Roteiro de Estudos – OBMEP NA ESCOLA
Grupo N1 – Ciclo 1

Em 2017 o Planejamento Acadêmico do Programa OBMEP na Escola prevê a realização de 7 ciclos de estudos com duração de quatro semanas cada um. Em cada ciclo serão desenvolvidos estudos sobre conteúdos específicos de acordo com o seguinte esquema: um encontro inicial de formação entre professores e coordenadores, dois encontros com alunos e uma semana de estudos.

- **1ª semana**: encontro de formação entre os coordenadores e os professores da Educação Básica que atuam no Programa OBMEP na Escola.
- **2ª semana**: (encontro 1) aula presencial de quatro horas ministrada por cada professor para a sua turma de alunos convidados.
- **3ª semana**: Período destinado para estudo dos alunos e preparação dos professores.
- **4ª semana**: (encontro 2) aula presencial de quatro horas ministrada por cada professor para a sua turma de alunos convidados.

Neste roteiro de estudos vamos apresentar os conteúdos que devem ser estudados neste primeiro ciclo do grupo N1 além de sugerir atividades para coordenadores, professores e alunos.

1ª semana: encontro de formação (Professores da Educação Básica e Coordenadores)

No início de todos os ciclos, a primeira atividade que deve ser realizada é o encontro de formação entre professores e coordenadores. Nesse encontro que antecede as aulas que serão ministradas para os alunos, espera-se que sejam discutidos os conteúdos, os exercícios, as estratégias para o desenvolvimento dos estudos e os materiais de apoio ao ensino que foram disponibilizados. Dois aspectos fundamentais devem ser enfatizados nesse encontro:

- a metodologia a ser utilizada se baseia no ensino da matemática através da resolução de problemas. Assim, em cada roteiro de estudos são fornecidas listas de problemas, uma a cada aula, que devem ser trabalhadas junto aos alunos. Espera-se que ao longo desse trabalho uma discussão qualitativa sobre conceitos e resultados correlatos aos assuntos em foco seja estimulada.

- o aluno deve ter o pleno conhecimento de que a atividade presencial é apenas o início do processo de ensino inerente ao ciclo. Não é esperado que essa atividade presencial seja amplamente abrangente e conclusiva quanto a formação do aluno em relação aos conteúdos abordados. Então, os materiais presentes no **Portal da Matemática** (http://matematica.obmep.org.br/) irão complementar essa ação formativa. Logo, o aluno deve ser claramente informado da existência do Portal, dos materiais complementares lá existentes e da forma de acesso a esse ambiente virtual. As atividades presenciais e virtuais se complementam e cabe ao professor enfatizar isso junto aos alunos, incentivando continuamente a participação dos alunos nas atividades presentes no Portal. Salientamos que não é aceitável atitudes que se omitam de buscar essa parceria entre ações presenciais e virtuais.

Para que esse encontro de formação seja o mais proveitoso possível, antes da sua realização, recomendamos que os coordenadores e os professores:

- façam um estudo preliminar de todo este roteiro.
- assistam os vídeos indicados do Portal da Matemática ou do canal PICOBEMP no YouTube.
- resolvam os exercícios propostos.
- anotem suas dúvidas.

Durante esse encontro de formação deseja-se que:

- seja realizado um estudo dos materiais indicados e sejam esclarecidas as dúvidas.
- caso exista infraestrutura disponível, sejam discutidas algumas videoaulas.
- o coordenador deve promover discussões dos conceitos e dos exercícios mais importantes das aulas que serão ministradas para os alunos convidados.
- o coordenador auxilie os professores na preparação das aulas.
- ocorra uma troca de experiências e o compartilhamento de ideias entre os professores.

No que segue vamos detalhar os conteúdos das duas aulas (encontro 1 e encontro 2) deste ciclo que devem ser ministradas para os alunos convidados, indicando referências bibliográficas, videoaulas relacionadas e as listas de problemas que direcionarão o estudo a ser realizado em cada aula. Este detalhamento deve ser utilizado tanto na aula para os alunos quanto no encontro de formação entre professores e coordenadores.

ENCONTRO 1

2ª semana: aula para alunos convidados

Assuntos a serem abordados:

- Paridade
- Operações com números inteiros
- Padrões e sequências numéricas ou geométricas

Para o assunto "paridade", sugerimos os seguintes materiais de apoio a aula.

- Textos:

Seções 1.1 da Apostila do PIC "Encontros de Aritmética", F. Dutenhefner, L. Cadar. http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf

- Vídeoaulas do Portal da Matemática:

Tópicos Adicionais – Módulo: "sistema de numeração e paridade" – Aula: "paridade" – Videoaulas:

  - Problemas envolvendo paridade
  - Problemas com dominós
  - Dominós, pesagens e outros problemas

Para o assunto "operações com números inteiros", sugerimos os seguintes materiais de apoio a aula.

- Vídeoaulas do Portal da Matemática:

  - 6ª série – operações básicas – operações com números naturais – videoaulas 3, 4, 5, 6, 7 e 8 sobre adição, subtração, multiplicação e divisão: http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=60
  - 6ª série – operações básicas – operações com números naturais – caderno de exercícios: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/1kephf4nypzk7.pdf

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N1 – ciclo 1 – Encontro 1
ENUNCIADOS

No que segue, apresentamos uma lista de problemas que devem ser utilizados para direcionar o estudo da aula com os alunos convidados. Esses exercícios devem ser trabalhados segundo a metodologia do ensino da matemática através da resolução de problemas e as discussões desses exercícios devem motivar o estudo dos conteúdos propostos para esta aula.

Atividade. [jogo das faces] Para iniciar o estudo de paridade, sugerimos que a aula comece com a adivinhação "Jogo das Faces", descrita na página 2 da apostila "encontros de aritmética".

Exercício 1. Você pode encontrar cinco números ímpares cuja soma seja 100? Justifique a sua resposta.

Exercício 2. Pedro comprou um caderno com 96 folhas e numerou-as de 1 a 192. Vitor arrancou 25 folhas do caderno de Pedro e somou os 50 números que encontrou escritos nas folhas. Esta soma poderia ser igual a 1990? Justifique a sua resposta.

Exercício 3. Sem fazer a conta, determine se o seguinte número é par ou ímpar.

$$3 \times (5731 - 3597)^{2017} + (9876 - 6789)^{1500}$$

Atividade. [adivinhando uma soma gigante] Nesta atividade o professor adivinha o resultado de uma soma com 5 parcelas, com números digamos de 4 algarismos cada, sabendo apenas a primeira parcela fornecida pelo aluno. Como quatro das cinco parcelas não são conhecidas e como o aluno diz valores quaisquer para outras parcelas, parece impossível que o professor consiga adivinhar o resultado da soma a priori, e isso causa um efeito de muita surpresa nos alunos. Vamos descrever passo a passo como a atividade é realizada.

