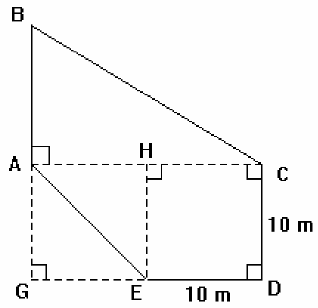
QUESTÃO 1



a) *1ª solução*: A figura ao lado mostra como decompor a região *ACDE* em um quadrado *CDEH* e um triângulo *AGE*. Como $CD = DE = 10$ e $AC = 20$, segue que $AG = 10$. Logo a área do triângulo *AGE* é metade da área de um quadrado de lado 10, ou seja, é

$$\frac{AG \times GE}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = 50 \text{ m}^2.$$

Como a área do quadrado *CDEH* é $10^2 = 100\,\text{m}^2$, concluímos que a área da região *ACDE* é $100 + 50 = 150 \text{ m}^2$.

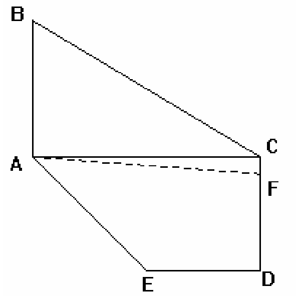
Alternativamente, podemos calcular a área de *ACDE* como a diferença entre as áreas do retângulo *ACDG* e do triângulo *AHE*, ou seja, $20 \times 10 - \frac{10 \times 10}{2} = 150 \text{ m}^2$.

2ª solução: Podemos calcular a área do trapézio retângulo *ACDE* pela fórmula usual

$$\frac{(AC + DE) \times CD}{2} = \frac{(20 + 10) \times 10}{2} = 150\,\text{m}^2$$

A área total do terreno é então

$$\text{área}(ACDE) + \text{área}(ABC) = 150 + 120 = 270 \text{ m}^2.$$



b) *1ª solução*: Como o terreno tem 270 m^2, ao dividi-lo em duas partes iguais cada uma das partes terá área de

$$\frac{270}{2} = 135 \text{ m}^2.$$

Desse modo, devemos ter

$$135 = \text{área}(ABCF) = \text{área}(ABC) + \text{área}(ACF) = 120 + \text{área}(ACF)$$

e vemos que $\text{área}(ACF) = 15 \text{ m}^2$. Por outro lado, a área do triângulo *ACF* é

$$\frac{AC \times CF}{2} = \frac{20 \times CF}{2} = 10 \times CF.$$

Portanto $10 \times CF = 15$ e logo $CF = 1{,}5$ m.

2ª solução: Como o terreno tem 270 m^2, ao dividí-lo nas partes de mesma área *ABCF e AFDE,* cada parte terá área de 135 m^2. Notamos que *ABCF* é um trapézio de bases *AB* e *CF* e de altura $AC = 20$; logo

$$135 = \text{área}(ABCF) = \frac{(12 + CF) \times 20}{2} = 120 + 10 \times CF$$

e segue que $CF = 1{,}5$.

