada ciclo tem 4 colunas temos:

$$4 \cdot 85 + 1 = 340 + 1 = 341$$

Portanto o número 597 será o maior número da coluna 341 (de baixo)

d) Em qual coluna a soma dos dois números escritos é 713?

Sabemos que os números estão em sequencia, então se chamarmos o número de cima de x, o outro só poderá ser $x+1$.

Somando os dois temos:

$$x+x+1=713 \Leftrightarrow 2x=713-1 \Leftrightarrow 2x=712 \Leftrightarrow x=\frac{712}{2}=356$$

Isto é,

O número de cima será 356 e o de baixo será 357.

Vamos utilizar o de baixo por ser o maior

Temos

$$357=7\cdot 51$$

Isto é, o número 357 estará na 4ª coluna (última) do ciclo 51.

Como cada ciclo tem 4 colunas temos:

$$4\cdot 51=204$$

Portanto os dois números estarão escritos na coluna 204.

3. (Exercício 10, pág. 34, "Encontros de Aritmética") O ano de 2014 começou em uma quarta-feira. Em que dia da semana cairá o último dia deste ano?

3) Como o ano iniciou numa quarta-feira, vamos contar como sendo o primeiro dia da semana, assim, o ultimo dia da semana será na terça-feira.

Sabemos que uma ano normal tem 365 dias e uma semana tem 7 dias, então,

$$365 = 7 \cdot 52 + 1$$

Isto é,

Teremos 52 semanas + um dia no ano

E como a semana deste ano termina numa terça-feira, o ano terminará numa quarta-feira.

Observe que todo ano de 365 dias tem inicio e término no mesmo dia da semana.

4. (Exercício 31, Fomin, pág. 29) Encontre o resto da divisão de 2^{100} por 3.

4) Observe

- $2^2 = 4 = 3 \cdot 1 + 1$
- $2^3 = 8 = 3 \cdot 2 + 2$
- $2^4 = 16 = 3 \cdot 5 + 1$
- $2^5 = 32 = 3 \cdot 10 + 2$
- $2^6 = 64 = 3 \cdot 21 + 1$

Observe que quando o expoente é par, na divisão por 3 deixa resto 1 e quando o expoente é ímpar na divisão por 3 deixa resto 2.

Como 100 é par, temos que

2^{100} deixa resto 1 na divisão por 3.

5. (Exercício 13, pág. 35, “Encontros de Aritmética”)
Qual é o resto da divisão de 2^{56} por 7? E por 11?

5) Primeiramente vamos observar as potências de 2 na tabela abaixo:

	Resto na divisão por 7	**expoente**
$2^1 = 2$	2	1
$2^2 = 4$	4	2
$2^3 = 8$	1	3
$2^4 = 16$	2	4
$2^5 = 32$	4	5
$2^6 = 64$	1	6

Observe que temos uma padrão de restos na divisão por 7 que é {2,4,1}.

- Quando o expoente é múltiplo de 3 o resto na divisão por 7 é 1;
- Quando o expoente deixa resto 1 na divisão por 3, o resto na divisão por 7 é 2;
- Quando o expoente deixa resto 2 na divisão por 3, o resto na divisão por 7 é 4;

Como

$$56 = 3 \cdot 18 + 2$$

Temos que o expoente 56 deixa resto 2 na divisão por 3.

Portanto a divisão 2^{56} por 7 deixa resto 4.

Agora observe os restos na divisão por 11:

	Resto na div. 11
$2^1 = 2$	2
$2^2 = 4$	4
$2^3 = 8$	8
$2^4 = 16$	5
$2^5 = 32$	10
$2^6 = 64$	9
$2^7 = 128$	7
$2^8 = 256$	3
$2^9 = 512$	6
$2^{10} = 1024$	1
$2^{11} = 2048$	2
$2^{12} = 4096$	4

Observe que a partir de 2^{11} começa a repetir os restos.

temos,

$$2^{56} = 2^8 \cdot 2^8 \cdot 2^8 \cdot 2^8 \cdot 2^8 \cdot 2^8 \cdot 2^8$$

restos na divisão por 11

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

restos na divisão por 11

$$5 \cdot 5$$

restos na divisão por 11

$$3 \cdot 3$$

$$9$$

Observe que também poderíamos fazer do seguinte modo:

$$2^{56} = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{6}$$

restos na divisão por 11:

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 = 9$$

6. (Problema 7.4, pág. 15, S. Dorichenko) Encontre o resto quando:

a) 3^{100} é dividido por 5.

b) 5^{100} é dividido por 3.

