**Questões de Revisão – Contagem e Paridade**

**Problema 1)**

1. 20162016 + 20152015 + 20142014 = Par + Impar + Par = Ímpar
2. 2016 + 2015 + ... + 1 = (2016+1) + (2015+2) + ... + (1009+1008) = 1008 x 2017 = Par x ímpar = Par.
3. Compare o item c) com o item b), como a paridade de cada parcela da soma não muda, a paridade do número do item a) é igual ao do item b), logo a soma deste número é Par também.
4. Observe que o número deste item é o mesmo número do item b) elevado ao cubo, portanto a paridade deste número é igual ao do Item b), logo a paridade é Par.

**Problema 2)** Suponhamos que Juquinha tenha acabado de desenhar a figura. Para cada vértice, contamos a quantos outros vértices ele está ligado e somamos todos esses números. Essa soma é par; de fato, como cada ligação conecta dois vértices, essa soma é duas vezes o números de ligações. Cada vértice par contribui com uma parcela par e cada vértice ímpar com uma parcela ímpar para essa soma; como a soma é par, o número de parcelas ímpares deve ser par, ou seja, o número de vértices ímpares é par.

**Problema 3)**

 *1º PARTE:* O algarismo 0 aparece nas unidades 222 vezes, nos números 10, 20, 30, . . . , 2 200. Aparece nas dezenas 220 vezes, nos números 10A, 20A, . . . , 220A. Aparece nas centenas 200 vezes, nos números 10AB e 20AB. Logo, o 0 apareceu 222 + 220 + 200 = 642.

 *2º PARTE:* Note que o 0 apareceu 642 vezes. Logo suponha que vamos escrever uma lista em que se um número de 1 a 2222 possui n zeros escrevemos eles n vezes. Note que deveriam haver 642 termos nesta lista, pois a quantidade de termos é o mesmo que a quantidade de zeros, calculado na primeira parte do problema. Note que se apagarmos os termos repetidos desta nossa lista, restaram apenas os números em que o 0 aparece. Logo basta calcular quantos números tem 2 ou 3 zeros, e subtrair a quantidade obtida dos 642. Desta forma, contemos :

* Números com 2 zeros : As possibilidades são números da forma :

A00 ou 100A, 10A0, 1A00, 200A, 20A0, 2A00. Observe que para as seis primeiras formas, a casa A pode assumir 9 valores diferentes, havendo 9 x 6 = 54 possibilidades. Para a última, como o número é menor que 2222 a casa A podem assumir os valores 1 ou 2, havendo 2 = 6 valores. Isto é, existem 54+2 = 56 números com dois zeros.

* Números com três zeros : Existe apenas os casos 1.000 e 2.000 .

Logo a quantidade de números em 0 apareceu é 642 – 56 – 4 = 582.

*2º Solução:* Utilizando o princípio multiplicativo, podemos dividir em 3 casos e calcular a quantidade de números.

1º Caso: Números que tem um zero :

* Com 2 algarismos : 9 números (10,20,30,40,...,90)
* Com 3 algarismos: (Se o 0 estiver na casa das unidades, haverá 9x9 = 81 maneiras de posicionar os outros números, e analogamente, haverá 81 maneiras se o 0 estiver na casa das dezenas, logo há 81+81 = 162 maneiras).
* Com 4 algarismos: Devemos considerar apenas os número de 1000 a 2222 logo o número pode ser da forma 1ABC, 21BC, 22BC ou 20BC. Se for da forma 1ABC e o 0 estiver na casa das unidades basta escolher os valores de A e B, havendo então 9x9 = 81 maneiras, como o 0 pode estar na casa das dezenas ou centenas, são 81 x 3 = 243 maneiras. Por outro lado, se o número for da forma 21BC e o 0 estiver na casa das unidades, basta escolher os valores de B, que serão 9, como o 0 pode estar na casa C, há mais 9 possibilidades. Por outro lado, para a forma 22BC, se o 0 estiver na casa B, há 9 possibilidades também, mas se o o 0 estiver na casa C, a casa B apenas pode ser 1 ou 2. Por último para o caso 20BC, note que o 0 já apareceu, portanto há 9 possibilidade para B e 9 para C, havendo 9x9 = 81 valores. .

Portanto no 1ºcaso há 9 + 162 + 243 + 11 + 18 + 81 = 524 números.

2º Caso: Números que tem dois zeros:

As possibilidades são números da forma :

A00 ou 100A, 10A0, 1A00, 200A, 20A0, 2A00. Observe que para as seis primeiras formas, a casa A pode assumir 9 valores diferentes, havendo 9 x 6 = 54 possibilidades. Para a última, como o número é menor que 2222 a casa A podem assumir os valores 1 ou 2, havendo 2 = 6 valores. Isto é, existem 54+2 = 56 números com dois zeros.