1º passo: o professor solicita que o aluno escreva um número com 4 algarismos. Só para ilustrar, vamos supor que, por exemplo, o aluno escreveu 5381.

2º passo: em um pedaço de papel, o professor escreve o resultado que terá a soma e entrega este papel dobrado para o aluno, sem ele ver o número, é claro. Neste caso o resultado é 25379.

Agora, alternadamente, aluno e professor escrevem números de 4 algarismos cada, um em baixo do outro, montando uma soma com 5 parcelas. (veja figura a seguir)

3º passo: o aluno escreve um número de 4 algarismos, digamos por exemplo, que ele escreveu 2843.

4º passo: logo em baixo o professor escreve o número 7156.

5º passo: agora é a vez do aluno. Ele escreve mais uma vez um número com 4 algarismos. Para ilustrar suponhamos que ele escreveu 5302.

6º passo: finalmente o professor escreve a última parcela da soma que neste caso deve ser 4697.

Agora, com os cinco números escritos um em baixo do outro, efetua-se normalmente a soma. Após esse cálculo que é relativamente grande (uma soma de 5 andares com números de 4 dígitos cada), o professor solicita que o aluno pegue o pedaço de papel que estava com ele desde o início da atividade e verifique que o número escrito é, por mais incrível que possa parecer, o resultado da soma, 25379.

	5381	←	aluno
	2843	←	aluno
+	7156	←	professor
	5302	←	aluno
	4697	←	professor
	25379		

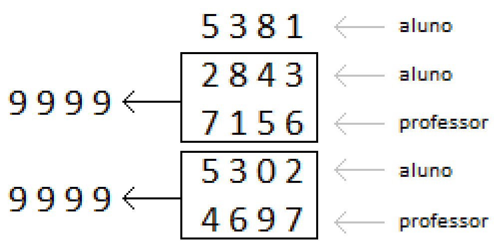
Agora vamos explicar detalhadamente porque a adivinhação funciona.

1. Como o professor determina o resultado da soma.

   O aluno começa dizendo um número qualquer de 4 algarismos. No exemplo o número escrito inicialmente foi 5381. Para escrever o número que será o resultado da soma, deve-se apenas subtrair duas unidades desse número, obtendo 5381-2=5379 e em seguida deve-se acrescentar um algarismo 2 a esquerda desse resultado, obtendo 25379. Esse é o algoritmo utilizado pelo professor para escrever o resultado da soma: subtrai duas unidades e acrescenta um algarismos 2 a esquerda do primeiro número escrito pelo aluno.

2. Como o professor deve proceder para escrever as suas duas parcelas da soma.

   Em cada vez, o professor escreve um número que soma 9999 com o último número escrito pelo aluno. Para fazer isso, basta pensar algarismo por algarismo, interando 9 com o algarismo correspondente escrito pelo aluno.



Por exemplo, na segunda parcela o aluno escreveu 2843 e o professor teve que escrever o número 7156 pois 2843+7156=9999. Observe que embaixo do 3 o professor colocou 6 por 3+6=9. Embaixo do 4 o professor colocou 5 pois 4+5=9, Embaixo do 8 o professor colocou 1 pois 8+1=9. E embaixo do 2 o professor colocou 7 pois 2+7=9.

Na última parte da soma o procedimento é o mesmo. O aluno escreve um número qualquer na quarta parcela da soma, no exemplo 5302, e o professor teve que escrever o número 4697 pois 5302+4697=9999. Observe que o professor pode pensar em um algarismo de cada vez: embaixo do 2 coloca o 7 pois 2+7=9; embaixo do 0 coloca o 9 pois 0+9=9; embaixo do 3 coloca o 6 pois 3+6=9 e embaixo do 5 coloca o 4 pois 5+4=9.

3. Porque a adivinhação funciona.

O aluno começa escrevendo um número A com 4 algarismos. Em seguida são acrescentadas mais quatro parcelas B, C, D e E formando a soma A+B+C+D+E. As parcelas C e E são ditas pelo professor de modo que B+C=9999 e D+E=9999. Daí a soma das cinco parcelas fica assim: A+B+C+D+E=A+(B+C)+(D+E)=A+9999+9999. Como 9999=10000-1, podemos escrever que A+B+C+D+E=A+(10000-1)+(10000-1) e portanto

$$A+B+C+D+E = A - 2 + 20000$$

Assim, se o professor proceder como explicado, o resultado da soma pode ser obtido subtraindo 2 do primeiro número escrito pelo aluno e em seguida somando 20000 a este resultado. Como os números possuem quatro algarismos, para acrescentar 20000 basta colocar um algarismo 2 do lado esquerdo do número.

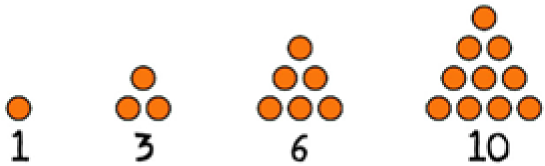
Exercício 4. (OBMEP 2005 – 1ª fase – N1Q6) Marina, ao comprar uma blusa de R$ 17,00, enganou-se e deu ao vendedor uma nota de R$ 10,00 e outra de R$ 50,00. O vendedor, distraído, deu o troco como se Marina lhe tivesse dado duas notas de R$ 10,00. Qual foi o prejuízo de Marina?

Exercício 5. (Banco de Questões 2017 – nível 1 – questão 1) Um cachorro avista um gato que está a 30 m de distância e começa a persegui-lo. Ambos começam a correr em linha reta, no mesmo sentido e com passadas sincronizadas. O cachorro se desloca 50 cm a cada passada enquanto o gato se desloca apenas 30 cm. Depois de quantas passadas o cachorro alcançará o gato? Justifique sua resposta.

