Paridade. Exercícios
Exercícios 1) Jogo das faces

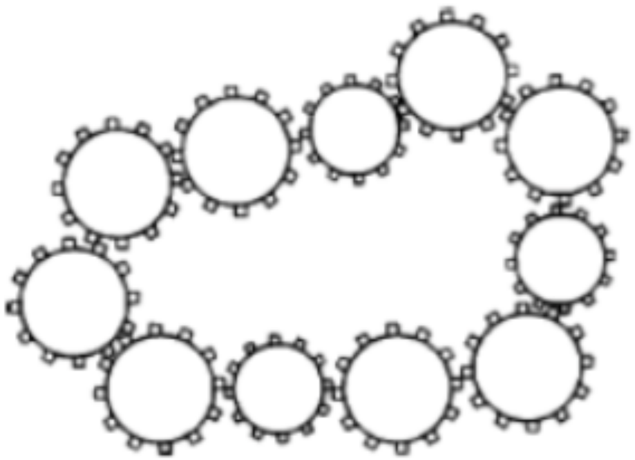
Exercício 2: Você pode encontrar cinco números ímpares cuja soma seja 100?

Exercício 3:

1. Existem dois números pares consecutivos?
2. Existem dois números ímpares consecutivos?
3. Existe um números natural que não é par nem ímpar?
4. Escreva dois números pares. Agora some estes dois números. O resultado obtido é par ou ímpar? Repetindo este experimento com outros números, você poderá obter uma soma par ou uma soma ımpar? Justifique a sua conclusão.
5. O que podemos dizer da soma de dois números ímpares? O resultado é par ou ímpar?
6. E a soma de um número par com um número ímpar?
7. E se somarmos uma quantidade par de números ímpares?
8. E a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares, é par ou ímpar?

Exercício 4: (Fomin, capítulo 1, problema 16) É possível trocar uma nota de 25 rublos em dez notas com valores 1, 3 ou 5 rublos?

Exercício 5: Onze engrenagens estão colocadas em um plano, arrumadas em uma cadeia como está indicado na figura a seguir. Todas as engrenagens podem rodar simultaneamente?



Exercício 6: (Fomin, capítulo 1, problema 17) Pedro comprou um caderno com 96 folhas e numerou-as de 1 a 192. Vitor arrancou 25 folhas do caderno de Pedro e somou os 50 números que encontrou escritos nas folhas. Esta soma poderia ser igual a 1990?

Exercício 7a: (Fomin, capítulo 1, problema 20) Os números de 1 a 10 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de "+" e de "–" entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

Exercício 7b: Continuando o exercício anterior, vamos imaginar que os números de 1 a 11 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de "+" e de "–" entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

Exercício 7c: Como desafio mostre que sempre que a soma dos números de 1 até n é par, então é possível separar os números de 1 até é n em dois subgrupos de números de igual soma. Relacionado com este desafio podem ser levantadas várias questões, como as exemplificadas a seguir.

(a) Qual é o valor da soma $1+2+3+\cdots+2014$? Esta soma é par ou é ímpar?

(b) Qual é a soma dos múltiplos de 3 entre 1 e 301.

(c) Calcule as somas $1+2+3+\cdots+20$, $1+2+\cdots+50$ e $21+ 22+23+\cdots+50$.

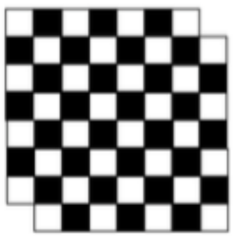
(d) Para quais valores de n a soma dos números de 1 até é n é par?

(e) Indique como o exercício 7b poderia ser revolvido para a lista dos números de 1 até 100.

Exercício 7d: (Fomin, capítulo 1, problema 21) Um gafanhoto pula ao longo de uma linha. No seu primeiro pulo, ele anda 1 cm, no segundo 2 cm, no terceiro 3 cm, e assim sucessivamente. Cada pulo o leva para a direita ou para a esquerda. Mostre que após 1985 pulos, o gafanhoto não pode retornar a sua posição inicial.

Exercício 8: (Fomin, capítulo 1, problema 10) Todas as peças de um dominó foram colocadas em uma cadeia de modo que o número de bolinhas nas extremidades de dois dominós adjacentes são iguais. Se uma das extremidades da cadeia contêm 5 bolinhas, qual é o número de bolinhas na outra extremidade?

Exercício 9: (Fomin, capítulo 1, problema 8) Um tabuleiro 5×5 pode ser coberto por dominós 1×2?