3º Caso: Números que tem três zeros:

Com 4 algarismos: As únicas possibilidade são 1000 e 2000

Total neste caso : 2

Portanto a resposta para o problema é 524 + 2 + 56 = 528 possibilidades.

*Ainda existem mais 2 soluções na apostila do PIC.*

**Problema 4)**

A primeira pessoa pode escolher sua cadeira de 5 modos; a segunda, de 4; a terceira, de 3. Pelo princípio multiplicativo são 5 × 4 × 3 = 60 maneiras.

**Problema 5)**

São 11 possibilidades para o capitão e 10 para o vice, pelo princípio multiplicativo, são 10 x 11 = 110 possibilidades.

**Problema 6)**

Chamando cada participante pela primeira letra de seu nome, as possibilidades de escolha dos 2 premiados são: AB , AC , AD , AE , BC , BD , BE , CD , CE , DE, ou seja, há 10 possibilidades. As possibilidades de escolha das duas premiações são: [Ouro Ouro], [Ouro Prata], [Ouro Bronze], [Prata Ouro], [Prata Prata], [Prata Bronze], [Bronze Ouro], [Bronze Prata] e [Bronze Bronze], ou seja, há 9 possibilidades. Pelo Princípio Multiplicativo, as diferentes formas de premiação são 10 x 9 = 90.

**Problema 7)**

Para cada questão no gabarito há 5 possibilidades, como são 10 questões, há 5x5x...x5 = 510 possibilidades.

**Problema 8)**



Primeiro pintamos o quadrado e o triângulo superior, o que pode ser feito de 3 x 2 = 6 maneiras diferentes. Uma vez isso feito, dividimos o problema em quatro casos de acordo com as cores dos triângulos menores da parte de baixo, como na figura. As letras minúsculas a e b indicam cores diferentes; notamos que como o quadrado já foi pintado, para os três triângulos menores só restam duas cores disponíveis. As letras maiúsculas A e B servirão apenas para denotar os triângulos maiores no que segue.

 • Caso 1: temos duas escolhas para a; uma vez feita essa escolha, podemos pintar A com duas cores, bem como B. Isso pode ser feito de 2 x 2 x 2 = 8 maneiras diferentes.

• Caso 2: temos duas escolhas para a e uma para b; feitas essas escolhas, podemos pintar A com duas cores e B com apenas uma. Isso pode ser feito de 2 x 1 x 2 x 1 = 4 maneiras diferentes.

• Caso 3: esse caso é análogo ao caso 2.

• Caso 4: temos duas escolhas para a e uma para b; feitas essas escolhas, só há uma possibilidade para pintar A e B. Isso pode ser feito de 2 x 1 x 1 x 1 = 2 maneiras diferentes. No total, temos 6 x (8 + 4 + 4 + 2) = 6 x 18 = 108 maneiras diferentes de pintar a figura.

**Problema 9)**

**Item a)** A princípio note que o problema permite que os algarismos se repitam. Temos dois casos :

-- Se o 0 estiver na casa das unidades : Então há 7 possibilidades para cada um dos outros casos, portanto há 7x7 = 49 possibilidades.

-- Se o 0 estiver não estiver na casa das unidades: Então há 3 possibilidades para a casa das unidades, há também 6 possibilidades para a casa das centenas, e por fim há 7 possibilidades para a casa das dezenas. Logo pelo princípio multiplicativo há 3 x 6 x 7 = 126 possibilidades.

Logo, o resultado é 49 + 126 = 175 possibilidades.

**Item b)** Há 3 casos :

1º Caso: Números com1 algarismo : 3 possibilidades.

2º Caso: Números com 2 algarismos: 6 x 3 = 18 possibilidades

3º Caso: Números com 3 algarismos: 6 x 7 x 3 = 126 possibilidades

Portanto são 3 + 18 + 126 = 47 números.

**Questões de Geometria**

As soluções das questões 1,2 e 3 bem como a demonstração das propriedades 1,2 e 3 encontram-se na apostila Teorema de Pitágoras e Áreas que estão disponíveis em <http://www.obmep.org.br/apostilas.htm> . Segue abaixo os links das soluções das questões das provas anteriores da OBMEP :

1. <http://www.obmep.org.br/provas_static/sf1n1-2010.pdf> (página 2)

2. <http://www.obmep.org.br/provas_static/sf1n2-2016.pdf> (página 4)

3. <http://www.obmep.org.br/provas_static/sf1n2-2016.pdf> (página 5)

4. <http://www.obmep.org.br/provas_static/sf1n2-2016.pdf> (página 7)

5. <http://www.obmep.org.br/provas_static/sf2n1-2010.pdf> (página 4)

6. <http://www.obmep.org.br/provas_static/sf2n1-2007.pdf> (página 2)

Qualquer dúvida, podem perguntar !

Bons Estudos!