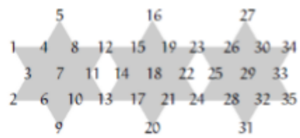
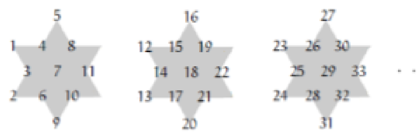
Exercício 1: Estrelix, um habitante de Geometrix, decidiu colocar os inteiros positivos seguindo a disposição indicada na figura.

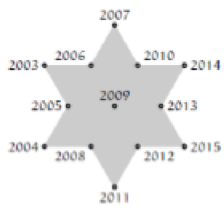


Em quais estrelas aparece o número 2011? Posicione todos os números que aparecem nas referidas estrelas?

Solução. Separe as estrelas deixando os números compartilhados sempre na estrela à direita. Fazendo isto, como indicado na figura a seguir, vemos que em cada estrela ficam escritos 11 números.



Dividindo 2011 por 11, obtemos quociente 182 e resto 9. Assim, o número 2011 é o nono número da 183^a estrela, que está representada na figura ao lado.



Exercício 2: Encontre o último algarismo do número 2^50.

Solução. Vamos escrever os últimos algarismos das primeiras potências de dois: 2, 4, 8, 6, 2, ... Vemos que 2^5 termina com 2, assim como 2^1. Como o último algarismo de qualqueer potência é determinado pelo último algarismo da potência anterior de 2, temos um ciclo: 2^6 termina com 4 (como 2^2), 2^7 termina com 8 (como 2^3), 2^8 termina com 6, 2^9 termina com 2, etc. Como o comprimento do ciclo é 4, o último algarismo do número 2^{50} pode ser encontrado usando-se o resto da divisão de 50 por 4. O resto é 2 e o último algarismo de 2^{50} é igual ao último algarismo de 2^2, que é 4.

Exercício 3: Encontre o resto da divisão do número 3^{1989} por 7.
A resposta é 6.

Exercício 4: Encontre os 4 últimos algarismos do número 5^{1000}.
Solução. Vamos calcular algumas potências de 5. De fato, só calcularemos os quatro últimos algarismos e, para isso, basta saber apenas os quatro últimos algarismos da potência anterior de 5. Temos: $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$,$5^5 = 3125$, $5^6 = ...56254$, $5^7 = ...8125$, $5^8 = ...0625$, $5^9 = ...3125$. Note que os quatro últimos algarismos de 5^9 são os mesmos que os de 5^5. Portanto, começando com 5^5, os quatro últimos algarismos das potências de 5 se repetirão periodicamente 3125, 5625, 8125, 0625, 3125, 5625, 8125, 0625, e assim por diante. Um aumento do expoente de 4 não altera os quatro últimos algarismos das potências de 5. Como o expoente 1000 é divisível por 4, os quatro últimos algarismos de 5^8, que são 0625.