Exercício 6. (OBMEP 2013 – 1ª FASE – N1Q12) Qual é o algarismo das dezenas da soma

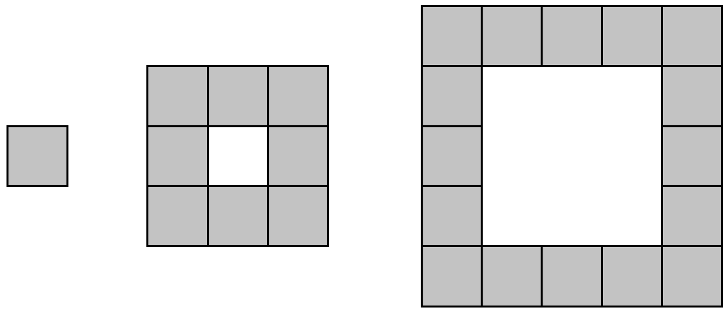
$$\underbrace{7}_{\substack{\text{um}\\\text{sete}}} + \underbrace{77}_{\substack{\text{dois}\\\text{setes}}} + \underbrace{777}_{\substack{\text{três}\\\text{setes}}} + \cdots + \underbrace{777\ldots77}_{\substack{\text{setenta e seis}\\\text{setes}}} + \underbrace{777\ldots777}_{\substack{\text{setenta e sete}\\\text{setes}}}$$

Exercício 7. [números triangulares] Observe a sequência de triângulos de bolinhas das figuras a seguir:

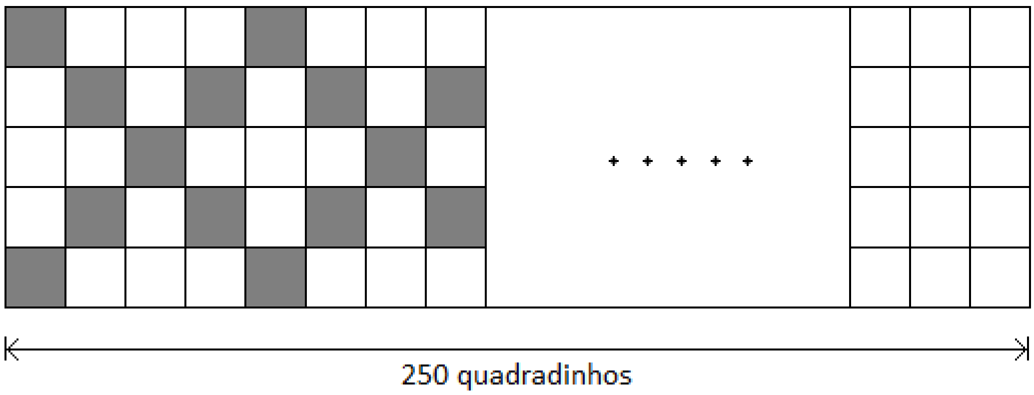


A primeira figura possui 1 bolinha. A segunda figura possui 1+2=3 bolinhas. A terceira figura possui 1+2+3=6 bolinhas e a quarta figura possui 1+2+3+4=10 bolinhas. Continuando desse modo, calcule o número de bolinhas das figuras 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Qual é o número de bolinhas da centésima figura, ou seja, calcule o valor da soma $1+2+3+\cdots+100$.

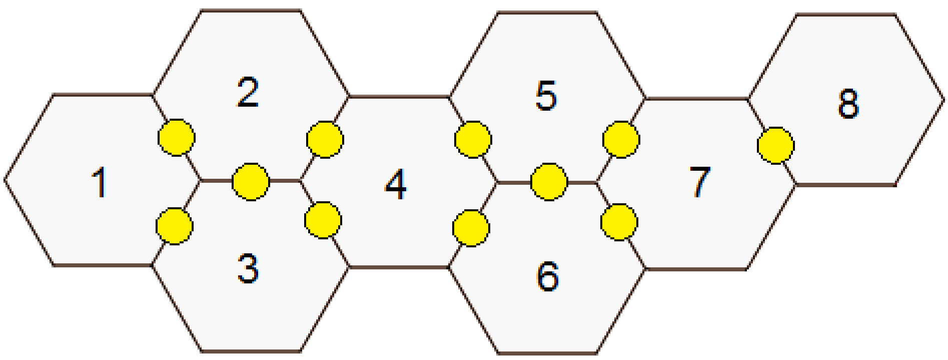
Exercício 8. (XXVIII – 28ª OBM – 2006 – 1ª fase – N1Q13) Usando pastilhas de cerâmica preta na forma de quadradinhos foi composta uma decoração numa parede, mostrada parcialmente abaixo. Quantas pastilhas foram empregadas em toda a decoração considerando-se que na última peça montada foram utilizadas 40 pastilhas pretas?



Exercício 9. (Banco de Questões 2006 – pg 17) Uma faixa quadriculada tem 5 quadradinhos na altura e 250 quadradinhos no comprimento. Alguns quadradinhos serão pintados de cinza, começando da esquerda, conforme o modelo ilustrado na figura, e continuando com este padrão até chegar ao final da faixa à direita. Nesta faixa, quantos quadradinhos não serão pintados?



Exercício 10. (OBMEP 2014 – 1ª fase – N1Q18) Gustavo fez uma tira com 300 hexágonos, fixando-os pelos lados comuns com um adesivo redondo, como na figura. Quantos adesivos ele usou?



Comentários sobre atividade: jogo das faces.

O Jogo das Faces está enunciado, comentado e resolvido nas páginas 2-4 da apostila Encontros de Aritmética.

Ao executar esta atividade para uma turma grande de alunos, sugerimos trocar as moedas por folhas de papel, cada uma delas branca de um lado e colorida do outro lado, apoiadas, por exemplo, no porta giz do quadro verde em frente à sala. As moedas também podem ser trocadas por muitos outros objetos como cartas de baralho ou copos, uns com a boca para cima e outros com a boca para baixo. Deste modo, esta é uma atividade de recreação matemática interessante que pode ser aplicada mesmo fora do ambiente da sala de aula.

Comentários sobre o Exercício 1.
Este é o exercício 2 da página 4 da apostila Encontros de Aritmética.

Um dos objetivos do estudo de paridade é explorar algumas propriedades dos números pares e ímpares, tais como:

- A soma de dois números pares é um número par.
- A soma de dois números ímpares é um número par.
- A soma de um par com um ímpar é um número ímpar.
- O produto de dois números pares é um número par.
- O produto de dois números ímpares é um número ímpar.
- O produto de um número par por um número qualquer é par.

No exercício, pergunta-se se é possível escrever o número 100 como uma soma a+b+c+d+e de cinco números ímpares. Vamos analisar esta soma por partes.

- a+b é um número par, pois é a soma de dois ímpares.
- Somando c, vemos que (a+b)+c é ímpar pois é a soma de um número par a+b com um número ímpar c.
- Somando d, vemos que (a+b+c)+d é par pois é a soma de um número ímpar a+b+c com um outro número ímpar d.
- Finalmente, somando e, vemos que (a+b+c+d)+e é ímpar pois é a soma de um número par a+b+c+d com um número ímpar e.

Portanto, nunca conseguimos escrever o número 100 (que é par) como a soma a+b+c+d+e (que é ímpar) de cinco números ímpares.

Comentários sobre o Exercício 2.
Este é o exercício 6 da página 6 da apostila Encontros de Aritmética.