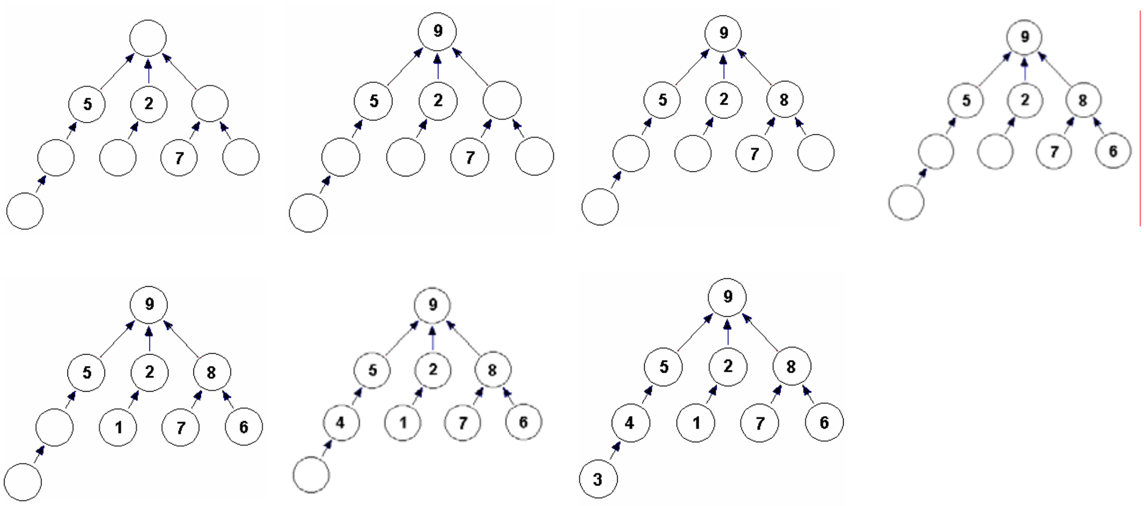
QUESTÃO 2

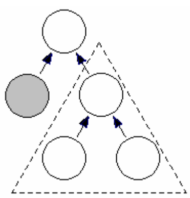
---

a) Só existe uma maneira de preencher o diagrama, como mostramos a seguir.

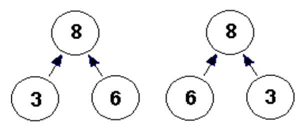
- O número 9 não pode ficar abaixo de nenhum número, logo deve ficar no topo.
- Acima do número 7 só podemos colocar o 9 e 8. Como o 9 já está no topo, o 8 ficará acima do 7.
- O número 6 não pode ficar abaixo do 5 nem do 2, logo ficará abaixo do 8 , ao lado do 7.
- O número 1 é o único que pode ficar abaixo do 2.
- Os números 3 e 4 devem ficar abaixo do 5, com o 3 debaixo do 4.

A seqüência de figuras a seguir ilustra as etapas deste raciocínio.





b) *1ª solução*: Primeiro vamos examinar o diagrama menor de três bolinhas marcadas pelo triângulo pontilhado, à esquerda. Para que ele fique bem preenchido com quaisquer três números positivos distintos, o maior número deve ficar no topo e os outros dois poderão ser colocados nos dois círculos de baixo de 2 maneiras diferentes. Por exemplo, se os números forem 3, 6 e 8, podemos dispô-los das 2 maneiras ilustradas à direita.



Para que o diagrama completo do problema fique bem preenchido com os números de 1 a 5, o 5 deve ficar no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 4. As três casas restantes, marcadas com o triângulo pontilhado, formam o diagrama analisado acima e poderão então ser preenchidas de 2 maneiras, com os três números restantes. Resumindo, podemos preencher o diagrama do seguinte modo:

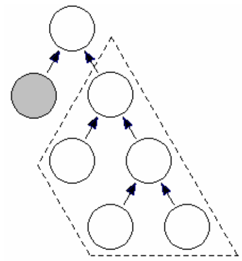
- preenchemos o círculo do topo com o 5: 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 ou 4 : 4 possibilidades;
- preenchemos as três casas que faltam com os três algarismos restantes: 2 possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $1\times 4\times 2=8$ maneiras diferentes. Notamos que este raciocínio se aplica para quaisquer cinco números positivos distintos. Isto será importante na resolução do próximo item.

2ª solução: Notamos primeiro que o 5 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 4 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 5, e então

- se o 4 ocupar a bolinha sombreada, o 3 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 5, e o 1 e o 2 podem ser colocados de duas maneiras diferentes nas duas bolinhas que sobram; temos duas possibilidades neste caso;
- se o 4 ocupar a outra bolinha abaixo do 5, a casa sombreada pode ser ocupada por qualquer dos números de 1 a 3, e os outros dois números podem ser colocados nas duas últimas bolinhas vazias; neste caso temos $3\times 2=6$ possibilidades.

Deste modo, o número de maneiras de preencher o diagrama é $2+6=8$.



c) *1ª solução*: Para que o diagrama fique bem preenchido com os números de 1 a 7, temos que colocar o 7 no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 6. A parte circundada pela linha pontilhada foi analisada no item (b) e pode ser preenchida com os 5 números restantes de 8 formas diferentes. Ou seja, podemos preencher o diagrama como segue:

- preenchemos o círculo do topo com o 7**:** 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 , 4, 5 ou 6**:** 6 possibilidades;
- preenchemos a parte circundada com os algarismos restantes: 8 possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 6 \times 8 = 48$ maneiras diferentes.

2ª solução: Notamos primeiro que o 7 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 6 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 7, e então

- se o 6 ocupar a bolinha sombreada, os números de 1 a 5 devem ocupar as casas circundadas com a linha pontilhada. De acordo com o item (b), isto pode ser feito de 8 maneiras distintas.
- se o 6 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 7, podemos colocar qualquer número de 1 a 5 na casa sombreada e distribuir os números restantes pelas quatro bolinhas ainda vazias, o que pode ser feito de 8 maneiras diferentes, de acordo com o item (b). Aqui temos $5 \times 8 = 40$ possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $8 + 40 = 48$ maneiras diferentes.

QUESTÃO 3

Para facilitar a escrita da solução, vamos dizer que x *é pai de* y *se* y *é filho de* x.

a) Suponhamos que $\frac{5}{7}$ seja filho de um número positivo *x*. Então $\frac{5}{7}=x+1$ ou $\frac{5}{7}=\frac{x}{x+1}$. A primeira equação leva a

$$x=\frac{5}{7}-1=-\frac{2}{7}$$

o que não pode acontecer pois $x>0$. A segunda equação leva a

$$7x=5(x+1)=5x+5\,.$$

donde $2x=5$ e segue que $x=\frac{5}{2}$. Logo o irmão de $\frac{5}{7}$ é $\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}$.

b) *1ª solução*: Notamos que se *x* é um número positivo então $x+1>1$ (em particular, $x+1$ é positivo) e $x+1>x$ (isto vale para qualquer número, não só para os positivos). Da última desigualdade e do fato de que $x+1$ é positivo concluímos que $\frac{x}{x+1}<1$; e como $\frac{x}{x+1}$ é um quociente de números positivos, concluímos que $0<\frac{x}{x+1}<1$. Logo dos filhos de *x* um é maior que 1 (o $x+1$) e outro menor do que 1 (o $\frac{x}{x+1}$); em particular, o 1 não tem pai. Vamos agora procurar os possíveis pais *x* de um número positivo *y.*

- se $y>1$ então $y=x+1$ e o pai de *y* é $x=y-1$.
- se $y<1$ então $y=\frac{x}{x+1}$ e o pai de *y* é $x=\frac{y}{1-y}$.

Concluímos que se *y* é positivo e $y\neq 1$ então *y* só tem um pai.

2ª solução: Suponhamos que *y* seja filho de *x* e de *z*. Temos então as possibilidades $x+1=z+1$, $\frac{x}{x+1}=\frac{z}{z+1}$, $x+1=\frac{z}{z+1}$ ou $\frac{x}{x+1}=z+1$; notamos que os dois últimos casos são equivalentes. No primeiro e no segundo caso obtemos $x=z$, e no terceiro chegamos a $x(z+1)=-1$, que não tem solução pois *x* e *z* devem ser positivos. Logo, se *y* tem pai, ele é único.

c) Vamos chamar $\frac{x}{x+1}$ de *filho menor* de *x*. Quando $x=\frac{1}{n}$ o filho menor de *x* é

$$\frac{x}{x+1}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}=\frac{1}{n+1}$$

Logo o filho menor de 1 é $\frac{1}{2}$, o filho menor de $\frac{1}{2}$ é $\frac{1}{3}$, o filho menor de $\frac{1}{3}$ é $\frac{1}{4}$ e assim por diante, até chegarmos a $\frac{1}{2008}$ como o filho menor de $\frac{1}{2007}$.

