Módulo de Sistemas de Numeração e Paridade

Sistemas de Numeração

Tópicos Adicionais

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

Portal da Matemática
OBMEP

Sistemas de Numeração e Paridade
Sistemas de Numeração

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Todos os números abaixo estão escritos na base decimal (base 10). Converta-os para a base 2.

a) 10

b) 32

c) 200

d) 512

e) 1023

Exercício 2. Em regra, um número X numa base a é escrito como $(X)_a$. A base 10, por ser o sistema corrente, costuma dispensar a simbologia do índice subscrito, mas também podemos escrever X_{10} ou $\overline{\text{X}}$ para enfatizar que estamos usando tal base. Por exemplo,

- $(13)_4 = 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 1 \cdot 4^1 + 3 = (7)_{10} = \overline{7} = 7$;
- $(101)_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \overline{5} = 5$; e
- $(1234)_7 = 1 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 = 466$.

Observando os exemplos, converta os números abaixo para a base decimal.

a) $(312)_4$

b) $(10011)_2$

c) $(11111)_5$

d) $(2000001)_3$

Exercício 3. Nas tabelas abaixo, todos os números estão escritos na base 4. A da esquerda é a de soma e a da direita, a de multiplicação.

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

$\times$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Construa essas mesmas tabelas para as bases 2 e 3.

Exercício 4. Em qual a base do sistema de numeração em que 243 é o quadrado de 16?

Exercício 5. Para converter um número da base 10 para outra qualquer, basta operar sucessivas divisões e destacar todos os restos em cada passo e o último quociente. Os exemplos abaixo ilustram as conversões dos número 478 para a base 7 e 524 para a base 5.

$$\begin{array}{r|l}
478 & 7 \\
\hline
476 & 68 \;|\; 7 \\
2 & 63 \quad 9 \;|\; 7 \\
 & 5 \quad\; 7 \quad 1 \\
 & \qquad 2
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
524 & 5 \\
\hline
520 & 104 \;|\; 5 \\
4 & 100 \quad 20 \;|\; 5 \\
 & 4 \quad\; 20 \quad 4 \\
 & \qquad 0
\end{array}$$

$\longleftarrow$ $\qquad$ $\longleftarrow$

$478 = (1252)_7$ $\qquad$ $524 = (4044)_5$

Agora, proceda com o que se pede.

a) Converta 20 para a base 2.

b) Converta 215 para a base 3.

c) Converta 2000 para a base 7.

Exercício 6. Suponha que x seja representado por um número de dois dígitos ab na base 8, isto é, $(ab)_8$, e que $x = a^2 + b^2$, na base decimal. Qual é o valor de b ?

Exercício 7. Se $(xyxy)_{(n)} = 1450$, qual o valor de

$$x + y + n?$$

Exercício 8. O número N quando expresso na base $(b+1)$, é igual ao numeral $bbbb$, ou seja, $N = (bbbb)_{b+1}$. Sendo $N = Q \times (Q-2)$, na base 10, qual o valor de Q na base $b+1$?

Exercício 9. Quantos números ímpares, na base 10, possuem de três dígitos quando escritos na base 7?

Exercício 10. O número N é um inteiro que possui representação na base b igual a 777, ou seja, $N = (777)_b$. Calcule o menor inteiro positivo b tal que N é a quarta potência de algum inteiro.

Exercício 11. Um rei maligno escreveu três números secretos com dois algarismos a, b e c (todos na base 10). Um príncipe generoso precisa dar três números X, Y e Z, depois o rei dirá o soma $aX + bY + cZ$. Daí, o príncipe terá que dizer quais são os três números secretos do rei. Caso contrário, ele será executado. Como o príncipe deve proceder para sair dessa situação?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 12. Em uma de suas aulas, o professor teceu o seguinte comentário:

> "No final de uma semana, visitei a fazenda de um amigo e observei que, em um dos cercados, existiam apenas 24 vacas e 32 bezerros, totalizando 100 animais."

