

a área deste trapézio é igual a $\frac{(20 + 10)10}{2} = 150 \text{ m}^2$. Daí a área total do terreno é igual a

$$\text{área}(ABC) + \text{área}(ACDE) = 120 + 150 = 270 \text{ m}^2.$$

- (B) Como o terreno tem 270 m^2 , ao dividi-lo em duas partes $ABCF$ e $AFDE$ de áreas iguais, cada uma destas partes deve ter área igual a $\frac{270}{2} = 135 \text{ m}^2$. Note que $ABCF$ é um trapézio de base maior $\overline{AB} = 12 \text{ m}$, base menor \overline{CF} e altura $\overline{AC} = 20 \text{ m}$. Calculando a área deste trapézio pela fórmula usual e a igualando a 135 m^2 , obtemos

$$\frac{(12 + \overline{CF})20}{2} = 135.$$

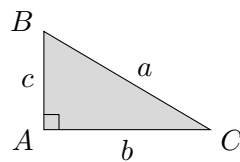
Resolvendo esta equação obtemos $\overline{CF} = 1,5 \text{ m}$.

8.2 Teorema de Pitágoras

O objetivo desta seção é apresentar e demonstrar o Teorema de Pitágoras e, em seguida, utilizar este teorema na solução de problemas. Antes de começar com esta parte mais matemática, vale a pena observar que na [Apostila 3](#) do PIC da OBMEP você pode estudar ainda mais sobre este importante teorema. Lá você pode ler sobre fatos históricos, a recíproca do Teorema de Pitágoras, triplas de números Pitagóricos, etc. A todos os alunos interessados deixamos como sugestão o estudo do primeiro capítulo daquela apostila.

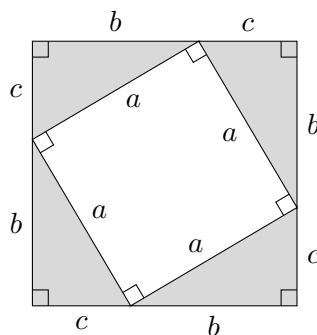
▲ 8.2 Teorema de Pitágoras

Considere um triângulo retângulo ABC com ângulo reto no vértice A . Vamos escrever os comprimentos dos lados deste triângulo como $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Lembre-se de que os lados de um triângulo retângulo recebem nomes: os **catetos** são os lados AC e AB que chegam no vértice do ângulo reto e a **hipotenusa** é o lado BC que não passa pelo vértice do ângulo reto.



Teorema de Pitágoras: *Se um triângulo retângulo possui hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c , então $a^2 = b^2 + c^2$. Em palavras, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.*

Existem várias demonstrações diferentes deste teorema. A demonstração que vamos explicar começa com a observação de que com quatro cópias do triângulo retângulo de catetos b e c é possível montar um quadrado de lado $b + c$ como está indicado na figura a seguir.



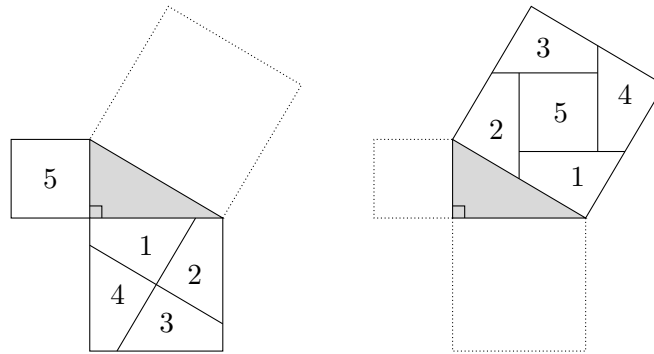
Agora vamos calcular a área deste quadrado de duas maneiras diferentes. Por um lado ele é um quadrado de lado $b + c$. Logo a sua área é igual a $(b + c)^2$. Por outro lado este quadrado é a união de um quadrado de lado a com quatro triângulos retângulos de catetos b e c . Somando as áreas destas figuras, vemos que a área do quadrado de lado $b + c$ também pode ser expressa por $4 \cdot \frac{bc}{2} + a^2$. Igualando as duas expressões obtidas para a área do quadrado de lado $b + c$ obtemos a igualdade $4 \cdot \frac{bc}{2} + a^2 = (b + c)^2$. Desenvolvendo e simplificando obtemos

$$4 \cdot \frac{bc}{2} + a^2 = (b + c)^2 \Rightarrow 2bc + a^2 = b^2 + 2bc + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 .$$

A última igualdade $a^2 = b^2 + c^2$ é exatamente a relação que queríamos obter.

