ENCONTRO 2

4ª semana: aula para alunos convidados

- Assuntos a serem abordados: **Geometria** – Círculo: definição, ângulo central e ângulo inscrito, perímetro e área de círculos.

- Texto para consulta: Material Teórico do Portal da Matemática "Círculos: elementos, arcos e ângulos inscritos", Joselino Sato (http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/1s62g7z2ynq6f.pdf) e Seção 2.2 da Apostila do PIC da OBMEP "Teorema de Pitágoras e Áreas", Eduardo Wagner. (http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf).

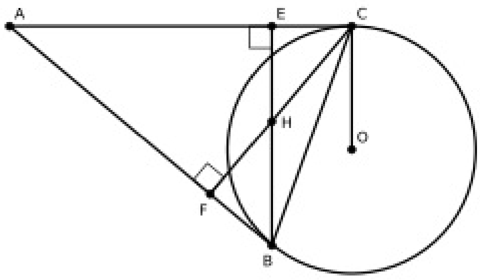
- Exercícios a serem discutidos com os alunos: está disponibilizada uma lista de oito exercícios. O professor deverá propor os exercícios da lista para que os alunos resolvam. Acompanhando, individual ou coletivamente, a tentativa de resolução dos exercícios pelos alunos, o professor poderá perceber o nível de compreensão dos temas abordados. Para cada exercício da lista, sugere-se que pelo menos um dos alunos que o tenham resolvido apresente sua resolução para os demais alunos, e o professor acompanhe a resolução, corrigindo, destacando e aprofundando os conhecimentos matemáticos abordados. A ideia é que os temas abordados sejam assimilados pelos alunos durante a resolução dos exercícios, ou seja, a resolução dos exercícios deve provocar a necessidade de aprofundar os temas abordados. Se todos os exercícios da lista forem resolvidos durante o tempo do encontro, cabe ao professor propor exercícios adicionais sobre os assuntos abordados. Exercícios adicionais sobre os assuntos abordados podem ser encontrados, por exemplo, na Seção 2.3 da Apostila do PIC da OBMEP "Teorema de Pitágoras e Áreas".

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N3 – Ciclo 3 – Encontro 2
ENUNCIADOS

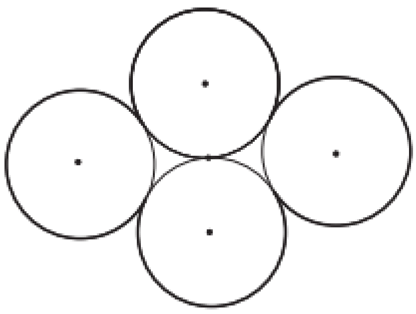
1) Exemplo 2, página 70, Apostila do PIC "Encontros de Geometria".

2) Exemplo 5, página 130, Apostila do PIC "Encontros de Geometria".

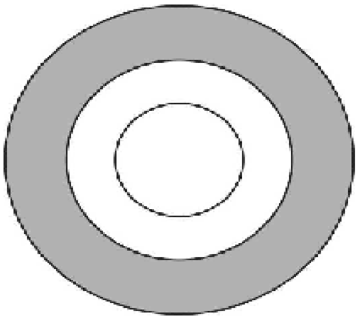
3) Duas tangentes são desenhadas de um ponto A a um círculo de centro O, tocando-o em B e C. Seja H o ortocentro do triângulo ABC, sabendo que o ângulo $\widehat{BAC} = 40°$, encontre o valor do ângulo $\widehat{HCO}$.
(Banco de Questões 2016, Nível 2 , questão 4)



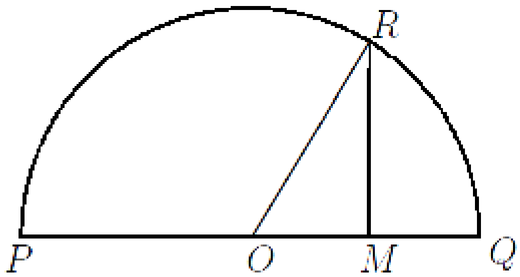
4) A figura a seguir é formada por quatro círculos tangentes de raio a. Determine o comprimento do contorno externo, que está com o traçado destacado. *(Banco de Questões 2010, Nível 2 , questão 215)*



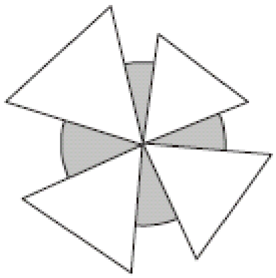
5) Na figura, os três círculos são concêntricos, e a área do menor círculo coincide com a área do maior anel, destacado em cinza. O raio do menor círculo é 5 cm e do maior 13 cm. Qual é o raio (em cm) do círculo intermediário?
(Banco de Questões 2010, Nível 3 , questão 72)



6) Na figura, O é o centro do semi círculo de diâmetro PQ, e RM é perpendicular a PQ. Se o arco $\widehat{PR}$ é o dobro do arco $\widehat{RQ}$ qual é a razão entre PM e MQ?
(Banco de Questões 2008, Nível 2, Lista 5, questão 2)