Em cada página do caderno, de um lado está escrito um número ímpar e do outro lado está escrito um número par. Assim Vitor somou 25 números ímpares (obtendo um número ímpar) e somou 25 números pares (obtendo um número par). Como a soma de um número ímpar com um número par é um número ímpar, esta soma não pode ser igual ao número 1990, pois esse número é par.

Solução do Exercício 3. A solução deste exercício deve ficar mais fácil depois de serem discutidas as propriedades apresentadas na solução do exercício 1. Aqui também vamos analisar o número dado por partes.

$$3 \times (5731 - 3597)^{2017} + (9876 - 6789)^{1500}$$

- A diferença $5731 - 3597$ é um número par, pois é a diferença entre dois números ímpares.
- A potência $(5731 - 3597)^{2017}$ é um número par, pois ela representa uma multiplicação de vários números pares.
- O produto $3 \times (5731 - 3597)^{2017}$ é par, pois é o resultado da multiplicação de um número ímpar por um número par.
- Na outra parcela da soma, a diferença $9876 - 6789$ é um número ímpar, pois é a diferença entre um par e um ímpar.
- A potência $(9876 - 6789)^{1500}$ é um número ímpar, pois ela representa uma multiplicação de vários números ímpares.
- Concluímos então que na expressão dada, a primeira parcela da soma é par e a segunda parcela da soma é ímpar. O resultado da soma é, portanto, ímpar.

Comentários sobre a atividade: adivinhando uma soma gigante.

A atividade foi apresentada para uma soma de números com 4 algarismos cada um. Procedendo exatamente como foi explicado, ela pode ser generalizada para uma soma de números com 5 ou mais algarismos. Para ver uma descrição dessa atividade veja o seguinte vídeo Mágica da adivinhação da soma gigante e para ver uma descrição da solução, assista Revelação da mágica de adivinhação da soma. Observação: nestes vídeos é imposta a condição de que no primeiro número escrito pelo aluno, o último algarismo não pode ser igual a 0 e nem a 1. Na verdade, esta restrição não é necessária. E na solução apresentada no vídeo, é afirmado que o algarismo da dezena do resultado da soma é igual ao algarismo da dezena do primeiro número escrito pelo aluno. Esta afirmação é falsa, como você pode verificar no próprio exemplo apresentado na descrição desta adivinhação, escrita neste roteiro.

Solução do Exercício 4. Marina entregou para o vendedor 10+50=60 reais. E recebeu de volta 20-17=3 reais. Portanto Marina gastou 60-3=57 reais. Como ela deveria ter gasto 17 reais, o seu prejuízo foi de 57-17=40 reais. Observe que este é o valor da diferença 50-10=40 entre o valor da nota que ela entregou para a vendedora e o valor da nota que ela deveria ter entregue. Ou seja, é o valor da distração que ela pago por trocar uma nota de 10 por uma nota de 50 reais.

Solução do Exercício 5. No início, a distância entre o cachorro e o gato é de 30 m = 3000 cm. A cada passada, a distância entre o cachorro e o gato é reduzida em 50-30=20 cm. Deste modo podemos ver como a distância entre o cachorro e o gato diminui a cada passada.

Quantidade de passadas	Distância (cm)
0	3000
1	3000 – 20
2	3000 – 2x20
3	3000 – 3x20

Daí vemos que a distância vai ser igual a zero exatamente quando acharmos um múltiplo de 20 que é igual a 3000. Para achar esse múltiplo basta dividir $\frac{3000}{20} = 150$. Portanto, após 150 passadas o cachorro alcançará o gato.

Solução do Exercício 6. Aproveite este exercício para relembrar o algoritmo da soma de números naturais: escrevemos um número embaixo do outro, unidade em baixo de unidade, dezena embaixo de dezena, centena embaixo de centena, etc. Primeiro somamos todos os algarismos da casa da unidade. Deixamos o último algarismo desta soma embaixo e mandamos o restante para cima. E daí, repetimos o procedimento para os algarismos da casa das dezenas, das centenas, etc.

(Primeira solução) Vamos efetuar a soma dada procedendo como no algoritmo descrito acima. Ao somar os algarismos das unidades encontramos 7x77=539. Logo, deixamos o 9 como o algarismo da unidade da soma, e enviamos o 53 que deve ser adicionado à casa das dezenas.

Ao somar os algarismos das dezenas entramos 7x76=532 que somado ao 53 resulta 585. Deixamos o 5 como o algarismo da dezena da soma, e enviamos o 58 que deve ser adicionado à casa das centenas.

Portanto, concluímos que os dois últimos algarismos da soma são 59 e, assim, o algarismo da dezena da soma é o número 5.

(Segunda solução) Alternativamente, podemos observar que os algarismos da dezena e da unidade da soma só dependem da soma dos algarismos da unidade e da dezena das parcelas. Ou seja, na soma dada, em cada parcela podemos desconsiderar os algarismos que estão à esquerda do algarismo da dezena e podemos apenas considerar a soma $7+77+77+77+\cdots+77=7+76\times 77=5859$. Daí vemos que a soma dada tem como os dois últimos algarismos o número 59 e, assim, o algarismo da dezena da soma é o número 5.

Solução do Exercício 7. Para as figuras de 5 a 10 encontramos as seguintes quantidades de bolinhas:

Figura 5:	1+2+3+4+5=15
Figura 6:	1+2+3+4+5+6=21
Figura 7:	1+2+3+4+5+6+7=28
Figura 8:	1+2+3+4+5+6+7+8=36
Figura 9:	1+2+3+4+5+6+7+8+9=45
Figura 10:	1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55

Agora queremos generalizar e calcular a soma $S=1+2+3+\cdots+98+99+100$.

(Primeira solução) Para calcular esta soma, escrevemos suas parcelas de trás para frente assim: $S=100+99+98+\cdots+3+2+1$.

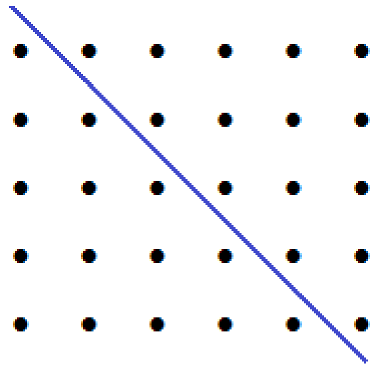
Agora somamos $S=1+2+3+\cdots+98+99+100$ com $S=100+99+98+\cdots+3+2+1$ somando cada parcela da primeira soma com a correspondente parcela da segunda soma, obtendo

$$2\times S=(1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(98+3)+(99+2)+(100+1)$$

$$2\times S=101+101+101+\cdots+101+101+101$$

Como temos 100 parcelas iguais a 101, o resultado da soma anterior é igual a $2\times S=100\times 101$. Daí $S=\dfrac{100\times 101}{2}=5050$.

