**Problema 3.27.** Uma fábrica produz chicletes que são embalados em pacotes de cinco unidades cada. Quantos pacotes serão produzidos com 3 257 unidades?

## 3.5 Par ou Ímpar?

Nesta seção veremos, em um caso bem simples, como lidar com os restos da divisão de números inteiros por um número natural dado, introduzindo uma nova aritmética chamada *aritmética residual* ou *aritmética modular*.

A soma de dois números pares é par. De fato, os dois números podem ser escritos na forma $2a$ e $2b$, cuja soma é $2(a+b)$, logo par.

A soma de dois números ímpares é par. De fato, os números são da forma $2a+1$ e $2b+1$, cuja soma é $2(a+b+1)$, logo par.

A soma de um número par com um número ímpar é ímpar. De fato, um dos números é da forma $2a$ e o outro $2b+1$, cuja soma é $2(a+b)+1$, logo ímpar.

A paridade, isto é, a qualidade de ser par ou ímpar, da soma de dois números só depende da paridade de cada um dos números e não dos números em si.

O produto de dois números pares é par. De fato, os números sendo da forma $2a$ e $2b$, temos que o seu produto é $4ab$ e, portanto, múltiplo de 4, logo par.

O produto de um número par por um número ímpar é par. De fato, um número da forma $2a$ e um número da forma $2b+1$ têm um produto igual a $2a(2b+1)$, que é par.

O produto de dois números ímpares é ímpar. De fato, sendo os números da forma $2a+1$ e $2b+1$, o seu produto é $2(2ab+a+b)+1$, logo ímpar.

Novamente, como no caso da soma, temos que a paridade do produto de dois números só depende da paridade desses números e não dos números em si.

Assim, podemos decidir a paridade de uma expressão complexa envolvendo produtos e somas de inteiros do modo a seguir.

Atribuindo o símbolo $\overline{0}$ aos números pares e o símbolo $\overline{1}$ aos números ímpares, as observações acima nos fornecem as seguintes tabelas que regem a paridade das somas e produtos dos números inteiros.

| $+$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |
|---|---|---|
| $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |
| $\overline{1}$ | $\overline{1}$ | $\overline{0}$ |

| $\times$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |
|---|---|---|
| $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ |
| $\overline{1}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |

Por exemplo, se quisermos saber a paridade do número $20^{10} \times 11^{200} + 21^{19}$ não será necessário desenvolver as contas indicadas para saber se o resultado final é par ou ímpar. O que fazemos é substituir na expressão acima o número 20 por $\overline{0}$, por ser par; e os números 11 e 21 por $\overline{1}$, por serem ímpares. Obtemos, assim, a expressão

$$\overline{0}^{10} \times \overline{1}^{200} + \overline{1}^{19},$$

que operada segundo as tabelas acima nos dá $\overline{1}$ como resultado. Portanto, o número dado é ímpar.[2]

[2] Tente explicar por que não substituímos os expoentes 10, 200 e 19 pelos símbolos $\overline{0}$ e $\overline{1}$, segundo a sua paridade.

O método acima pode ser generalizado para controlar os restos da divisão dos números inteiros por qualquer número natural fixado $m$. Veremos na próxima seção mais um caso especial, o caso $m = 3$. No próximo capítulo analisaremos o caso geral. Esse método foi idealizado pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), considerado o maior matemático de todos os tempos, quando tinha perto de 17 anos.

**Problema 3.28.** Mostre que o dobro de um número ímpar é par mas nunca múltiplo de 4.

**Problema 3.29.** Determine a paridade do seguinte número:

$$(123\,275 + 346\,231)^{234} + (3\,451 + 4\,532)^{542}.$$

**Problema 3.30.** Mostre que para todos $a$ inteiro e $n$ natural não nulos, os números $a$ e $a^n$ têm mesma paridade.

**Problema 3.31.** Dado um número inteiro $a$ e dados dois números naturais $n$ e $m$, não nulos, mostre que são sempre pares os números $a^n + a^m$ e $a^n - a^m$.

**Problema 3.32.** Qual é a paridade da soma dos números naturais de um a 10? E de seu produto?

## 3.6 Zero, Um ou Dois?

Nesta seção analisaremos a aritmética dos restos da divisão por 3.

Vamos organizar os números inteiros numa tabela como segue: