

# O princípio multiplicativo

## Introdução

A palavra Matemática, para um adulto ou uma criança, está diretamente relacionada com atividades e técnicas para contagem do número de elementos de algum conjunto. As primeiras atividades matemáticas que vivenciamos envolvem sempre a ação de contar objetos de um conjunto, enumerando seus elementos.

As operações de adição e multiplicação são exemplos de “técnicas” matemáticas utilizadas também para a determinação de uma quantidade. A primeira (adição) reúne ou junta duas ou mais quantidades conhecidas; e a segunda (multiplicação) é normalmente aprendida como uma forma eficaz de substituir adições de parcelas iguais.

A multiplicação também é a base de um raciocínio muito importante em Matemática, chamado *princípio multiplicativo*. O princípio multiplicativo constitui a ferramenta básica para resolver problemas de contagem sem que seja necessário enumerar seus elementos (como veremos nos exemplos).




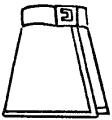







Os problemas de contagem fazem parte da chamada *análise combinatória*. A partir desta aula, aprofundaremos o estudo dessa parte da Matemática.

## Nossa aula

### EXEMPLO 1

Maria vai sair com suas amigas e, para escolher a roupa que usará, separou 2 saias e 3 blusas. Vejamos de quantas maneiras ela pode se arrumar.

**Solução:**

BLUSAS SAIAS			
			
			

O princípio multiplicativo, ilustrado nesse exemplo, também pode ser enunciado da seguinte forma:

Se uma decisão  $d_1$  pode ser tomada de  $n$  maneiras e, em seguida, outra decisão  $d_2$  puder ser tomada de  $m$  maneiras, o número total de maneiras de tomarmos as decisões  $d_1$  e  $d_2$  será  $n \cdot m$ .

No exemplo anterior havia duas decisões a serem tomadas:

$d_1$ : escolher uma dentre as 3 blusas

$d_2$ : escolher uma dentre as 2 saias

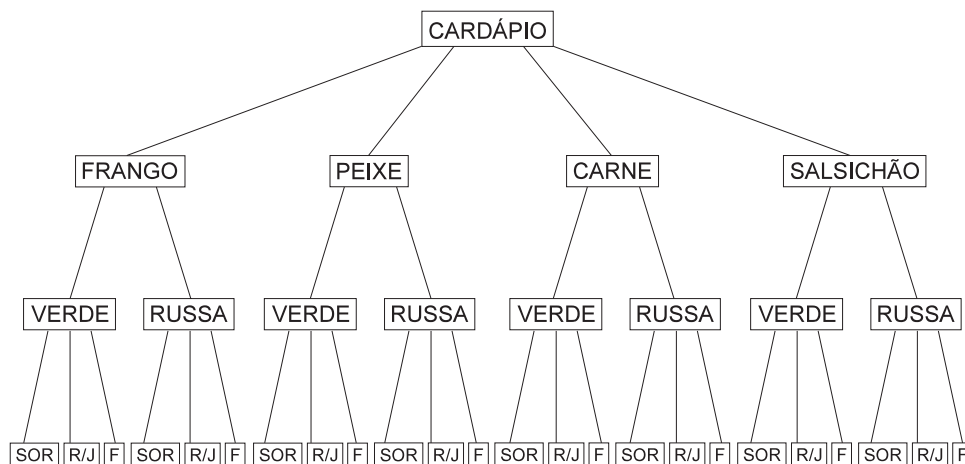
Assim, Maria dispõe de  $3 \cdot 2 = 6$  maneiras de tomar as decisões  $d_1$  e  $d_2$ , ou seja, 6 possibilidades diferentes de se vestir.

### EXEMPLO 2

Um restaurante prepara 4 pratos quentes (frango, peixe, carne assada, salsichão), 2 saladas (verde e russa) e 3 sobremesas (sorvete, romeu e julieta, frutas). De quantas maneiras diferentes um freguês pode se servir consumindo um prato quente, uma salada e uma sobremesa?

#### Solução:

Esse e outros problemas da análise combinatória podem ser representados pela conhecida árvore de possibilidades ou grafo. Veja como representamos por uma “árvore” o problema do cardápio do restaurante.



Observe que nesse problema temos três níveis de decisão:

$d_1$ : escolher um dentre os 4 tipos de pratos quentes.

$d_2$ : escolher uma dentre as 2 variedades de salada.

$d_3$ : escolher uma das 3 sobremesas oferecidas.

Usando o princípio multiplicativo, concluímos que temos  $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$  maneiras de tomarmos as três decisões, ou seja, **24 opções de cardápio**.

A representação gráfica em árvore de possibilidades é muito ilustrativa. Nela podemos ver claramente os três níveis de decisão  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$ , consultando os vários tipos de cardápios possíveis. Observe que, percorrendo as opções dadas pelos segmentos à esquerda da árvore, o cardápio ficaria *frango/salada verde/sorvete* enquanto que, escolhendo os segmentos à direita, teríamos *salsichão/salada russa/frutas*. No entanto, nosso objetivo é saber as combinações possíveis e calcular o número total de possibilidades sem precisar enumerá-las, pois muitas vezes isso será impossível devido ao grande número de opções e/ou de decisões envolvidos num problema.

As técnicas da análise combinatória, como o princípio multiplicativo, nos fornecem soluções gerais para atacar certos tipos de problema. No entanto, esses problemas exigem engenhosidade, criatividade e uma plena compreensão da situação descrita. Portanto, é preciso estudar bem o problema, as condições dadas e as possibilidades envolvidas, ou seja, ter perfeita consciência dos dados e da resolução que se busca.

### EXEMPLO 3

Se o restaurante do exemplo anterior oferecesse dois preços diferentes, sendo mais baratas as opções que incluíssem frango ou salsichão com salada verde, de quantas maneiras você poderia se alimentar pagando menos?

#### Solução:

Note que agora temos uma condição sobre as decisões  $d_1$  e  $d_2$ :

$d_1$ : escolher um dentre 2 pratos quentes (frango ou salsichão).

$d_2$ : escolher salada verde (apenas uma opção).

$d_3$ : escolher uma das 3 sobremesas oferecidas.

Então, há  $2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$  maneiras de montar cardápios econômicos. (Verifique os cardápios mais econômicos na árvore de possibilidades do exemplo anterior).

### EXEMPLO 4

Quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem?

#### Solução:

Um número de 3 algarismos c d u é formado por 3 ordens: Como o algarismo da ordem das centenas não pode ser zero, temos então três decisões:

$d_1$ : escolher o algarismo da centena diferente de zero (9 opções).

$d_2$ : escolher o algarismo da dezena diferente do que já foi escolhido para ocupar a centena (9 opções).

$d_3$ : escolher o algarismo da unidade diferente dos que já foram utilizados (8 opções).

Portanto, o total de números formados será  $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$  números.

De acordo com o exemplo anterior, se desejássemos contar dentre os 648 números de 3 algarismos distintos apenas os que são pares (terminados em 0, 2, 4, 6 e 8), como deveríamos proceder?

**Solução\*:**

c	d	u
---	---	---

O algarismo da unidade poderá ser escolhido de 5 modos (0, 2, 4, 6 e 8). Se o zero foi usado como último algarismo, o primeiro pode ser escolhido de 9 modos (não podemos usar o algarismo já empregado na última casa). Se o zero não foi usado como último algarismo, o primeiro só pode ser escolhido de 8 modos (não podemos usar o zero, nem o algarismo já empregado na última casa).

Para vencer este impasse, temos três alternativas:

**a)** “Abrir” o problema em casos (que é alternativa mais natural). Contar separadamente os números que têm zero como último algarismo (unidade = 0) e aqueles cujo último algarismo é diferente de zero (unidade  $\neq$  0).

Terminando em zero temos 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o do meio (algarismo da dezena), num total de  $1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$  números.

Terminando em um algarismo diferente de zero temos 4 modos de escolher o último algarismo (2, 4, 6, ou 8), 8 modos de escolher o primeiro algarismo (não podemos usar o zero, nem o algarismo já usado na última casa) e 8 modos de escolher o algarismo do meio (não podemos usar os dois algarismos já empregados nas casas extremas). Logo, temos  $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$  números terminados em um algarismo diferente de zero. A resposta é, portanto,  $72 + 256 = 328$  números.

**b)** Ignorar uma das restrições (que é uma alternativa mais sofisticada). Ignorando o fato de zero não poder ocupar a centena, teríamos 5 modos de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o do meio, num total  $5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$  números. Esses 360 números incluem números começados por zero, que devem ser descontados. Começando em zero temos 1 modo de escolher o primeiro algarismo (0), 4 modos de escolher o último (2, 4, 6 ou 8) e 8 modos de escolher o do meio (não podemos usar os dois algarismos já empregados nas casas extremas), num total de  $1 \cdot 4 \cdot 8 = 32$  números. A resposta é, portanto,  $360 - 32 = 328$  números.

**c)** É claro que também poderíamos ter resolvido o problema determinando todos os números de 3 algarismos distintos ( $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$  números), como é o caso do Exemplo 4, e abatendo os números ímpares de 3 algarismos distintos (5 na última casa, 8 na primeira e 8 na segunda), num total de  $5 \cdot 8 \cdot 8 = 320$  números. Assim, a resposta seria  $648 - 320 = 328$  números.

