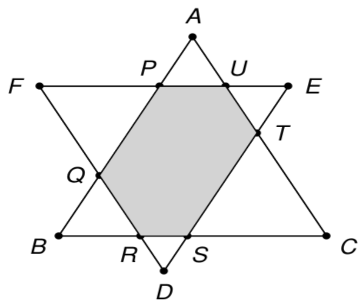
Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N2 – ciclo 3
ENUNCIADOS: três questões para serem resolvidas em casa com discussão posterior

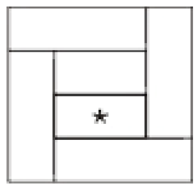
Tarefa de casa 1 (Prova OBMEP 2006 – 2ª Fase – N2 – Questão 4)

Na figura, os triângulos ABC e DEF são equiláteros de lados 14 cm e 13 cm, respectivamente, e os lados $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$ são paralelos. Calcule a medida do ângulo $E\hat{U}T$.



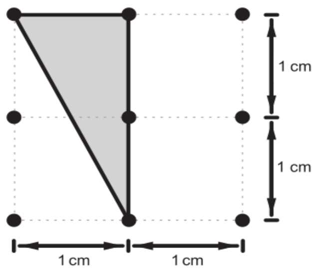
Tarefa de casa 2 (Prova OBMEP 2011 – 2ª Fase – N2 – Questão 1)

Sara recortou uma tira retangular em seis retângulos de mesma largura e com eles formou um quadrado de 36 cm^2 de área, como na figura. Encontre o perímetro e a área do retângulo indicado com *.



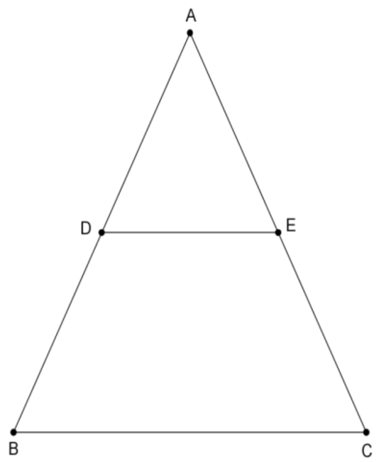
Tarefa de casa 3 (Prova OBMEP 2015 – 2ª Fase – N2 – Questão 5)

Em um quadrado de lado 2 cm foram marcados nove pontos, conforme a figura. Triângulos podem ser desenhados com seus vértices nesses pontos. A figura mostra um deles, com área igual a 1 cm^2. Quantos triângulos congruentes ao da figura possuem seus vértices nos pontos marcados?

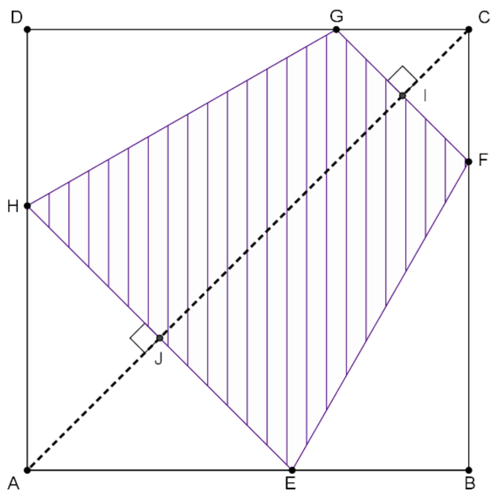


Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N2 – ciclo 3
ENUNCIADOS: duas questões para serem resolvidas em sala de aula

Questão 1 Sejam ABC um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$, $D \in \overline{AB}$ e $E \in \overline{AC}$ tais que o segmento $\overline{DE}$ é paralelo ao segmento $\overline{BC}$. Considere a definição de trapézio isósceles, então apresente uma argumentação que justifique que $BDEC$ enquadra-se nessa definição, ou seja, é um trapézio isósceles.



Questão 2 Na figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado AB = 10 cm, o triângulo AEH é isósceles de lados AE=AH= 6 cm e o triângulo CGF é isósceles de lados CF = CG = 3 cm.

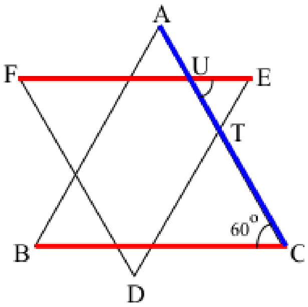


(A) Calcule a área do quadrilátero EFGH;
(B) Use o item (A) para determine a medida, em cm, do segmento $\overline{JI}$.

Sugestão: Calcule a área do quadrilátero EFGH de duas formas distintas. Em (A), através da diferença de área de quadrado e de triângulos. Em (B), através da expressão que define a área de um trapézio.

