é um inteiro qualquer, então esses números só admitem o zero como múltiplo comum (justifique), que será chamado do mínimo múltiplo comum (mmc) de a e b. Se a e b são ambos não nulos, mesmo que não sejam ambos positivos, então define-se o mínimo múltiplo comum (mmc) de a e b como sendo o menor múltiplo comum positivo; ou seja, o menor elemento positivo do conjunto

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}.$$

Problema 3.9. Suponha que os números 216 e 144 sejam múltiplos comuns de um determinado par de números a e b. Mostre que $\text{mmc}(a, b) \leq 72$.

SUGESTÃO: Utilize a propriedade (iv) do Problema 3.8.

3.3 Divisores

Nesta seção olharemos a noção de múltiplo sob outro ponto de vista.

Definição. Diremos que um número inteiro d é um *divisor* de outro inteiro a, se a é múltiplo de d; ou seja, se $a = d \times c$, para algum inteiro c.

Quando a é múltiplo de d dizemos também que a é *divisível* por d ou que d *divide* a.

Representaremos o fato de um número d ser divisor de um número a, ou d dividir a, pelo símbolo $d \mid a$. Caso d não divida a, escrevemos $d \nmid a$.

Assim, por exemplo, temos que

$$1 \mid 6, \quad 2 \mid 6, \quad 3 \mid 6, \quad 6 \mid 6, \quad -6 \mid 6, \quad -3 \mid 6, \quad -2 \mid 6, \quad -1 \mid 6.$$

Além disso, se $d \notin \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$, então $d \nmid 6$.

Temos também que $1 \mid a$ e $d \mid 0$, para todo d, inclusive quando $d = 0$, pois 0 é múltiplo de qualquer número[1].

Note também que se $d \mid a$, então $-d \mid a$, $d \mid -a$ e $-d \mid -a$

Note que se a e d são números naturais, com $a \neq 0$, e se $d \mid a$, então $d \leq a$. De fato, sendo a um múltiplo natural não nulo do número natural d, sabemos que $a \geq d$.

Problema 3.10. Mostre que das duas propriedades acima segue que, se a é um inteiro não nulo, os divisores de a são em número finito.

Problema 3.11. Mostre que se a e b são números naturais não nulos, então $a \mid b$ e $b \mid a$ se, e somente se, $a = b$.

Os critérios de multiplicidade podem ser reenunciados como critérios de divisibilidade.

Por exemplo, dado um número $n = n_r \dots n_1 n_0$ na sua representação decimal, temos o resultado:

n é divisível por 2 (ou seja múltiplo de 2) se e somente se n_0 é um número par.

---

[1] Isto absolutamente não quer dizer que podemos dividir zero por zero, pois como $0 = c \times 0$ para todo c, o "quociente" de 0 por 0 poderia ser qualquer número, logo não estaria bem definido.

Problema 3.12. Enuncie critérios de divisibilidade por 3, 4, 5, 8, 9 e 10.

Utilizando a noção de divisor, podemos também redefinir a noção de número primo como sendo um número $p > 1$ que só possui 1 e o próprio p como divisores positivos.

A divisibilidade possui várias propriedades importantes decorrentes das propriedades dos múltiplos e cuja utilização vai nos facilitar a vida.

A relação de divisibilidade é transitiva, ou seja, se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.

De fato, isto é o mesmo que a transitividade da relação de ser múltiplo (veja Problema 1.17).

Problema 3.13. Mostre as seguintes propriedades importantes da divisibilidade:

(a) Se $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid (b+a)$ e $d \mid (b-a)$.

(b) Se $d \mid (b+a)$ ou $d \mid (b-a)$ e $d \mid a$, então $d \mid b$.

(c) Conclua que d é um divisor comum de a e de b se e somente se d é um divisor comum de a e de $b-a$.

Definição. Dados dois números inteiros a e b não simultaneamente nulos, o maior divisor comum de a e b será chamado de *máximo divisor comum* de a e b e denotado por $\text{mdc}(a,b)$.

Note que
$$\text{mdc}(a,b) = \text{mdc}(b,a).$$