Exercício 10: (Fomin, capítulo 1, problema 23) Considere um tabuleiro de xadrez (com $8 \times 8 = 64$ casas). Suponha que você tenha peças de dominó, cada uma com o tamanho exato de duas casas do tabuleiro. Observe que, deste modo, pode-se cobrir todo o tabuleiro de xadrez com exatamente 32 peças de dominó. Quando são retiradas do tabuleiro duas casas diagonalmente opostas, ainda é possível cobri-lo com 31 peças de dominó?

Exercício 11: (Fomin, capítulo 1, problema 2) Em um tabuleiro de xadrez, um cavalo sai do quadrado a1 e retorna para a mesma posição depois de vários movimentos. Mostre que o cavalo fez um número par de movimentos.

Exercício 12: (Fomin, capítulo 1, problema 3) É possível um cavalo começar na posição A1 de um tabuleiro de xadrez e terminar em H8 visitando cada um dos quadrados restantes exatamente uma vez ao longo do caminho?

Exercício 13: (Fomin, capítulo 1, problema 5) Três discos de borracha, A, B e C, utilizados no hóquei sobre o gelo, estão no campo. Um jogador bate em um deles de tal forma que ele passa entre os outros dois discos. Ele faz isto 25 vezes. Ele pode retornar os três discos às suas posições iniciais?

Exercício 14: (Fomin, capítulo 1, problema 30) Três gafanhotos estão brincando ao longo de uma linha. Na sua vez, cada gafanhoto pode pular sobre um outro gafanhoto, mas não sobre os outros dois. Eles podem retornar para suas posições iniciais após 2011 movimentos?

Exercício 15: Em um conjunto de 101 moedas, há 50 falsas e as demais são verdadeiras. Uma moeda falsa difere de uma verdadeira em 1 grama. Marcos tem uma balança que mostra a diferença de pesos entre os objetos colocados nos dois pratos. É possível, com uma pesagem, identificar se a moeda escolhida é falsa?

Exercício 16: Iniciação a à Aritmética Abramo Hefez Problema 3.28Mostre que o dobro de um número ímpar é par mas nunca múltiplo de 4.

Exercício 17: Iniciação a à Aritmética Abramo Hefez Problema 3.29 Determine a paridade do seguinte número

$$(123.275 + 346.231)^{234} + (3.451 + 4.532)^{542}$$

Exercício 18: Iniciação a à Aritmética Abramo Hefez Problema 3.30 Mostre que para todos os a inteiro e n natural não nulos, os números a e a^n têm mesma paridade.

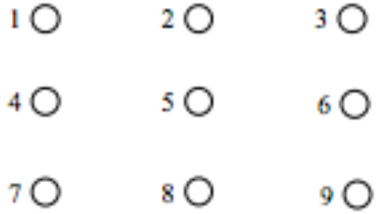
Exercício 19: Iniciação a à Aritmética Abramo Hefez Problema 3.31. Dado um número inteiro a e dados dois números naturais n e m, não nulos, mostre que são sempre pares os números $a^n + a^m$ e $a^n - a^m$.

Exercício 20: Iniciação a à Aritmética Abramo Hefez Problema 3.32. Qual é a paridade da soma dos números naturais de uma 10? E de seu produto?

Exercício 21 Questão 27.4, Conjunto de Problemas 27, autor S. Dorinchenko, página 58
Enunciado: “Um número foi obtido permutando-se os algarismos de outro número. a) A soma desses dois números pode ser igual a 9999? b) Essa soma poderia ser igual a 99999?”

Exercício 22: Problema 1, artigo “Paridade”, Eduardo Wagner, Eureka!, Edição Especial, 2007.
Enunciado: “Em um quartel existem 100 soldados e, todas as noites, três deles são escolhidos para trabalhar de sentinela. É possível que após certo tempo um dos soldados tenha trabalhado com cada um dos outros exatamente uma vez”.

Exercício 23: Um jogo consiste de 9 botões luminosos (de cor verde ou vermelha) dispostos da seguinte forma:



Apertando um botão do bordo do retângulo, trocam de cor ele e seus vizinhos (do lado ou em diagonal). Apertando o botão do centro, trocam de cor todos os seus 8 vizinhos porém ele não.

Exemplos:
Apertando 1, trocam de cor 1, 2, 4 e 5.
Apertando 2, trocam de cor 1, 2, 3, 4, 5 e 6.
Apertando 5, trocam de cor 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 e 9.

Inicialmente todos os botões estão verdes. É possível, apertando sucessivamente alguns botões, torná-los todos vermelhos?

Exercício 24: Mostre que se a, b e c são inteiros ímpares, a equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

não tem raiz racional.

Exercício 25: Um tabuleiro 6×6 está coberto com dominós 2×1. Mostre que existe uma reta que separa as peças do tabuleiro sem cortar nenhum dominó