Solução da tarefa de casa 1

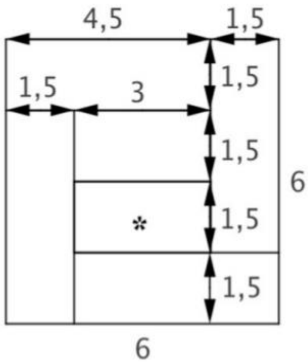
http://www.obmep.org.br/provas_static/sf2n2-2006.pdf



Como o triângulo ABC é equilátero, todos seus ângulos internos medem 60º. Como $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$ são paralelos e cortados pela transversal AC, os ângulos $E\hat{U}T$ e $A\hat{C}B$ são alternos internos, o que mostra que $E\hat{U}T = A\hat{C}B = 60º$.

Solução da tarefa de casa 2

http://www.obmep.org.br/provas_static/2011/sf2n2-2011.pdf

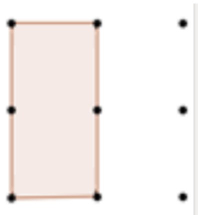


O lado do quadrado formado com os seis retângulos recortados mede 6 cm. Como todos os retângulos tem a mesma largura, a figura mostra que essa largura é um quarto da medida do lado, isto é, 1,5 cm. As medidas dos outros retângulos são então determinadas imediatamente, como indicado. Em particular, as dimensões do retângulo destacado são 3 cm e 1,5 cm. Logo seu perímetro é 1,5 + 1,5 + 3 + 3 = 9 cm e sua área é 1,5 × 3 = 4,5 cm^2 .

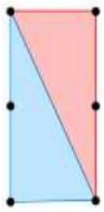
Solução da tarefa de casa 3

http://www.obmep.org.br/provas_static/2015/f2n22015.htm

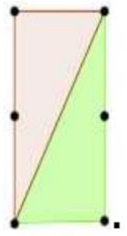
Utilizando o critério de congruência LAL podemos afirmar que dentro de cada retângulo como o indicado abaixo, há 4 triângulos congruentes ao da figura do enunciado:



- dois quando traçamos uma diagonal:



- dois quando traçamos a outra diagonal:



Como há quatro retângulos congruentes ao descrito acima, considerando também os retângulos horizontais, poderemos fazer um total de 4 x 4 = 16 triângulos congruentes ao que está no enunciado da questão.

<u>Solução da Questão 1</u> (resolvida em sala de aula)

Os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ são paralelos, logo, os ângulos do triângulo ADE são congruentes aos correspondentes ângulos do triângulo ABC (consequência do recíproco do Teorema AAI). Como ABC é isósceles, então o triângulo ADE também é isósceles. Portanto, $AD = AE$ (Teoremas do Triangulo Isósceles e seu recíproco). Logo, BD=BA-AD=CA-AE=CE e, além disso, os lados $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ do quadrilátero $BDEC$ não são paralelos. Segue da definição que $BDEC$ é um trapézio isósceles.

<u>Critérios de correção da Questão 1</u> (resolvida em sala de aula)
Esta questão vale 5 pontos, distribuídos da seguinte maneira:

- 2,0 pontos para a justificativa de que o triângulo ADE é isósceles;
- 2,0 pontos para a obtenção da informação BD=BA-AD=CA-AE=CE;
- 1,0 ponto pela conclusão de que o quadrilátero $BDEC$ satisfaz a definição de um trapézio isósceles.

<u>Solução da Questão 2</u> (resolvida em sala de aula)

ITEM (A). A área do quadrilátero EFGH é dada pela área do quadrado ABCD menos as áreas dos triângulos retângulos HAE, EBF, FCG e GDH. Assim, temos

$$\acute{a}rea(EFGH) = 10.10 - \left(\frac{6.6}{2} + \frac{4.7}{2} + \frac{3.3}{2} + \frac{7.4}{2}\right) = \frac{99}{2} cm^2.$$

ITEM (B). Os triângulos AJE, AJH, CIF e CIG são todos retângulos isósceles. Assim, o segmento $\overline{IJ}$ é perpendicular a ambos os segmentos $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$. Portanto, esses segmentos são lados opostos e paralelos do quadrilátero EFGH. Logo, EFGH é um trapézio em que pelo Teorema de Pitágoras

$$EH = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} e FG = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

Usando o item (A) e a fórmula $área(EFGH) = \left(\frac{EH+FG}{2}\right) IJ$, obtemos $IJ = \frac{99}{9\sqrt{2}} cm$.

<u>Critérios de correção da Questão 2</u> (resolvida em sala de aula)
Esta questão vale 5 pontos, distribuídos da seguinte maneira:

- 1,0 ponto para a determinação correta da área solicitada no item (A);
- 1,0 ponto para afirmação que EFGH é um trapézio;
- 2,0 pontos pelo uso correto do Teorema de Pitágoras nas determinações das medidas das bases $EH = 6\sqrt{2}cm$ e $FG = 3\sqrt{2}cm$;
- 1,0 ponto para determinação da medida de $IJ = \frac{99}{9\sqrt{2}}$.