De imediato, os alunos protestaram dizendo ser impossível tal fato, mas o Mestre manteve-se sereno e reafirmou que suas contas estavam corretas e que eles deveriam ver além do convencional. Ouvindo isso, Pitágoras disse:

> "É verdade, Mestre, existem outras bases de contagem além da usual. No caso, 24 seria $24 = 2.10^1 + 4.10^0$, se a base de contagem fosse 10, mas não é, deve ser uma base b tal que $(24)_b = 2.b^1 + 4.b^0$."

O comentário do professor está correto, mas como bem observou Pitágoras, o sistema de numeração utilizado não é o decimal, qual foi a base numérica utilizada pelo professor?

Exercício 13. Se o inteiro $n > 8$ é solução da equação $x^2 - ax + b = 0$ e $a = (18)_n$, qual é a representação de b na base n?

Exercício 14. A soma do menor número de três algarismos com o maior número de dois algarismos que estão em uma base b é k . Determine o valor de b sabendo que, no sistema de numeração decimal, k vale 31.

Exercício 15. Qual o valor de $\sqrt{(61)_8}$?

Exercício 16. Sendo $A = (11000)_2$ e $B = (10001)_2$, qual o valor de $A - B$ no sistema decimal?

Exercício 17. Um número se escreve na base 10 como 103 e na base b como 205. Qual o valor de b?

Exercício 18. Um livro de 200 páginas vai ser reenumerado no sistema de numeração de base 8. Qual o número de algarismos (na base 10) que serão utilizados?

Exercício 19. No sistema de numeração de base 10 , o número 526 representa $5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6$. Em Terra Brasilis, entretanto, os números são escritos na base z. Wellington compra um automóvel lá por 440 unidades monetárias (abreviada por u.m.). Ele dá ao vendedor uma cédula de 1000 u.m. e recebe de troco 340 u.m.. Qual a base z?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 20. No País dos Números, onde todos os habitantes pertencem apenas ao sistema decimal de numeração, dois algarismos não nulos, a e b, passeavam a uma velocidade constante. Percebeu-se que:

- às 16 : 01 h, já haviam percorrido (ab) metros;
- às 16 : 43 h, (ba) metros; e
- às 17 : 01 h, $(a0b)$ metros.

Com base nessas informações, qual era o horário no momento do início desse passeio?

Exercício 21. Seja $n \geqslant 1$ um inteiro. Temos n lâmpadas alinhadas e numeradas, da esquerda para a direita, de 1 a n. Cada lâmpada pode estar acesa ou apagada. A cada segundo, determina-se a lâmpada apagada de maior número e inverte-se o estado desta (de acesa para apagada ou de apagada para acesa) e das lâmpadas posteriores (as lâmpadas de maior número), o processo se encerra se todas ficarem acesas.

a) Mostre que em algum momento todas as lâmpadas estarão acesas.

b) Suponha que inicialmente todas as lâmpadas estejam apagadas. Determine depois de quantos segundos todas as lâmpadas estarão acesas.

c) Suponha agora $n = 11$ e que no início somente as lâmpadas de números 6, 7 e 10 estejam acesas. Mostre que após exatamente 1997 segundos todas as lâmpadas estarão acesas.

Respostas e Soluções.

1. Basta subtrair a maior potência de 2 que não ultrapassa o número dado e repetir este procedimento com a diferença obtida. Assim, temos

a) $10 = 8 + 2$

$$\begin{aligned} 10 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ 10 &= (1010)_2 \end{aligned}$$

b) $32 = 2^5$

$$\begin{aligned} 32 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ 32 &= (100000)_2 \end{aligned}$$

c) $200 = 128 + 64 + 8$

$$\begin{aligned} 200 &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^3 \\ 200 &= (11001000)_2 \end{aligned}$$

d) $512 = 2^9$

$$\begin{aligned} 512 &= 1 \cdot 2^9 \\ 512 &= (1000000000)_2 \end{aligned}$$

e) $1023 = 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

$$\begin{aligned} 1023 &= 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + \ldots + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ 1023 &= (1111111111)_2 \end{aligned}$$