6)

a) Analogamente ao item 5 vamos observar as potências de 3:

	Resto na divisão por 5	**expoente**
$3^1 = 3$	3	1
$3^2 = 9$	4	2
$3^3 = 27$	2	3
$3^4 = 81$	1	4
$3^5 = 243$	3	5
$3^6 = 729$	4	6

Observe que temos uma padrão de restos na divisão por 5 que é {3,4,2,1}.

- Quando o expoente é múltiplo de 4 o resto na divisão por 5 é 1;
- Quando o expoente deixa resto 1 na divisão por 4, o resto na divisão por 5 é 3;

- Quando o expoente deixa resto 2 na divisão por 4, o resto na divisão por 5 é 4;
- Quando o expoente deixa resto 3 na divisão por 4, o resto na divisão por 5 é 2;

Como o expoente

$$100 = 4 \cdot 25$$

Temos que

O resto de 3^{100} na divisão por 5 é 1.

b) Observe as potências de 5:

	Resto na divisão por 3	**expoente**
$5^1 = 5$	2	1
$5^2 = 25$	1	2
$5^3 = 125$	2	3
$5^4 = 625$	1	4

Observe que temos uma padrão de restos na divisão por 3 que é $\{2,1\}$.

- Quando o expoente é múltiplo de 2(par) o resto na divisão por 3 é 1;
- Quando o expoente deixa resto 1 na divisão por 2(ímpar), o resto na divisão por 3 é 2;

Como 100 é par, temos que o resto de 5^{100} na divisão por 3 é 1.

7. (Exercício 29, Fomin, pág. 29) Encontre o último algarismo do número 2^{50}.

7) Observe as potencias de 2:

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$

$2^3 = 8$

$2^4 = 16$

$2^5 = 32$

$2^6 = 64$

$2^7 = 128$

$2^8 = 256$

Observe que o algarismo da unidade começa a se repetir a partir de 2^5. Isto é:

- quando o expoente é múltiplo de 4, o resultado tem o algarismo da unidade igual a 6;

- quando o expoente deixa resto 1 na divisão por 4, o resultado tem o algarismo da unidade igual a 2;

- quando o expoente deixa resto 2 na divisão por 4, o resultado tem o algarismo da unidade igual a 4;

- quando o expoente deixa resto 3 na divisão por 4, o resultado tem o algarismo da unidade igual a 8;

Como

$$50 = 4 \cdot 12 + 2$$

Isto é, na divisão por 4 o expoente 50 deixa resto 2.

Portanto 2^{50} tem o último algarismo igual a 4.

8. (Exercício 8, pág. 33, “Encontros de Aritmética”)
Qual é o algarismo da unidade de 2^{2015}?

8) Analogamente ao exercício anterior, temos que a casa 4 potências de 2 o algarismo da unidade de repete.

Assim,

$$2015 = 4 \cdot 503 + 3$$

Observe que 2015 deixa resto 3 na divisão por 4.

Logo,

Podemos concluir que 2^{2015} tem o mesmo algarismo na unidade que $2^3 = 8, 2^7 = 128, etc$ … Isto é, tem o algarismo **8** na unidade.

9. (Problema CI.14, pág. 30, S. Dorichenko) Encontre:

a) O último algarismo de 5^{100}.

b) Os dois últimos algarismos de 5^{100}.

c) Os três últimos algarismos de 5^{100}.

d) Os quatro últimos algarismos de 5^{1000}.

9)

a) O último algarismo de 5^{100}.

Observe as potencias de 5:

$$\mathbf{5^1 = 5}$$
$$\mathbf{5^2 = 25}$$
$$\mathbf{5^3 = 125}$$
$$\mathbf{5^4 = 625}$$
$$\mathbf{5^5 = 3125}$$
$$\mathbf{5^6 = 15625}$$
$$\mathbf{5^7 = 78125}$$
$$\mathbf{5^8 = 390625}$$
$$\mathbf{5^9 = 1953125}$$
$$\mathbf{5^{10} = 9765625}$$

Logo podemos concluir que o último algarismo de 5^{100} é 5.