QUESTÃO 4

---

a) Dividimos o conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ nos subconjuntos $\{1,4,6,7\}$ e $\{2,3,5,8\}$. Como

$$1+4+6+7=18=2+3+5+8$$

e

$$1^2+4^2+6^2+7^2=102=2^2+3^2+5^2+8^2.$$

vemos que $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ é equilibrado.

b) Seja $A=\{a+1,a+2,a+3,\ldots,a+8\}$ um conjunto arbitrário de 8 números inteiros consecutivos. Do item (a) sabemos que $1+4+6+7=2+3+5+8$ (*) e $1^2+4^2+6^2+7^2=2^2+3^2+5^2+8^2$ (**). Da primeira igualdade segue que

$$(a+1)+(a+4)+(a+6)+(a+7)=(a+2)+(a+3)+(a+5)+(a+8)$$

ou seja, podemos dividir A nos subconjuntos $\{a+1,a+4,a+6,a+7\}$ e $\{a+2,a+3,a+5,a+8\}$ que têm a mesma soma. Para ver que a condição na soma dos quadrados também vale, basta calcular

$$(a+1)^2+(a+4)^2+(a+6)^2+(a+7)^2=4a^2+2a(1+4+6+7)+(1^2+4^2+6^2+7^2)$$

e

$$(a+2)^2+(a+3)^2+(a+5)^2+(a+8)^2=4a^2+2a(2+3+5+8)+(2^2+3^2+5^2+8^2).$$

Usando (*) e (**), concluímos que A é equilibrado.

Uma solução análoga é quando escrevemos $A=\{a,a+1,a+2,\ldots,a+7\}$. Neste caso, deve-se observar primeiramente que $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ é equilibrado; para ver isto, basta dividí-lo em $\{0,3,5,6\}$ e $\{1,2,4,7\}$. O restante da solução é idêntico, dividindo A nos subconjuntos $\{a,a+3,a+5,a+6\}$ e $\{a+1,a+2,a+4,a+7\}$.

c) Suponhamos que exista um número inteiro a tal que o conjunto $\{a,a+1,a+2,a+3\}$ seja equilibrado. A soma dos elementos desse conjunto é $4a+6$; para que ele satisfaça a primeira condição de um conjunto equilibrado, devemos dividí-lo em dois subconjuntos de dois elementos cada um e tais que a soma dos elementos de cada um deles seja $\frac{1}{2}(4a+6)=2a+3$; isto só é possível quando os subconjuntos são $\{a,a+3\}$ e $\{a+1,a+2\}$. Para que a segunda condição de um conjunto equilibrado seja satisfeita, devemos ter

$$a^2+(a+3)^2=(a+1)^2+(a+2)^2$$

ou seja

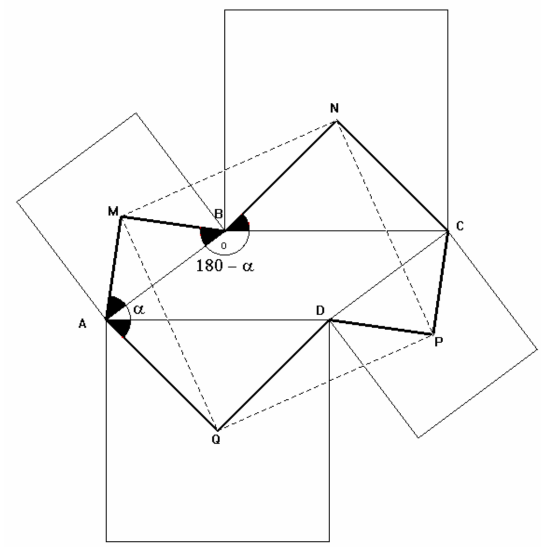
$$2a^2+6a+9=2a^2+6a+5.$$

Simplificando essa última igualdade chegamos a $4=0$, um absurdo. Logo nenhum conjunto com quatro inteiros consecutivos é equilibrado.

QUESTÃO 5

a) Para calcular a área do polígono *AMBNCPDQ*, basta observar que ele pode ser dividido no paralelogramo *ABCD* e nos triângulos *AMB*, *BNC*, *CPD* e *DQA*. Como *M*, *N*, *P* e *Q* são centros de quadrados, a área de cada um desses triângulos é um quarto da área do quadrado correspondente. Como dois desses quadrados têm área $4^2 = 16$ e os outros dois têm área $6^2 = 36$, a área procurada é

$$\text{área}(ABCD) + \text{áreas dos triângulos}$$
$$= 20 + \frac{1}{4}(16+16+36+36) = 46 \text{ cm}^2.$$



b) Seja α a medida do ângulo $D\hat{A}B$. Como *ABCD* é um paralelogramo, segue que $A\hat{B}C = 180^o - \alpha$. Por outro lado, como *M*, *N* e *Q* são centros dos quadrados correspondentes, os ângulos marcados em preto na figura ao lado são todos iguais a 45^o. Logo

$$M\hat{A}Q = Q\hat{A}D + D\hat{A}B + B\hat{A}M = 45^o + \alpha + 45^o = \alpha + 90^o$$

e

$$M\hat{B}N = 360^o - (A\hat{B}M + A\hat{B}C + N\hat{B}C)$$
$$= 360^o - [45^o + (180^o - \alpha) + 45^o]$$
$$= \alpha + 90^o$$

donde $M\hat{A}Q = M\hat{B}N$.

c) Como os quadrados sobre *AB* e *CD* são iguais, bem como os quadrados sobre *BC* e *AD*, e como *M*, *N*, *P* e *Q* são centros desses quadrados, temos $AM = MB = CP = PD$ e $BN = NC = AQ = QD$. Por outro lado, segue do item anterior que $M\hat{A}Q = M\hat{B}N = N\hat{C}P = P\hat{D}Q$, donde os triângulos *QAM*, *MBN*, *NCP* e *PDQ* são congruentes. Como *MNPQ* é obtido de *AMBNCPDQ*, retirando-se os triângulos *QAM* e *NCP* e adicionando-se os triângulos *MBN* e *PDQ*, temos $\textit{área}(MNPQ) = \textit{área}(AMBNCPDQ) = 46\,\text{cm}^2$.

A congruência dos triângulos *QAM*, *NBM*, *NCP* e *QDP* mostra que $QM = MN = NP = PQ$, ou seja, *MNPQ* é um losango. Para mostrar que *MNPQ* é um quadrado, basta então mostrar que um de seus ângulos internos é igual a 90^o; vamos fazer isso para $Q\hat{M}N$. Como *M* é o centro do quadrado sobre *AB*, temos que $A\hat{M}B = 90^o$; por outro lado, da congruência dos triângulos *AMQ* e *MBN* tiramos $Q\hat{M}A = B\hat{M}N$. Logo

$$Q\hat{M}N = B\hat{M}N + Q\hat{M}B = Q\hat{M}A + Q\hat{M}B = 90^o$$

e segue que *MNPQ* é um quadrado.

Alternativamente, basta mostrar que $QM = NP$ e que $Q\hat{M}N = 90^o$, como acima, e finalizar argumentando (por exemplo, por simetria) que a situação é idêntica nos outros vértices.

QUESTÃO 6

a) Vamos calcular a posição ocupada, após um embaralhamento, pela *n*-ésima carta da pilha. Há dois casos a considerar:

- $n \leq 52$ (ou seja, a carta está na metade superior da pilha): neste caso, após um embaralhamento, ficarão acima dela as primeiras n cartas da metade inferior e as primeiras $n-1$ cartas da parte superior. Logo, sua posição na pilha passará a ser $n+(n-1)+1=2n$.
- $n > 52$ (ou seja, a carta está na metade inferior da pilha Após um embaralhamento, ficarão acima dela as cartas precedentes da metade inferior, que são em número de $n-52-1=n-53$ e igual quantidade de cartas da metade superior. Logo, sua nova posição na pilha é $(n-53)+(n-53)+1=2n-105$.