2. Basta expandir cada número na base dada e, em seguida, efetuar a soma na base 10:

a) $(312)_4 = 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 54$

b) $(10011)_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 19$

c) $(11111)_5 = 1 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 781$

d) $(2000001)_3 = 2 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^0 = 1459$

3. As respostas pedidas são

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

4. Podemos escrever que

$$\begin{aligned} (243)_b &= (16)_b^2 \\ 2 \cdot b^2 + 4 \cdot b + 3 &= (1 \cdot b + 6)^2 \\ 2b^2 + 4b + 3 &= b^2 + 12b + 36 \\ b^2 - 8b - 33 &= 0 \end{aligned}$$

As raízes da equação anterior são -3 e 11. Como $b > 0$, ficamos com a resposta $b = 11$.

5. Vamos aplicar o método das divisões sucessivas.

a) Basta fazermos

$$\begin{array}{rrrrr} 20 & 2 & & & \\ 20 & 10 & 2 & & \\ 0 & 10 & 5 & 2 & \\ & 0 & 4 & 2 & 2 \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 0 & \end{array}$$

$\longleftarrow$

$20 = (10100)_2$

b) Basta fazermos

$$\begin{array}{rrrrr} 215 & 3 & & & \\ 213 & 71 & 3 & & \\ 2 & 69 & 23 & 3 & \\ & 2 & 21 & 7 & 3 \\ & & 2 & 6 & 2 \\ & & & 1 & \end{array}$$

$\longleftarrow$

$215 = (21222)_3$

c) Basta fazermos

$$\begin{array}{rrrr} 2000 & 7 & & \\ 1995 & 285 & 7 & \\ 5 & 280 & 40 & 7 \\ & 5 & 35 & 5 \\ & & 5 & \end{array}$$

$\longleftarrow$

$2000 = (5555)_7$

6. Temos que $x = 8a + b$ e $x = a^2 + b^2$. Sendo assim, podemos fazer $a^2 + b^2 = 8a + b$ o que leva a

$$a(a-8) = b(1-b).$$

Como $a, b \in \{1, 2, \ldots, 7\}$, podemos fazer todos os casos e concluir que $(a, b) \in \{(2,4), (6,4), (8,1)\}$.

7. De início, temos $x, y, n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq x, y \leq 9$. Assim, podemos fazer

$$\begin{aligned} x \cdot n^3 + y \cdot n^2 + x \cdot n^1 + y \cdot n^0 &= 1450 \\ xn(n^2+1) + y(n^2+1) &= 1450 \\ (n^2+1)(xn+y) &= 1450. \end{aligned}$$

Assim, $n^2 + 1$ é um divisor de 1450. Como $1450 = 2 \cdot 5^2 \cdot 29$, analisando todos os seus divisores, concluímos que a única possibiilidade é $n^2 + 1 = 50$ resultando $n = 7$. Por fim, obtemos

$$\begin{cases} xn + y = 29 \\ 7x + y = 29 \end{cases}$$

O que resulta em $x = 3$ e $y = 8$ ou $x = 4$ e $y = 1$. Mas apenas $(x, y) = (4, 1)$ atende o enunciado, pois $8 > 7$. Então $x + y + n = 12$.