(Segunda solução) Vamos ilustrar esta segunda solução de maneira geométrica, calculando, para exemplificar, a soma dos 5 primeiros números naturais 1+2+3+4+5. Para fazer isso, montamos um retângulo com 5x6=30 bolinhas e dividimos esse retângulo por uma linha, como ilustrado a seguir.



Observe que do lado de baixo desta linha e do lado de cima desta linha temos exatamente a mesma quantidade de bolinhas 1+2+3+4+5. Portanto, em cada metade, esta quantidade de bolinhas é igual à metade do total de bolinhas do retângulo. Daí

$$1+2+3+4+5=\frac{5\times 6}{2}=15$$

Para calcular a soma $1+2+3+\cdots+98+99+100$ podemos proceder do mesmo modo, fazendo um retângulo com 100x101 bolinhas e dividindo este retângulo por uma linha de modo que do lado de baixo e do lado de cima da linha as quantidades de bolinhas são igual à soma desejada $1+2+3+\cdots+98+99+100$. Portanto o valor desta soma é igual à metade do número total de bolinhas do retângulo com 100x101 bolinhas. Daí

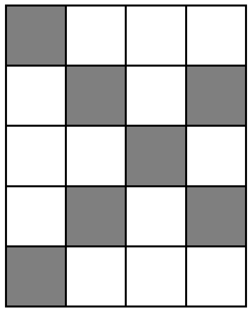
$$1+2+3+\cdots+98+99+100=\frac{100\times 101}{2}=5050$$

Solução do Exercício 8. Na última peça da decoração foram utilizadas 40 pastilhas pretas. Esta peça é um quadrado. Vamos calcular a quantidade de pastilhas pretas em cada lado deste quadrado. Retirando os quatro cantos, ficamos com 40-4=36 pastilhas pretas. Dividindo por 4 lados, obtemos 36÷4=9 pastilhas pretas dentro de cada lado do quadrado. Retornando com as pastilhas dos cantos, a última peça da decoração é um quadrado de lado 9+2=11.

De modo alternativo, esta quantidade 11 pode ser encontrada através de um cálculo algébrico. Seja *n* o número de pastilhas pretas em cada lado de uma peça. Então, são necessárias $4\cdot(n-2)+4=4n-8+4=4n-4$ pastilhas pretas para formar a peça inteira. Na última peça da decoração temos $4n-4=40$. Resolvendo esta equação obtemos $n=11$.

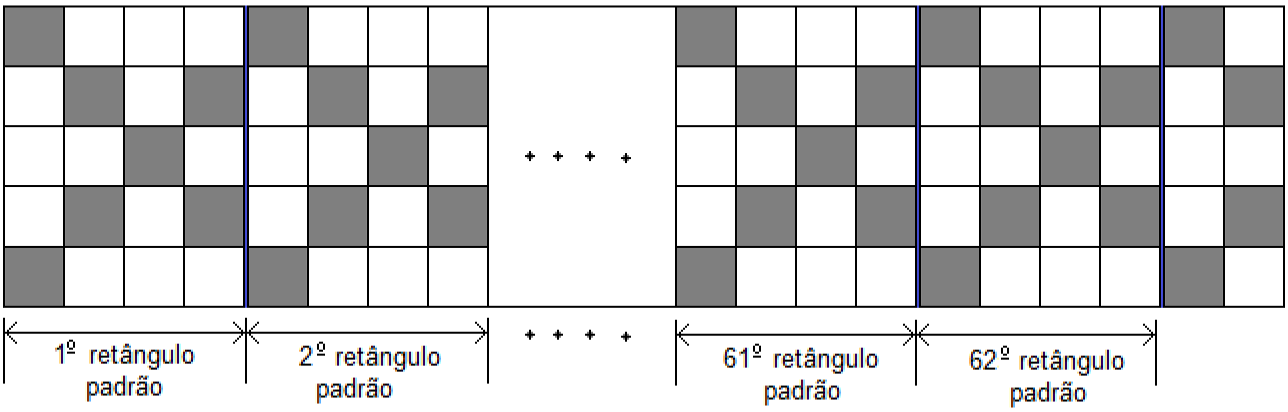
Agora note que para contar a quantidade total de pastilhas pretas utilizada para formar toda a decoração, basta observar que cada peça da esquerda se encaixa na peça da direita. Se encaixarmos todas, teremos um quadrado completamente preto de lado igual a 11 quadradinhos. Portanto, o número de pastilhas pretas utilizada foi $11^2=121$.

Solução do Exercício 9. Observe que a figura dada no enunciado tem alguma espécie de simetria, algo que se repete de tempos em tempos. Neste tipo de questão, quando percebemos uma repetição, algo periódico, precisamos encontrar esse padrão que fica se repetindo infinitamente. Observe que, neste exercício, para pintar toda a faixa, basta copiarmos lado-a-lado o retângulo padrão de 5 linhas e 4 colunas mostrado na figura ao lado.



Neste retângulo padrão temos 7 quadradinhos pintados e 13 quadradinhos não pintados. Precisamos saber quantos retângulos padrão cabem na faixa. A faixa tem 250 colunas e cada retângulo padrão tem 4 colunas. Da divisão de 250 por 4 temos que $250 = 4 \times 62 + 2$, e concluímos que na faixa cabem 62 retângulos padrão, sobrando ainda duas colunas.

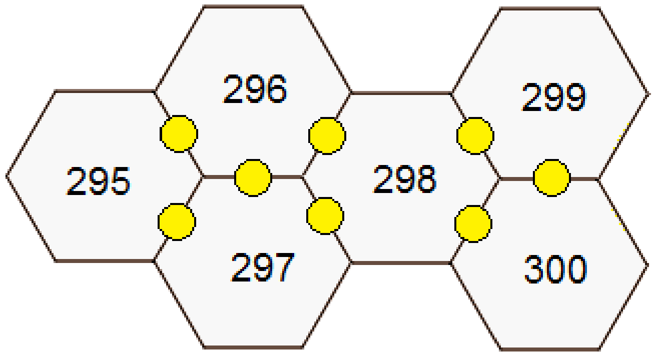
Nos 62 retângulos padrão temos $62 \times 13 = 806$ quadradinhos não pintados. Falta agora verificar quais os quadradinhos não pintados nas duas colunas finais da faixa. Ora, essas duas colunas finas são as duas primeiras colunas do retângulo padrão. Portanto, nessas colunas temos 6 quadradinhos não pintados. Finalmente, o número de quadradinhos não pintados em toda a faixa é $806 + 6 = 812$.