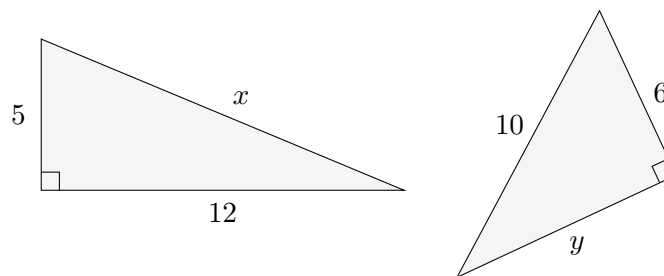
Podemos interpretar geometricamente o Teorema de Pitágoras do seguinte modo: se são construídos quadrados sobre os três lados de um triângulo retângulo, então “a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual a área do quadrado construído sobre a hipotenusa.” A figura a seguir (devida a Henry Perigal) mostra que é possível dividir os quadrados construídos sobre os catetos em 5 pedaços que podem ser reorganizados para montar o quadrado construído sobre a hipotenusa. Desta figura vemos exatamente esta interpretação para o Teorema de Pitágoras: a soma $b^2 + c^2$ das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual a área a^2 do quadrado construído sobre a hipotenusa.

▲ 8.2 Teorema de Pitágoras



O Teorema de Pitágoras nos fornece uma relação entre os três lados de um triângulo retângulo. Isto implica que se são conhecidos dois dos lados de um triângulo retângulo então é possível calcular o comprimento do terceiro lado. Vejamos isso em alguns exemplos.

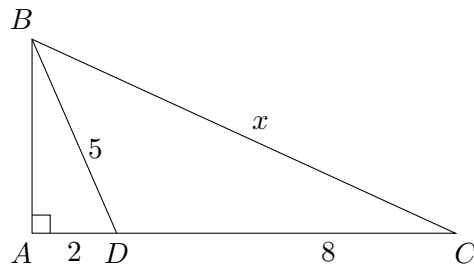
Exemplo 1: Nas figuras a seguir vemos dois triângulos retângulos. Utilizando os comprimentos dos lados dados nas figuras, calcule os comprimentos dos lados x e y .



Solução. Na figura da esquerda vemos um triângulo retângulo de hipotenusa x e de catetos 5 e 12. Aplicando o Teorema de Pitágoras obtemos a relação $x^2 = 5^2 + 12^2$. Logo $x^2 = 169$ e portanto $x = \sqrt{169} = 13$.

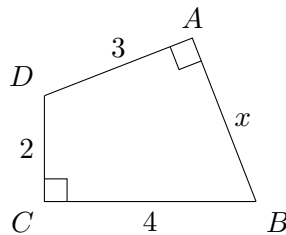
Na figura da direita vemos um triângulo retângulo de hipotenusa 10 e de catetos y e 6. Aplicando o Teorema de Pitágoras obtemos $10^2 = y^2 + 6^2$. Daí $100 = y^2 + 36 \Rightarrow y^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow y = \sqrt{64} = 8$.

Exemplo 2: Na figura a seguir os pontos A , D e C estão alinhados. Determine o comprimento x da hipotenusa do triângulo retângulo ABC .



Solução. Vamos chamar de y o comprimento do segmento AB . Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABD obtemos $5^2 = y^2 + 2^2$. Daí, $25 = y^2 + 4$ e portanto $y^2 = 25 - 4 = 21$. Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC , obtemos $x^2 = y^2 + 10^2$. Logo $x^2 = 21 + 100 \Rightarrow x^2 = 121 \Rightarrow x = \sqrt{121} = 11$.

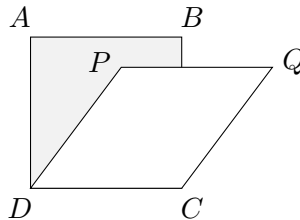
Exemplo 3: Na figura a seguir, o quadrilátero $ABCD$ possui dois ângulos retos. Determine o comprimento do lado AB .



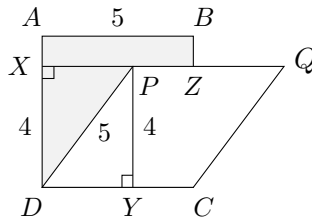
Solução. Trace o segmento BD e seja y o comprimento deste segmento. Observe que o quadrilátero $ABCD$ é a união de dois triângulos

retângulos BCD e ABD . Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BCD obtemos $y^2 = 2^2 + 4^2$, ou seja, $y^2 = 20$. Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABD , obtemos $y^2 = x^2 + 3^2$. Daí, $x^2 = y^2 - 9 = 20 - 9 = 11$ e portanto $x = \sqrt{11}$.