8. Podemos escrever

$$\begin{aligned} \overline{N} &= (b+1)^3 b + (b+1)^2 b + (b+1)b + b \\ &= b[(b+1)^3 + (b+1)^2 + b + 1 + 1] \\ &= b[(b+1)[(b+1)^2 + (b+1) + 1] + 1] \\ &= b[(b+1)(b^2+3b+3) + 1] \\ &= b(b^3 + 4b^2 + 6b + 4) \\ &= b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 4b \\ &= (b^2+2b+2)(b^2+2b). \end{aligned}$$

Agora, perceba que

$$\begin{aligned} Q &= b^2 + 2b + 2 \\ &= 1 \cdot (b+1)^2 + 0 \cdot (b+1) + 1 \cdot (b+1)^0 \\ &= (101)_{b+1} \end{aligned}$$

9. Uma condição necessária e suficiente para o que número $(N)_7$ possua três dígitos na base 7 é:

$$(100)_7 \leq (N)_7 < (1000)_7.$$

Passando para a base 10, temos

$$(49)_{10} \leq (N)_{10} < (343)_{10} \Rightarrow 50 \leq (N)_{10} \leq 342$$

Agora, existem $342 - 50 + 1 = 293$ números neste intervalo, sendo o primeiro deles um ímpar. Como $293 = 2 \cdot 146 + 1$, podemos concluir que existem 147 ímpares, na base 10, que possuem três dígitos na base 7.

10. (Extraído da Olimpíada do Canadá)
Reescrevendo N na base 10, ficamos com

$$N = 7(b^2 + b + 1) = a^4,$$

para algum inteiro a. Como $7 \mid a^4$ e 7 é primo, $a^4 \geq 7^4$. Sendo assim, queremos minimizar b, e para tal podemos verificar que $a = 7$ funciona. Assim, quando $a = 7$, ficamos com $b^2 + b + 1 = 7^3$, cuja solução é $b = 18$.

11. (Adaptado do Fomin)
Basta o príncipe tentar fornecer valores X, Y e Z de modo ao resultado final já apresentar os valores secretos, isso pode ser feito como $X = 1$, $Y = 100$ e $Z = 100^2$. Assim, a soma $aX + bY + cZ$ representará um número escrito na base 100 com os três números secretos justapostos.

12. (Adaptado do site TutorBrasil)
A partir da fala do professor, podemos armar a equação

$$\begin{aligned} (24)_b + (32)_b &= (100)_b \\ 2b + 4 + 3b + 2 &= b^2 \\ b^2 - 5b - 6 &= 0 \end{aligned}$$

As raízes da equação anterior são -1 e 6. Como $b > 0$, concluímos que o professor utilizou a base 6.

13. (Adaptado do site TutorBrasil)
Podemos desenvolver o exposto como $n^2 - an + b = 0$ e $a = n^1 \cdot 1 + n^0 \cdot 8 = n + 8$, com $n > 8$. Daí, ficamos com

$$\begin{aligned} n^2 - (n+8)n + b &= 0 \\ b &= 8n \\ b &= n^1 \cdot 8 + n^0 \cdot 0 \\ b &= (80)_n. \end{aligned}$$

14. Em qualquer base b, os dígitos que podem ser usados são $\{0, 1, \ldots, [b-1]\}$. Sendo assim, o menor número com três algarismos é igual a $(100)_b = b^2$ e o maior com dois algarismos é igual a $([b-1][b-1])_b$, ao desenvolvermos esse último ficamos com

$$(b-1) \cdot b + b - 1 = b^2 - b + b - 1 = b^2 - 1.$$

Assim, pelo enunciado chegamos a

$$\begin{aligned} b^2 + b^2 - 1 &= k \\ b^2 + b^2 - 1 &= 31 \\ 2b^2 &= 32 \\ b^2 &= 16 \\ b &= \pm 4. \end{aligned}$$

Como $b > 0$, ficamos com $b = 4$.