Em particular, podemos agora completar a tabela, observando que $55=2\times 80-105$ e $5=2\times 55-105$.

número de embaralhamentos a partir da situação inicial	1	2	3	4	5	6
posição da carta de número 5 a partir do topo da pilha	10ª	20ª	40ª	80ª	55ª	5ª

b) Como visto acima, a carta que ocupa a posição n passa a ocupar, após um embaralhamento, a posição $2n$, *se* $n \leq 52$ ou $2n-105$, se $n > 52$.

c) Inicialmente, observamos que após um embaralhamento

- as cartas da metade superior da pilha se movem para baixo, pois $2n > n$ para todo n positivo;
- as cartas da metade inferior da pilha se movem para cima, pois $2n-105 < n$ para todo $n < 105$.

Logo, para que duas cartas troquem de posição entre si, uma delas deverá estar na metade superior da pilha e outra na metade inferior. Suponhamos que existam duas cartas com essa propriedade, e seja n a posição da carta de metade superior. Após um embaralhamento ela se move para a posição $2n$, e então a carta na posição $2n$ deve passar para a posição n. Como a carta na posição $2n$ está na metade inferior da pilha. devemos ter $2(2n)-105=n$, donde $n=35$. E, de fato, as cartas nas posições 35 e 70 trocam de posição entre si a cada embaralhamento, pois $2\times 35=70$ e $2\times(2\times 35)-105=35$. Além disso, concluímos que não há outro par de posições com esta propriedade.

d) Para simplificar a exposição, vamos escrever $x \to y$ para indicar que a carta que está na posição *x* vai para a posição *y* após um embaralhamento.

Suponhamos que exista um trio fixo, e seja *n* a posição da primeira carta desse trio a contar do topo da pilha. O argumento do item (c) mostra que as cartas não podem estar todas na metade superior ou todas na metade inferior da pilha; logo a posição *n* está na metade superior da pilha.

Após um embaralhamento temos $n \to 2n$; se *2n* está na parte superior da pilha então o trio fixo deve ser $n \to 2n \to 4n \to n$; se *2n* está na metade inferior da pilha então o trio fixo deve ser $n \to 2n \to 4n-105 \to n$. No primeiro caso, temos

$$n = 2(4n)-105 = 8n-105,$$

donde $n=15$; no segundo temos

$$n = 2(4n-105)-105 = 8n-315$$

donde $n=45$. Agora basta verificar que (15,30,60) e (45, 90,75) são efetivamente trios fixos.

A título de curiosidade e/ou como exercício para o(a) leitor(a), listamos na tabela a seguir todas as *k*-uplas fixas, incluindo os casos $k=2$ e $k=3$ trabalhados nos itens (c) e (d) acima.

k	*k*-uplas fixas
2	(35, 70)
3	(15, 30, 60), (45, 90, 75)
4	(7, 14, 28, 56), (21, 42, 84, 63), (49, 98, 91, 77)
6	(5, 10, 20, 40, 80, 55), (25, 50, 100, 95, 85, 65)
12	(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 23, 46, 92, 79, 53), (3, 6, 12, 24, 48, 96, 87, 69, 33, 66, 27, 54), (9, 18, 36, 72, 39, 78, 51, 102, 99, 93, 81, 57), (11, 22, 44, 88, 71, 37, 74, 43, 86, 67, 29, 58) (13, 26, 52, 104, 103, 101, 97, 89, 73, 41, 82, 59), (17, 34, 68, 31, 62, 19, 38, 76, 47, 94, 83, 61)

Observamos ainda que após 12 embaralhamentos todas as cartas voltam à posição inicial.