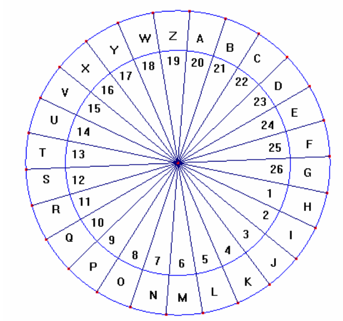
NÍVEL 2 - Prova da 2ª fase - Soluções

QUESTÃO 1 (a) A partir da figura do enunciado temos 23=S, 25=U, 7=C, 22=R e 13=I. Logo a palavra codificada como 23-25-7-25-22-13 é SUCURI.

(b) Para a chave 20 temos a figura ao lado, onde vemos que O=8, B=21, M=6, E=24 e P=9. Assim, a codificação de OBMEP é 8-21-6-24-9.



Alternativamente, ao passar da chave 5 para a chave 20 devemos somar 15 aos números da figura do enunciado, lembrando que se a soma for maior do que 26 devemos subtrair 26. Assim, temos

$$O = 19 + 15 - 26 = 34 - 26 = 8,\ B = 6 + 15 = 21,\ M = 17 + 15 - 26 = 6,$$

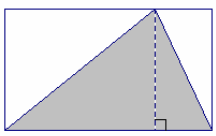
$$E = 9 + 15 = 24,\ P = 20 + 15 - 26 = 9$$

donde OBMEP é codificada como 8-21-6-24-9.

(c) Como não existe letra codificada como 0, um dos números associados a letras na seqüência 2620138 é o 20. À sua direita há três dígitos, mas como não há letra codificada como 138 ou 38, os números associados a letras são o 13 e o 8. Isto dá um total de 3 letras. Portanto, à esquerda de 20 só podemos admitir o 26. Logo, a codificação da palavra é 26-20-13-8, a qual, na chave 20, corresponde a GATO.

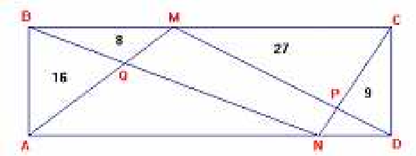
(d) Quando somamos três números consecutivos, obtemos um número divisível por 3; por exemplo, $14 + 15 + 16 = 45$. Ao somar os números que representam as letras A, B e C nessa certa chave, obtemos 52, que não é um número divisível por 3. Isso mostra que os três números não são consecutivos e isso somente é possível se um dos números for 26 e outro for 1. Como a soma é 52, o terceiro número é $52 - 27 = 25$. A única codificação de ABC, neste caso, é 25-26-1, ou seja, a chave é 25.

QUESTÃO 2 Lembramos que a área de um triângulo é dada pela fórmula $\dfrac{base \times altura}{2}$ e a área do retângulo por $base \times altura$. Na situação geral da figura ao lado, segue que a área do triângulo sombreado é metade da área do retângulo, pois ambos têm a mesma base e a mesma altura. Logo a soma das áreas dos dois triângulos brancos também é metade da área do retângulo, ou seja, igual à área do triângulo sombreado.



(a) Pelo visto acima, temos $área(AMD) = área(ABM) + área(MDC) = 16 + 8 + 27 + 9 = 60$ cm^2.

(b) Como $área(AMD) = área(BNC)$, temos



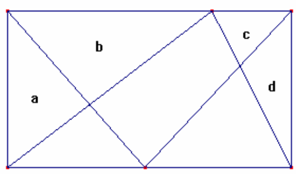
$$área(AQN) + área(NDP) = área(AMD) - área(MNPQ) = área(BNC) -$$

$$= área(BQM) + área(MPC) = 8 + 27 = 35\,\text{cm}^2$$

(c) Temos

$$área(MQNP) = área(BNC) - área(BQM) - área(MPC) = 60 - 8 - 27 = 25\,\text{cm}^2$$

Observação: As áreas dos triângulos nesse problema não foram escolhidas ao acaso. Fica como exercício mostrar que é possível construir a figura ao lado, onde *a*, *b*, *c* e *d* representam as áreas dos triângulos correspondentes, se e somente se $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{d^2}{c} = b + c$.



NÍVEL 2 - Prova da 2ª fase - Soluções

Solução alternativa para os itens (b) e (c): Podemos resolver primeiro o item (c), como segue. Como $\acute{a}rea(AMD) = \acute{a}rea(BNC) = 60\,\text{cm}^2$, temos $\acute{a}rea(MNPQ) = \acute{a}rea(BNC) - 27 - 8 = 25\text{ cm}^2$, obtendo então para o item (b)

$$\acute{a}rea(AQN) + \acute{a}rea(NDP) = \acute{a}rea(AMD) - \acute{a}rea(MNPQ) = 60 - 25 = 35\,\text{cm}^2$$

QUESTÃO 3 (a) Os divisores de 57 são 1, 3, 19, e 57, donde seus afilhados são 1, 3, 9 e 7.

(b) O exemplo mais simples é 49, cujos afilhados são 1, 7 e 9.

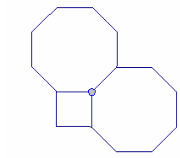
(c) Se um número tem um divisor terminado em 0 então este número é múltiplo de 10. Logo ele é múltiplo de 2 e de 5, e portanto 2 e 5 são seus afilhados.

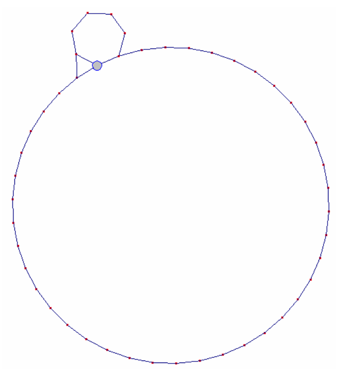
(d) Seja *N* um número que tem 0 e 9 como afilhados. Pelo item anterior, 2 é afilhado de *N*, logo *N* é par. Como 9 é afilhado de *N*, algum número ímpar terminado em 9 é divisor de *N*. Portanto, *N* é divisível pelo produto de 2 por esse número, ou seja, *N* é divisível por um número terminado em 8. Logo, 8 é afilhado de *N*.

QUESTÃO 4 (a) Para completar a primeira coluna da tabela basta substituir os valores $n = 5,6,8$ na fórmula $(n-2)\times 180^{\circ}$. Para completar a segunda coluna, basta dividir os valores da primeira coluna pelo valor correspondente de *n*, ou seja, calcular $\dfrac{(n-2)\times 180^{\circ}}{n}$; a justificativa para essa expressão é que polígono de *n* lados tem *n* ângulos internos iguais, cuja soma é $(n-2)\times 180^{\circ}$. A tabela completa é dada abaixo.

n	*Soma dos ângulos internos*	*Ângulo interno*
3	180º	60º
4	360º	90º
5	540º	108º
6	720º	120º
8	1080º	135º

(b) O ângulo interno de um quadrado é 90º e o de um octógono regular é 135º. Para que alguns polígonos regulares se encaixem, a soma de seus ângulos internos deve ser 360º. Como $90^{\circ} + 135^{\circ} + 135^{\circ} = 360^{\circ}$, segue que um quadrado e dois octógonos regulares se encaixam.





(c) O ângulo interno de um triângulo equilátero é 60º e o de um heptágono regular é $\dfrac{7-2}{7}\times 180^{\circ} = \dfrac{5}{7}\times 180^{\circ}$. Seja *n* o número de lados do terceiro polígono; o ângulo interno desse polígono é então $\dfrac{n-2}{n}\times 180^{\circ}$. Como os três polígonos se encaixam, temos

$$60^{\circ} + \frac{5}{7}\times 180^{\circ} + \frac{n-2}{n}\times 180^{\circ} = 360^{\circ}.$$

Logo

$$1+\frac{5}{7}\times 3+\frac{n-2}{n}\times 3=6$$

ou seja, $7n+15n+21(n-2)=42n$, donde $n=42$.