Solução do Exercício 10. (Primeira solução) Para fixar o trio de hexágonos 1-2-3, Gustavo usou três adesivos. O mesmo ocorreu para fixar os demais noventa e nove trios de hexágonos: 4-5-6, 7-8-9, 10-11-12, ..., 298-299-300. Como são 100 trios e 3 adesivos para cada trio, Gustavo usou $100 \times 3 = 300$ adesivos nessa montagem de trios.

Agora, para fixar um trio no outro, Gustavo usou dois adesivos. Como o primeiro trio não precisou ser fixado a ninguém, Gustavo usou então $99 \times 2 = 198$ adesivos para juntar um trio no outro. No total, ele usou $300 + 198 = 498$ adesivos.

(Segunda solução) Para fixar os quatro primeiros hexágonos 1-2-3-4, Gustavo usou cinco adesivos. Na sequência, para fixar os adesivos 4-5-6-7, Gustavo também usou cinco adesivos. Isso segue até o final da figura montada pelo Gustavo, com exceção da última sequência em que são usados 2 cartões a menos. Como temos 300 cartões, temos 100 desses conjuntos de quatro cartões, lembrando que no último desses conjuntos são usados apensas 3 cartões. Daí concluímos que foram usados $100 \times 5 - 2 = 498$ adesivos (ou $99 \times 5 + 3 = 498$).



3ª semana: Período destinado para estudo dos alunos e preparação dos professores

Em cada ciclo, a terceira semana é destinada para estudos individuais ou em grupo. Nesta semana, alunos e professores devem se dedicar para o estudo dos materiais teóricos indicados, para assistir as videoaulas e para resolver os exercícios propostos.

Nesta semana não existe nenhuma aula programada e nenhum encontro entre coordenadores, professores e alunos. Esta é uma semana de estudo. Por este motivo, é muito importante que no primeiro encontro entre professores e alunos convidados, o professor passe o maior número possível de informações para os alunos, indicando apostilas, videoaulas e exercícios.

ENCONTRO 2

4ª semana: aula para alunos convidados

Assuntos a serem abordados:

- Comparação de números, relação de ordem.
- Frações e decimais
- Frações como razões ou como porcentagens

Videoaulas do Portal da Matemática:

Na 6ª série do ensino fundamental, recomendamos as videoaulas dos módulos:

- Fração, o primeiro contato
- Fração como porcentagem e como probabilidade

Materiais de apoio a aula:

- 6ª série – frações o primeiro contato – frações e suas operações – material teórico: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8adw8gkagd8gk.pdf
- 6 ª série – frações o primeiro contato – frações e suas operações – caderno de exercícios: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/a2q8zswiivk84.pdf
- 6 ª série – frações o primeiro contato – frações como razões – material teórico: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5fq08opbilc08.pdf
- 6 ª série – frações o primeiro contato – frações como razões – caderno de exercícios: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/8aen0s25bi4gc.pdf
- 6 ª série – frações como porcentagem e como probabilidade – frações como porcentagem – material teórico: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/gg1tu0jgh48os.pdf
- 6 ª série – frações como porcentagem e como probabilidade – frações como porcentagem – caderno de exercícios: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/8273i1lufyckc.pdf
- 6 ª série – operações básicas – operações com números na forma decimal – caderno de exercícios: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/z7tvdgxw8b47.pdf

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N1 – ciclo 1 – Encontro 2
ENUNCIADOS

No que segue, apresentamos uma lista de problemas que devem ser utilizados para direcionar o estudo da segunda aula com os alunos convidados. Esses exercícios devem ser trabalhados segundo a metodologia do ensino da matemática através da resolução de problemas e as discussões desses exercícios devem motivar o estudo dos conteúdos propostos para esta aula.

Exercício 1. Paula comprou dois potes de sorvete, ambos com a mesma quantidade do produto. Um dos potes continha quantidades iguais dos sabores chocolate, creme e morango; e o outro, quantidades iguais dos sabores chocolate e baunilha. Então, é CORRETO afirmar que, nessa compra, a fração correspondente à quantidade de sorvete do sabor chocolate foi

A) 2/5
B) 3/5
C) 5/12
D) 5/6

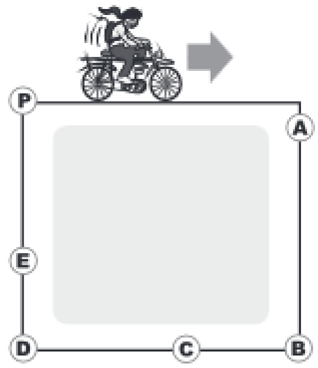
Exercício 2. (OBMEP 2005 – 1ª fase - N2Q18) Dois meses atrás o prefeito de uma cidade iniciou a construção de uma nova escola. No primeiro mês foi feito 1/3 da obra e no segundo mês mais 1/3 do que faltava. A que fração da obra corresponde a parte ainda não construída da escola?

Exercício 3. (OBMEP 2006 – 1ª fase – N2Q11) Um fabricante de chocolate cobrava R$ 5,00 por uma barra de 250 gramas. Recentemente o peso da barra foi reduzido para 200 gramas, mas seu preço continuou R$ 5,00. Qual foi o aumento percentual do preço do chocolate desse fabricante?

Exercício 4. Sem utilizar uma calculadora, coloque as seguintes quatro frações em ordem crescente.

$$\frac{3}{7} \qquad \frac{7}{17} \qquad \frac{8}{19} \qquad \frac{13}{31}$$

Exercício 5. (OBMEP 2007 – 1ª fase – N1Q6) Sueli resolveu dar uma volta em torno de uma praça quadrada. Ela partiu do vértice P, no sentido indicado pela flecha, e caiu ao atingir 3/5 do percurso total. Qual dos pontos A, B, C, D, E ou P indicados na figura corresponde ao lugar em que Sueli caiu?



Exercício 6. (OBMEP 2012 – 1ª fase – N1Q7) A figura mostra uma reta numerada na qual estão marcados pontos igualmente espaçados. Os pontos A e B correspondem, respectivamente, aos números $\frac{7}{6}$ e $\frac{19}{6}$. Qual é o número que corresponde ao ponto C?

Exercício 7. (OBMEP 2006 – 1ª fase – N1Q16) Em uma caixa quadrada há 4 bolas brancas e 2 bolas pretas, e numa caixa redonda há 6 bolas, todas pretas. Paula quer que tanto na caixa quadrada quanto na redonda a razão entre a quantidade de bolas brancas e o total de bolas em cada caixa seja a mesma. Quantas bolas brancas Paula precisa tirar da caixa quadrada e passar para a caixa redonda?

Exercício 8. (OBMEP 2006 – 1ª fase – N3Q2) Qual dos seguintes números está mais próximo de 1?