Fonte: \* Solução proposta pelo prof. Augusto César de Oliveira Morgado no livro "Análise Combinatória e Probabilidade" - IMPA/VITAE/1991.

## EXEMPLO 6

As placas de automóveis eram todas formadas por 2 letras (inclusive K, Y e W) seguidas por 4 algarismos. Hoje em dia, as placas dos carros estão sendo todas trocadas e passaram a ter 3 letras seguidas e 4 algarismos. Quantas placas de cada tipo podemos formar?

**Solução:**

No primeiro caso

L	L	N	N	N	N
---	---	---	---	---	---

Como cada letra (L) pode ser escolhida de 26 maneiras e cada algarismo (N) de 10 modos distintos, a resposta é:

$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6\,760\,000$$

No segundo caso

L	L	L	N	N	N	N
---	---	---	---	---	---	---

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26 \cdot 6\,760\,000 = \\ = 175\,760\,000$$

A nova forma de identificação de automóveis possibilita uma variedade 26 vezes maior. A diferença é de **169.000.000**, ou seja, 169 milhões de placas diferentes a mais do que anteriormente.

**Exercícios****Exercício 1.**

Numa sala há 4 homens e 3 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher?

**Exercício 2.**

- Quantos números naturais de 2 algarismos distintos existem?
- Quantos destes números são divisíveis por 5?

**Exercício 3.**

Quantas palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?

**Exercício 4.**

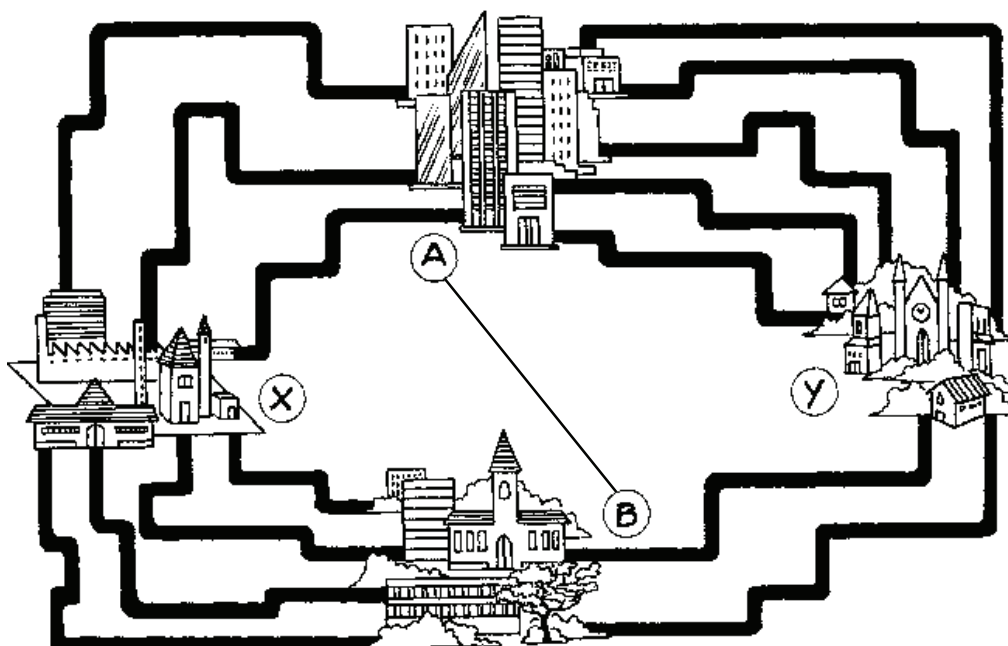
Quantos são os gabaritos possíveis para um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão?

**Exercício 5.**

Com todos os números de 01 a 50, quantas escolhas de 6 números distintos podemos fazer?

**Exercício 6.**

De quantas maneiras você pode ir da cidade X para a cidade Y?



**Exercício 7.**

O código morse usa “palavras” contendo de 1 a 4 “letras”, representadas por ponto e traço. Quantas “palavras” existem no código morse?

**Exercício 8.**

O segredo de um cofre é formado por uma sequência de 4 números de 2 dígitos (de 00 a 99). Uma pessoa decide tentar abrir o cofre sem saber a formação do segredo (por exemplo: 15 - 26 - 00 - 52). Se essa pessoa levar 1 segundo para experimentar cada combinação possível, trabalhando ininterruptamente e anotando cada tentativa já feita para não repeti-la, qual será o tempo máximo que poderá levar para abrir o cofre?

**Exercício 9.**

No Exemplo 6 vimos que existem 175.760.000 placas diferentes de três letras e quatro algarismos. José Carlos Medeiros gostaria de que a placa de seu automóvel tivesse as iniciais do seu nome. Quantas placas existem com as letras JCM?