QUESTÃO 5 (a) O time B não perdeu nenhuma partida, logo empatou ou ganhou de A. Mas A não empatou nenhuma partida, logo A perdeu de B.

(b) O time A perdeu uma partida. Se tivesse perdido exatamente mais um jogo, teria 6 pontos. Mas B tem no mínimo 6 pontos, pois venceu A e não perdeu nenhuma das outras três partidas. Como A tem mais pontos que B, concluímos que A perdeu somente para B; e como A não empatou nenhuma partida, venceu as outras três. Logo A obteve 9 pontos.

(c) *1ª solução*: Como o time B não perdeu para nenhum outro time, ele ganhou 1 ou 3 pontos em cada partida, isto é, sempre um número ímpar de pontos. Como a soma de quatro números ímpares é par, vemos que B terminou o torneio com um número par de pontos.

2ª solução: Como ficou em segundo lugar, o time B fez menos do que 9 pontos, portanto venceu uma ou duas partidas. Como ele jogou quatro partidas, se venceu uma delas então empatou três, finalizando com 6 pontos; se venceu duas então empatou duas, finalizando com 6 pontos. Logo, as possibilidades para o número de pontos que B obteve nesse torneio são 6 e 8, ambos números pares.

(d) De acordo com os itens anteriores, A perdeu de B e venceu C, D e E. Dos 6 jogos restantes, 5 foram empates. Se B tivesse só 2 empates, então todos os jogos entre C, D e E seriam empates e os dois desses times que empataram com B terminariam empatados, o que contraria o enunciado. Logo, os três jogos de B contra C, D e E foram empates. Como houve um total de 5 empates, 2 dos jogos entre C, D e E foram empates. Como a ordem de classificação é C, D, E, a única vitória foi de C contra E. Temos, assim, a tabela de resultados abaixo.

A	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*C*	*C*	*D*
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
B	*C*	*D*	*E*	*C*	*D*	*E*	*D*	*E*	*E*

QUESTÃO 6 (a) Como saiu ímpar na primeira jogada, Isaura deu metade dos seus palitos para o Fernando; desse modo, Isaura ficou com 64 palitos, e como o número total de palitos é 256 segue que Fernando ficou com $256-64=192$ palitos.. Do mesmo modo, após a segunda jogada Isaura ficou com 32 palitos e Fernando com $256-32=224$ palitos. Na terceira jogada saiu par, e Fernando deu metade de seus palitos para a Isaura; logo, Fernando ficou com 112 palitos e Isaura com $256-112=144$ palitos.

Fernando	Isaura	**ímpar** → 1ª jogada	Fernando	Isaura	**ímpar** → 2ª jogada	Fernando	Isaura	**par** → 3ª jogada	Fernando	Isaura	
128	128		192	64		224	32		112	144	...

(b) *1ª solução*: Após qualquer jogada, o perdedor não pode ter mais que 127 palitos; de fato, se isso ocorresse, antes dessa jogada ele teria pelo menos $2\times 128=256$ palitos, o que não pode acontecer. O ganhador terá então no mínimo $256-127=129$ palitos; logo, o ganhador da jogada anterior é aquele que tem mais palitos.

2ª solução: Suponhamos que em um dado momento Fernando tem x palitos e Isaura tem y palitos; notamos que como $x+y=256$, que é um número par, então x e y são ambos pares ou ambos ímpares. Se o jogo ainda não acabou, então x e y são pares, e depois da jogada seguinte podem acontecer as seguintes situações:

- saiu **par**: nesse caso Fernando fica com $\frac{x}{2}$ palitos e Isaura com $y+\frac{x}{2}$ palitos, ou seja, Isaura fica com mais palitos do que Fernando;
- saiu **ímpar**: nesse caso Fernando fica com $x+\frac{y}{2}$ palitos e Isaura com $\frac{y}{2}$ palitos, ou seja, Fernando fica com mais palitos do que Isaura.