(A) $1+\frac{1}{2}$

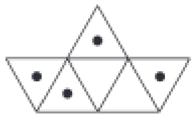
(B) $1-\frac{1}{8}$

(C) $1+\frac{1}{5}$

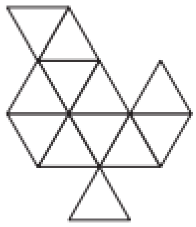
(D) $1-\frac{1}{3}$

(E) $1+\frac{1}{10}$

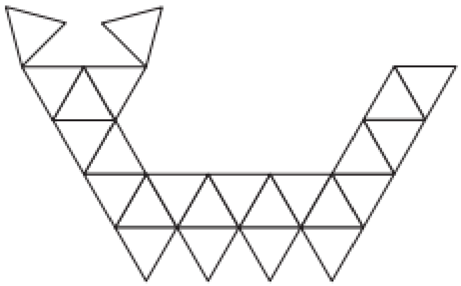
Exercício 9. (OBMEP 2008 – 2ª fase, N1Q1) Nesta questão todas as figuras são formadas por triângulos iguais. Veja como Chico Bento marcou 2/3 dos triângulos da figura a seguir.



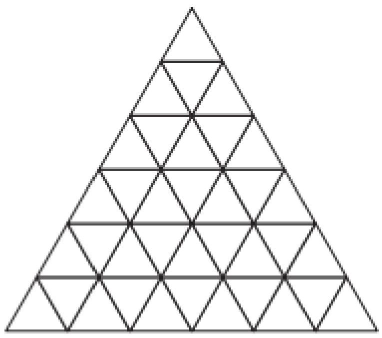
(a) Agora, marque você 3/4 dos triângulos da figura a seguir. Quantos triângulos você marcou?



(b) Ajude Chico Bento marcando mais que 1/4 e menos que 1/3 dos triângulos da figura ao lado. Quantos triângulos você marcou?



(c) Chico Bento marcou 7/12 dos triângulos da figura a seguir com a letra C e Doralina, por sua vez, marcou 3/4 dos triângulos com a letra D, de modo que todos os triângulos ficaram marcados. O número de triângulos marcados com duas letras corresponde a qual fração do número total de triângulos?



Exercício 10. (OBMEP 2012 – 2ª fase – N1Q3) Alberto, Beatriz, Carlos, Dulce e Eduardo ainda dormiam quando sua mãe saiu e deixou uma vasilha com jabuticabas e a instrução para que fossem divididas igualmente entre eles. Alberto acordou primeiro, pegou 1/5 das jabuticabas e saiu. Beatriz acordou depois, mas pensou que era a primeira a acordar e, por este motivo, pegou 1/5 das jabuticabas restantes e também saiu. Os outros três irmãos acordaram juntos, perceberam que Alberto e Beatriz já haviam saído e dividiram as jabuticabas restantes igualmente entre eles.

(a) Que fração do total de jabuticabas coube a Beatriz?
(b) Quem ficou com a menor quantidade de jabuticabas? Quem ficou com a maior quantidade de jabuticabas?
(c) Ao final da divisão, nenhum dos irmãos ficou com mais do que 20 jabuticabas. Quantas jabuticabas havia na vasilha?

Solução do Exercício 1. (Primeira solução) A quantidade de chocolate no pote de três sabores corresponde a $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ do total de sorvete comprado, pois apenas um pote corresponde a metade do total de sorvete e neste pote apenas um terço tem chocolate. Já a quantidade de chocolate no pote de dois sabores corresponde a $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ do total de sorvete comprado, pois apenas um pote corresponde a metade do total de sorvete e neste pote apenas a metade tem chocolate. Somando, vemos que $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$ do total de sorvete comprado corresponde ao sabor chocolate.

(Segunda solução) Como um pote tem três sabores e o outro pote tem dois sabores, vamos supor que cada pote tem, digamos, 600 ml de sorvete. Aqui escolhemos 600 pois este é um número fácil de dividir por 3 e por 2. Deste modo, no pote de 3 sabores temos 600÷3=200 ml de chocolate, e no pote com dois sabores temos 600÷2=300 ml de chocolate. Ao todo foram comprados 1200 ml de sorvete e desse total, 200+300=500 ml são do sabor chocolate. A proporção de chocolate em relação ao todo comprado é igual a $\frac{500}{1200}=\frac{5}{12}$.

Solução do Exercício 2. No primeiro mês foi construído $\frac{1}{3}$ da escola, restando assim $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ da escola para serem construídos. Logo, no segundo mês foi construído $\frac{1}{3}$ dos $\frac{2}{3}$ restantes, isto é, $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ da escola. Portanto, nos dois meses foram construídos $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$ da escola, e falta construir $1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$ da escola.

Solução do Exercício 3. Inicialmente o fabricante cobrava R$ 20,00 por quilo e passou, com o aumento de preço, a cobrar R$ 25,00 por quilo. Logo o aumento do preço foi de R$ 5,00 por quilo. Como preço inicial era de R$ 20,00 e aumentou R$ 5,00 o aumento percentual foi de $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}=0{,}25=25\%$.

Solução do Exercício 4. Para resolver este exercício você poderia colocar todas as frações em um mesmo denominador calculando $mmc(7,17,19,31) = 7 \times 17 \times 19 \times 31$ pois todos esses quatro números são primos. De maneira equivalente, você também pode comparar frações multiplicando em cruz, como está ilustrado a seguir.

- Comparando as duas primeiras frações vemos que $\frac{7}{17} < \frac{3}{7}$ pois $49 < 51$.
- Agora, considerando a terceira fração, $\frac{7}{17} < \frac{8}{19}$ pois $133 < 136$ e $\frac{8}{19} < \frac{3}{7}$ pois $56 < 57$. Até aqui já temos a ordenação das três primeiras frações: $\frac{7}{17} < \frac{8}{19} < \frac{3}{7}$.
- Considerando agora a última fração, temos que $\frac{7}{17} < \frac{13}{31}$ pois $217 < 221$ e $\frac{13}{31} < \frac{8}{19}$ pois $247 < 248$.

Daí vemos que a ordem das frações é $\frac{7}{17} < \frac{13}{31} < \frac{8}{19} < \frac{3}{7}$.