Exemplo 4: Na figura plana a seguir, sobre o quadrado cinza $ABCD$ com 25 cm^2 de área foi desenhado um losango branco $PQCD$ com 20 cm^2 de área. Determine a área cinza do quadrado que não ficou encoberta pelo losango.



Solução. Prolongue o segmento PQ até ele intersectar o segmento AD no ponto X e seja Y o ponto do segmento DC tal que PY é uma altura do losango $PQCD$. Seja Z o ponto de interseção dos segmentos PQ e BC . Observe que a figura sombreada é formada pelo retângulo $ABZX$ e pelo triângulo retângulo DPX . Para calcular a área desta figura vamos somar as áreas deste retângulo e deste triângulo retângulo.



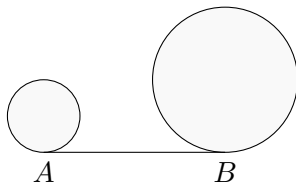
O losango tem base $\overline{DC} = 5 \text{ cm}$, tem altura PY , e sua área é igual a 20 cm^2 . Como a área de um losango é igual ao produto da base pela

altura, temos que $\overline{DC} \times \overline{PY} = 20$. Daí $5 \times \overline{PY} = 20$ donde $\overline{PY} = 4$ cm. Como $\overline{XD} = \overline{PY} = 4$ cm, vemos que $\overline{XA} = 5 - 4 = 1$ cm.

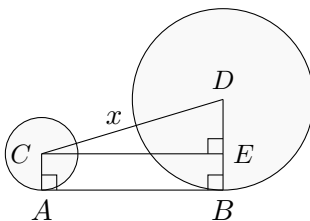
Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo DPX de cateto $\overline{XD} = 4$ cm e de hipotenusa $\overline{DP} = 5$ cm, concluimos que $\overline{XP} = 3$ cm.

Daí o retângulo $ABZX$ tem base $\overline{XZ} = 5$ cm e tem altura $\overline{XA} = 1$ cm. A área desse retângulo é então igual a $5 \times 1 = 5$ cm². Já o triângulo retângulo DPX tem base $\overline{XP} = 3$ cm e tem altura $\overline{XD} = 4$ cm. Sua área é então igual a $\frac{3 \times 4}{2} = 6$ cm². Finalmente, a área desejada da região cinza é igual a $5 + 6 = 11$ cm².

Exemplo 5: Na figura a seguir, AB é um segmento tangente às circunferências de raios 2 cm e 5 cm. Se o comprimento do segmento AB é igual a 10 cm, determine a distância entre os centros das circunferências.



Solução. Sejam C e D os centros das circunferências. Desenhe os segmentos CA e DB e desenhe o segmento CE paralelo a AB , como na figura a seguir.



▲ 8.2 Teorema de Pitágoras

131

Nesta figura temos que $\overline{CA} = 2 \text{ cm}$ e $\overline{DB} = 5 \text{ cm}$, pois estes dois segmentos são raios das circunferências. Além disso, $\overline{CE} = \overline{AB} = 10 \text{ cm}$ e $\overline{EB} = \overline{CA} = 2 \text{ cm}$, pois $ABEC$ é um retângulo. Daí $\overline{DE} = \overline{DB} - \overline{EB} = 5 - 2 = 3 \text{ cm}$. Se $x = \overline{CD}$, pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo retângulo CDE , obtemos

$$x^2 = 10^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 109 \Rightarrow x = \sqrt{109} \text{ cm.}$$

Exercícios:

1. Calcule o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 10.
2. Calcule o comprimento da diagonal de um retângulo 6×8 .
3. Um retângulo tem base de 9 cm e tem diagonal de 15 cm. Determine a altura deste retângulo.
4. Um quadrado tem diagonal com 8 cm de comprimento. Qual é a área deste quadrado?
5. Para o triângulo isósceles de lados 5, 5 e 4:
 - (a) Determine a altura relativa à base de comprimento 4.
 - (b) Determine a área do triângulo.
 - (c) Utilizando o fato de que a área de um triângulo é a metade da base vezes a altura, determine a altura relativa a base de comprimento 5.