Isso mostra que basta saber quem tem o maior número de palitos para determinar o resultado da última jogada: se Isaura tiver mais, o resultado foi par e se Fernando tiver mais, o resultado foi ímpar. No nosso caso, a partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos e Isaura com $256-101=155$ palitos. Logo o resultado da última jogada foi **par**.

(c) Aplicamos o raciocínio do item (b) para recuperar as jogadas uma a uma em ordem inversa, do seguinte modo:

Fernando	Isaura
101	155

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2\times101=202$ palitos e Isaura tinha $256-202=54$ palitos;

Fernando	Isaura
202	54

Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2\times54=108$ palitos e Fernando tinha $256-108=148$ palitos;

Fernando	Isaura
148	108

Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2\times108=216$ palitos e Isaura tinha $256-216=40$ palitos;

Fernando	Isaura
40	216

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2\times40=80$ palitos e Fernando tinha $256-80=176$ palitos;

Fernando	Isaura
80	176

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2\times80=160$ palitos e Fernando tinha $256-160=96$ palitos;

Fernando	Isaura
160	96

Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2\times96=192$ palitos e Fernando tinha $256-192=64$ palitos;

Fernando	Isaura
64	192

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2\times64=128$ palitos e Isaura tinha $256-128=128$ palitos. Essa é a situação inicial do jogo.

Logo a seqüência de jogadas dessa partida foi **par**, **ímpar**, **par**, **par**, **ímpar**, **ímpar**, **par**.

(d) Vamos aproveitar o trabalho do item anterior e fazer o seguinte diagrama do número de palitos de Fernando e Isaura, jogada a jogada:

Fernando	$128=2^7\times1$	$64=2^6\times1$	$160=2^5\times5$	$80=2^4\times5$	$40=2^3\times5$	$148=2^2\times37$	$202=2^1\times101$	$101=2^0\times101$
Isaura	$128=2^7\times1$	$192=2^6\times3$	$96=2^5\times3$	$176=2^4\times11$	$216=2^3\times27$	$108=2^2\times27$	$54=2^1\times27$	$155=2^0\times155$

Esse diagrama e outros exemplos semelhantes sugerem que, em um momento qualquer de uma partida, o número de palitos de Fernando e o número de palitos de Isaura se escrevem, respectivamente, como $2^n a$ e $2^n b$, onde a e b são inteiros ímpares. Além disso, se o jogo não acabou, então depois da próxima jogada eles terão $2^{n-1}a'$ e $2^{n-1}b'$ palitos, respectivamente, onde a' e b' também são inteiros ímpares.

Vamos mostrar que essas afirmativas são verdadeiras. Suponhamos que em alguma etapa de uma partida os dois jogadores têm, respectivamente, $2^n a$ e $2^n b$ palitos, onde a e b são inteiros ímpares, e que o jogo não acabou, ou seja, que $n \geq 1$. Se a próxima jogada sair par, então Fernando ficará com $\frac{2^n a}{2} = 2^{n-1}a$ palitos e Isaura ficará com $2^{n-1}a + 2^n b = 2^{n-1}(a+2b)$ palitos. Como a é ímpar então $b' = a + 2b$ também é ímpar. Desse modo, após essa jogada, Fernando e Isaura ficarão com $2^{n-1}a$ e $2^{n-1}b'$ palitos, onde a e b' são ímpares. Um argumento idêntico leva à mesma conclusão no caso em que a próxima jogada sair ímpar, e acabamos de provar nossa afirmativa.

O jogo começa com ambos os jogadores com $128 = 2^7 \times 1$ palitos, ou seja, com $n = 7$. Como uma partida acaba quando $n = 0$ e n decresce de uma unidade a cada jogada, segue imediatamente que qualquer partida acaba depois da sétima jogada.