Solução do Exercício 5. Como Sueli quer dar uma volta completa, os pontos B e D correspondem, respectivamente, a 1/2 e a 3/4 do percurso. Como 3 /5 é maior do que 1 /2 , vemos que Sueli percorreu mais da metade do caminho, e portanto ultrapassou o ponto B. Por outro lado, como 3/5 é menor do que 3/4 , vemos que Sueli não chegou ao ponto D. Concluímos que ela caiu entre os pontos B e D, ou seja no ponto C. Podemos também resolver esse problema como segue. O trajeto da Sueli consiste dos 4 lados do quadrado, logo ela caiu quando chegou a 3/5 x 4 = 12/5 de um lado. Como 12/5 = 10/5 + 2/5 = 2 + 2/5, vemos que Sueli caiu depois de percorrer 2 lados completos e mais 2/5 de um lado. Com os 2 lados ela chegou ao ponto B, mas como 2/5 é menor que 1 ela não chegou ao ponto D. Como antes, vemos que ela caiu no ponto C.

Solução do Exercício 6. A distância entre os pontos A e B é $\frac{19}{6} - \frac{7}{6} = \frac{12}{6}$. O segmento AB está dividido em quatro partes iguais. O comprimento de cada uma dessas partes é então $\frac{12}{6} \div 4 = \frac{12}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{6}$. Logo o ponto C corresponde ao número $\frac{7}{6} - \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

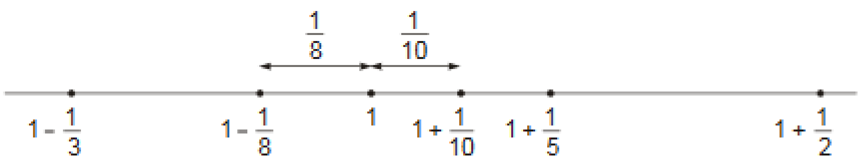
Solução do Exercício 7. (Primeira solução) Cada vez que se passa uma bola branca da caixa quadrada para a redonda, tanto o número de bolas brancas quanto o total de bolas na caixa quadrada diminui de 1. Já na caixa redonda, tanto o número de bolas brancas quanto o total de bolas aumenta de 1.

Número de bolas brancas passadas da caixa quadrada para a redonda	0	1	2	3	4
Caixa quadrada: $\frac{bolas\ brancas}{total\ de\ bolas}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{2}$
Caixa redonda: $\frac{bolas\ brancas}{total\ de\ bolas}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{10}$

Como $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$, Paula terá que passar 3 bolas brancas da caixa quadrada para a redonda.

(Segunda solução). Seja x a quantidade de bolas brancas que Paula deve passar da caixa quadrada para a redonda. Igualando a razão entre o número de bolas brancas e o número total de bolas em cada caixa, obtemos a equação $\frac{4-x}{6-x}=\frac{x}{6+x}$. Resolvendo esta equação obtemos $x=3$.

Solução do Exercício 8. Como $\frac{1}{10}<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ temos que $1+\frac{1}{10}<1+\frac{1}{5}<1+\frac{1}{2}$. Como $\frac{1}{8}<\frac{1}{3}$ temos que $1-\frac{1}{3}<1-\frac{1}{8}$. Logo estes números estão dispostos na reta como indica a figura a seguir.



Como $\frac{1}{10}<\frac{1}{8}$ segue que o número mais próximo de 1 é $1+\frac{1}{10}$.

Solução do Exercício 9.

(a) A figura é composta de 12 triângulos iguais. Como $\frac{3}{4}$ de 12 é $\frac{3}{4}\times 12=9$ devemos marcar 9 triângulos quaisquer.

(b) A figura é composta de 24 triângulos iguais. Como $\frac{1}{4}$ de 24 é igual a 6 e como $\frac{1}{3}$ de 24 é igual a 8, concluímos que o número de triângulos a serem pintados é um número maior do que 6 e menor do que 8. Logo devem ser marcados 7 triângulos quaisquer da figura.

(c) (primeira solução) A figura é composta de 36 triângulo iguais. Chico Bento escreveu C em $\frac{7}{12}\times 36=21$ triângulos e Doralina escreveu D em $\frac{3}{4}\times 36=27$ triângulos, totalizando 21+27=48 marcas. Como todos os triângulos foram marcados e só existem 36 deles, concluímos que o número de triângulos com duas letras é igual a 48-36=12. Este número corresponde a $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ dos triângulos.

(c) (segunda solução) A figura é composta de 36 triângulo iguais. Chico Bento escreveu C em $\frac{7}{12}\times 36=21$ triângulos e Doralina escreveu D em $\frac{3}{4}\times 36=27$ triângulos. Chico Bento deixou 36-21=15 triângulos em branco. Doralina, ao marcar seus 27 triângulos, preencheu estes 15 e mais 27-15=12 triângulos, que ficaram então com duas marcas.

Solução do Exercício 10.

(a) Alberto, primeiro a acordar, pegou $\frac{1}{5}$ do total de jabuticabas deixando $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ para os demais irmãos. Beatriz, segunda a acordar, pegou $\frac{1}{5}$ das jabuticabas deixadas por Alberto, pegando assim $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{5}$, ou seja, $\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{25}$ do total de jabuticabas.

(b) Alberto pegou exatamente $\frac{1}{5}$ e Beatriz pegou exatamente $\frac{4}{25}$ do total de jabuticabas. Os dois juntos pegaram, então, $\frac{1}{5}+\frac{4}{25}=\frac{9}{25}$ do total de jabuticabas, deixando na cesta $1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$ do total de jabuticabas. Cada um dos outros três irmãos, Carlos, Dulce e Eduardo, pegou um terço desta quantidade, ou seja, $\frac{1}{3} \times \frac{16}{25} = \frac{16}{75}$ do total de jabuticabas da cesta. Colocando tudo em um mesmo denominador vemos que:

Alberto pegou $\frac{1}{5} = \frac{15}{75}$ do total.

Beatriz pegou $\frac{4}{25} = \frac{12}{75}$ do total.

Carlos, Dulce e Eduardo pegaram, cada um, $\frac{16}{75}$ do total.

Logo foi Beatriz quem ficou com menos jabuticabas e Carlos, Dulce e Eduardo com mais jabuticabas.

(c) Como Carlos, Dulce e Eduardo ficaram com $\frac{16}{75}$ das jabuticabas cada um, e como essa fração é irredutível, o total de jabuticabas tem que ser múltiplo de 75. Por outro lado, como cada um dos cinco irmãos ficou com um número inteiro de jabuticabas menor ou igual a 20, o número total de jabuticabas é no máximo 5x20=100. O único múltiplo de 75 que é menor ou igual a 100 é o próprio 75. Logo, havia 75 jabuticabas na vasilha. Daí Alberto ficou com $\frac{1}{5} \times 75 = 15$ jabuticabas, Beatriz com $\frac{4}{25} \times 75 = 12$ jabuticabas e Carlos, Dulce e Eduardo com $\frac{16}{75} \times 75 = 16$ jabuticabas cada um.

--- FIM ---