Observe que toda potencia de 5 tem o último algarismo igual a 5.

b) Os dois últimos algarismos de 5^{100}.

Observe as potencias de 5:

$$\mathbf{5^1 = 5}$$
$$\mathbf{5^2 = 25}$$
$$\mathbf{5^3 = 125}$$
$$\mathbf{5^4 = 625}$$
$$\mathbf{5^5 = 3125}$$
$$\mathbf{5^6 = 15625}$$
$$\mathbf{5^7 = 78125}$$
$$\mathbf{5^8 = 390625}$$
$$\mathbf{5^9 = 1953125}$$
$$\mathbf{5^{10} = 9765625}$$

Observe que a partir de 5^2 toda potencia de 5 tem o penúltimo algarismo igual a 2.

Isto é,

os dois últimos algarismos de 5^{100} são 2 e 5 ou 25.

c) Os três últimos algarismos de 5^{100}.

Observe as potências de 5:

$$\mathbf{5^1 = 5}$$
$$\mathbf{5^2 = 25}$$
$$\mathbf{5^3 = 125}$$
$$\mathbf{5^4 = 625}$$
$$\mathbf{5^5 = 3125}$$
$$\mathbf{5^6 = 15625}$$
$$\mathbf{5^7 = 78125}$$
$$\mathbf{5^8 = 390625}$$
$$\mathbf{5^9 = 1953125}$$
$$\mathbf{5^{10} = 9765625}$$

Observe que a partir de 5^3 as potências de 5 tem o antepenúltimo algarismo igual a 1 quando o expoente é ímpar e igual a 6 quando o expoente é par.

Como o expoente 100 é par temos que o algarismo da centena será igual a 6.

Isto é,

os três últimos algarismos de 5^{100} são 6, 2 e 5 ou 625.

d) Os quatro últimos algarismos de 5^{1000}.

Observe as potências de 5:

$$\mathbf{5^1 = 5}$$
$$\mathbf{5^2 = 25}$$
$$\mathbf{5^3 = 125}$$
$$\mathbf{5^4 = 625}$$
$$\mathbf{5^5 = 3125}$$
$$\mathbf{5^6 = 15625}$$
$$\mathbf{5^7 = 78125}$$
$$\mathbf{5^8 = 390625}$$
$$\mathbf{5^9 = 1953125}$$
$$\mathbf{5^{10} = 9765625}$$

Observe que a partir de 5^5 as potências de 5 tem o algarismo do milhar igual a $\{3,5,8,0\}$

- quando o expoente é múltiplo de 4 o algarismo será **0**;
- quando o expoente deixa resto 1 na divisão por 4 o algarismo será **3**;
- quando o expoente deixa resto 2 na divisão por 4 o algarismo será **5**;
- quando o expoente deixa resto 3 na divisão por 4 o algarismo será **8**;

Pelo item (b) sabemos que os dois últimos algarismos de 5^{1000} serão 2 e 5 ou 25. E como 1000 é par o algarismo da centena será 6.

Temos

$$1000 = 4 \cdot 2500$$

Assim, sendo 1000 múltiplo de 4, o algarismo do milhar será 0.

Portanto os últimos quatro números de 5^{1000} são 0 , 6 , 2 e 5 , isto é,

$$\mathbf{0625}$$

10. (Exercício 28, Fomin, pág. 29) Encontre o último algarismo de 1989^{1989}.

10)

Temos que o último algarismo de 1989^{1989} será o mesmo algarismo de 9^{1989}. Observe as potências do algarismo da unidade: $\mathbf{1\ 9\ 8\ 9}$

$$\mathbf{9^1 = 9}$$
$$\mathbf{9^2 = 81}$$
$$\mathbf{9^3 = 729}$$
$$\mathbf{9^4 = 6561}$$
$$\mathbf{9^5 = 59049}$$
$$\mathbf{9^6 = 531441}$$

Note que o último algarismo de 1989^{1989} só poderá ser 9 ou 1.

- Será 9 quando o expoente for ímpar;
- Será 1 quando o expoente for par.

Como 1989 é ímpar temos que o último algarismo de 1989^{1989} é **9**