15. Podemos escrever que

$$\sqrt{(61)_8} = \sqrt{6 \cdot 8 + 1}$$
$$\sqrt{49} = 7.$$

16. (Adaptado do concurso da FUNCAB (AC)
Observe que

$$\begin{aligned} A - B &= (11000)_2 - (10001)_2 \\ &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 - (1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^0) \\ &= 8 - 1 = 7. \end{aligned}$$

17. (Adaptado do vestibular da UFMG)
Do enunciado temos que

$$\begin{aligned} (103)_{10} &= (205)_b \\ 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 &= 2 \cdot b^2 + 0 \cdot b^1 + 5 \cdot b^0 \\ 100 + 0 + 3 &= 2b^2 + 0 + 5 \\ 2b^2 &= 98 \\ b^2 &= 49 \\ b &= 7, \text{pois } \ b > 0. \end{aligned}$$

18. (Adaptado do Colégio Naval)
Ao escrevermos números de 1 a 200 na base 8 teremos os intervalos

- $1 = (1)_8$ até $7 = (7)_8$ (7 números);
- $8 = (10)_8$ até $63 = (77)_8$ (56 números); e
- $64 = (100)_8$ até $200 = (310)_8$ (137 números).

Além disso, finalizaremos com a seguinte quantidade de algarismos:

Intervalo	Ordem(ns)	Total
$(1)_8$ até $(7)_8$	1	$7 \times 1 = 7$
$(10)_8$ até $(77)_8$	2	$56 \times 2 = 112$
$(100)_8$ até 310_8	3	$137 \times 3 = 411$
	TOTAL	530

19. (Adaptado da Olimpíada dos Estados Unidos)
A partir do enunciado podemos escrever a equação

$$\begin{aligned} (1000)_z - (440)_z &= (340)_z \\ z^3 - 4z^2 - 4z &= 3z^2 + 4z \\ z(z^2 - 7z - 8) &= 0 \end{aligned}$$

As raízes da equação anterior são 0, -1 e 8. Como $z > 0$, temos $z = 8$.

20. (Adaptado da FCC $-$ 2011)
Podemos calcular a velocidade entre os dois primeiros momentos como $v = \dfrac{\overline{ba} - \overline{ab}}{42} = \dfrac{9(b-a)}{42}$ e nos dois últimos como $v = \dfrac{\overline{a0b} - \overline{ab}}{60} = \dfrac{90a}{60}$. Assim, como a velocidade é constante, temos que

$$\begin{aligned} \frac{9(b-a)}{42} &= \frac{90a}{60} \\ \frac{b-a}{7} &= \frac{a}{1} \\ b - a &= 7a \\ b &= 8a \\ a = 1 &\text{ e } b = 8. \end{aligned}$$

Por fim, a velocidade é igual a $1,5$ metro por minuto e no primeiro momento eles haviam andado 18 metros, o que foi percorrido em $\dfrac{18}{1,5} = 12$ minutos. Logo, a caminhada começou às 15 horas e 49 minutos.

21. (OBM $-$ Eureka 2)
Vamos representar por 1 uma lâmpada acesa, e por 0 uma lâmpada apagada e interpretar o número obtido na base 2. Perceba que se, em algum passo, o último dígito for 0, ele será o único dígito alterado no próximo passo. Isto significa que o número aumentará 1 unidade. Caso contrário, o número terminará com um bloco de 1's antecipado por um 0, isto é, $(\ldots 011 \ldots 1)$, no próximo passo, o número será $(\ldots 100 \ldots 0)$. Mas observe que $(\ldots 011 \ldots 1) + 1 = \ldots 100 \ldots 0$. Portanto, em qualquer caso, o número k é sucedido pelo número $k + 1$.

a) Dada qualquer disposição inicial das lâmpadas, ou seja, qualquer número binário de no máximo n dígitos, em algum momento todos os dígitos serão iguais a 1, pois este é o maior número de n dígitos na base 2.

b) Existem 2^n números de no máximo n dígitos na base 2. Começando com 0, devemos chegar a $2^n - 1$, passando por todos os naturais intermediários. São necessários, então, $2^n - 1$ segundos.

c) Observe que a configuração inicial representa o número $2^5 + 2^4 + 2 = 50$. Para $n = 11$, todas as lâmpadas estarão acesas depois de $2^{11} - 1 - 50 = 1997$ segundos.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com