7) A figura mostra um círculo de área $36\ cm^2$ sobre o qual estão desenhados quatro triângulos equiláteros com um vértice comum no centro do círculo. Qual é a área da região sombreada? *(OBMEP 2006, Fase 1, Nível 3, questão 8)*



8) Na figura os quatro círculos são tangentes e seus centros são vértices de um quadrado de lado $4\ cm$. Qual é o comprimento, em centímetros, da linha destacada?
(OBMEP 2006, Fase 1, Nível 3, questão 12)

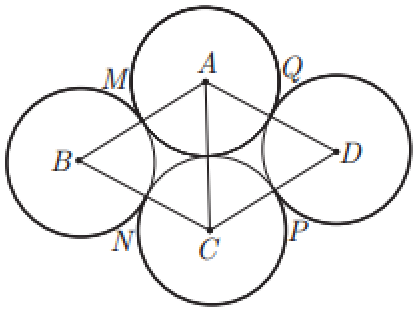
1) *A solução está em seguida ao enunciado do exercício na apostila.*

2) *A solução está em seguida ao enunciado do exercício na apostila.*

3) Como AC é tangente ao círculo, temos $\widehat{ACO} = 90°$. Assim

$$\widehat{HCO} = 90° - \widehat{ACF} = \widehat{CAF} = 40°.$$

4) Sejam A, B, C e D os centros dos quatro círculos e M, N, P e Q os pontos de tangência entre esses círculos, conforme figura.



Observe que $AD = DC = CB = BA = AC = 2a$. Logo, os triângulos ABC e ACD são equiláteros e, por isso, seus ângulos internos são iguais a $60°$. Portanto, $\widehat{ABC}$ = 60º = $\frac{1}{6}$ $360°$ e $\widehat{DAB}$ = 120° = $\frac{1}{3}$ $360°$, o que acarreta que os arcos dos contornos internos a esses dois ângulos medem

$$\widehat{NM} = \frac{1}{6} \times 2\pi\, a \quad e \quad \widehat{MQ} = \frac{1}{3} \times 2\pi\, a$$

e os contornos externos por B e A, de traçado destacado, medem $\frac{5}{6} \times 2\pi a$ e $\frac{2}{3} \times 2\pi a$, respectivamente. Por simetria, segue que o contorno externo da figura dada tem comprimento igual a

$$(2 \times \frac{5}{6} + 2 \times \frac{2}{3})2\pi a = 6\pi a.$$

5) A área do maior círculo é $13^2\,\pi = 169\,\pi$ e a do menor é $5^2\,\pi = 25\,\pi$, que também é a área do maior anel. Seja r o raio do círculo intermediário. Então, a área do maior anel é $169\,\pi - \pi\, r^2$. Logo, $169\,\pi - \pi\, r^2$= 25 π, ou seja, $\pi r^2 = 169\,\pi - 25\,\pi = 144\,\pi$, donde $r^2 = 144$ e r = 12 cm.

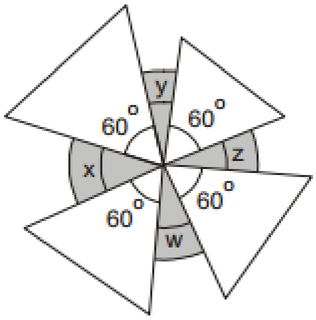
6) Se o arco $\widehat{PR}$ é o dobro do arco $\widehat{RQ}$, vale a mesma relação entre os ângulos centrais, logo: $\widehat{POR} = 2\,\widehat{ROQ}$. Como

$$\widehat{POR} + \widehat{ROQ} = 180°,$$

segue-se que $3\,\widehat{ROQ} = 180°$, donde $\widehat{ROQ} = 60°$. Mas, $OR = OQ = r$ raio do círculo. Daí concluímos que o triângulo ORQ é equilátero. Portanto, a altura RM também é mediana, ou seja: $OM = MQ$. Logo, se r é o raio do círculo temos:

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{PO+OM}{\frac{OQ}{2}} = \frac{r+\frac{r}{2}}{\frac{r}{2}} = 3$$

7) Como os quatro triângulos são equiláteros, cada um de seus ângulos mede $60°$. Logo a soma dos ângulos x, y, z e w na figura é $x + y + z + w = 360° - 4\times60° = 120°$.



Como $360° \div 120° = 3$ a área cinza representa $\frac{1}{3}$ da área do círculo, ou seja, ela mede $36 \div 3 = 12cm^2$.

8) A linha é composta de dois arcos de $\frac{\pi}{2}$ radianos e dois arcos de $\frac{3\pi}{2}$ radianos. Como o raio das circunferências é $2\ cm$, segue que o comprimento da linha é $(2\times\frac{\pi}{2} + 2\times\frac{3\pi}{2})\times2 = 8\pi$ cm.