Aula - ① - 18/06/2016
Paridade e Algoritmo da Divisão

Paridade

Começaremos a aula com alguns questionamentos:

- O que é paridade?
- Quais são os números pares? E como podemos generalizá-los usando variáveis?
- Quais são os números ímpares? E como podemos generalizá-los usando variáveis?

Vamos fazer uma síntese sobre o tema que envolverá as perguntas acima:

Paridade nada mais é que a característica de um número de ser par ou ímpar.

- Os números pares são os números que terminam com os algarismos 0, 2, 4, 6 e 8 e com isso são múltiplos de 2, logo podemos descrever um número par da forma: $2k, k \in \mathbb{Z}$.
- Os números ímpares são os números que terminam com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 e com isso não são múltiplos de 2, logo podemos descrever um número ímpar da forma: $2k + 1 \; ou \; 2k - 1, k \in \mathbb{Z}$, a forma mais usada é 2k+1.

Obs.: Estamos usando o conjunto dos números inteiros.

Exercícios de Paridade

(seção 1.1 da Apostila Encontros de Aritmética):

Exercício 3: Analisaremos cada item.

- Existem dois números pares consecutivos?

Não, pois supomos então um número par que pode ser escrito como 2k, os seus consecutivos são 2k-1 e 2k+1, logo podemos perceber que 2k-1 é ímpar e 2k+1 é ímpar também. Assim, não existem dois números pares consecutivos.

- Existem dois números ímpares consecutivos?

Não, pois supomos então um número ímpar que pode ser escrito como 2k+1, os seus consecutivos são 2k+1-1 = 2k e 2k+1+1 = 2k+2 = 2(k+1), logo podemos perceber que 2k é par e 2(k+1) é par também. Assim, não existem dois números ímpares consecutivos.

- <u>Existe um número natural que não é par nem ímpar?</u>

Não existe nenhum inteiro que seja simultaneamente par e ímpar pois teríamos uma igualdade da forma:

$2k = n$ (par)
$2m+1 = n$ (ímpar)
$\Rightarrow 2k = 2m+1$
$\Rightarrow 2k-2m = 1$
$\Rightarrow 2(k-m) = 1$, absurdo pois $2(k-m)$ é par e não pode ser 1.

Obs.: Muitos podem questionar: O zero é um número neutro? Bom, sabemos que todos os números pares podem ser escritos da forma 2k, o zero pode ser escrito da forma 2k?

Sim, se usarmos o k=0, temos 2.0 = 0, e, portanto zero é um número par e não existe um número que não é par nem ímpar.

- <u>Qual é a paridade do resultado da soma par+par?</u>

Supomos dois números pares, $2a$ e $2b$, logo a soma será:
par+par = par $\Longrightarrow 2a+2b = 2(a+b)$
Assim a paridade do resultado da soma será par.

- <u>Qual é a paridade do resultado da soma par+ímpar?</u>

Supomos um par e um ímpar, $2a$ e $2b+1$, logo a soma será:
par+ímpar = ímpar $\Longrightarrow 2a+2b+1 = 2(a+b)+1$
Assim a paridade do resultado da soma será ímpar.

- <u>Qual é a paridade do resultado da soma ímpar+ímpar?</u>

Supomos dois números ímpares, $2a+1$ e $2b+1$, logo a soma será:
ímpar+ímpar = $2a+1+2b+1 = 2a+2b+2 = 2(a+b+1)$
Assim a paridade do resultado da soma será par.

- <u>E se somarmos uma quantidade par de números ímpares?</u>

Temos que n é par, assim:

$(2x_1+1)+(2x_2+1)+(2x_3+1)+...+(2x_n+1) =$

$2(x_1+x_2+x_3+...+x_n)+\underbrace{1+...+1}_{n \text{ vezes}} = 2(x_1+x_2+x_3+...+x_n)+n =$

par+par = par

Quando somamos uma quantidade par de números ímpares o resultado é par.

- <u>E se somarmos uma quantidade ímpar de números ímpares?</u>

Temos que n é ímpar, assim:

$(2x_1+1)+(2x_2+1)+(2x_3+1)+...+(2x_n+1) =$

$2(x_1+x_2+x_3+...+x_n)+\underbrace{1+...+1}_{\text{n vezes}} = 2(x_1+x_2+x_3+...+x_n)+n =$

par+ímpar = ímpar

Quando somamos uma quantidade ímpar de números ímpares o resultado é ímpar.

- <u>A soma dos números naturais de 1 a n é:</u>

$$s=\frac{(n+1)n}{2}$$

Exercício 2: Você pode encontrar cinco números ímpares cuja soma seja 100?

Ideias:

- O que acontece quando somamos uma quantidade ímpar de números ímpares?
- Essa soma pode ser 100?

Exercício 6: Pedro comprou um caderno com 96 folhas e numerou-as de 1 a 192. Vitor arrancou 25 folhas do caderno de Pedro e somou os 50 números que encontrou escritos nas folhas. Esta soma poderia ser igual a 1990?

Ideias:

- Em uma folha temos quantas páginas?
- Qual é a paridade das páginas de uma folha?
- Qual é a paridade da soma do número das páginas de uma folha?
- Quantas folhas Pedro arrancou?
- Pedro arrancou uma quantidade par ou ímpar de folhas de paridade ímpar?
- Essa soma poderia ser igual a 1990?

Exercício 7a: Os números de 1 a 10 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de “+” e de “-“ entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

Ideias:

- O que acontece quando uma soma é zero?
- Se a sequencia fosse 1, 2 e 3 é possível obter zero?
- E se a sequencia fosse 1, 2, 3, e 4 seria possível? E com 1, 2, 3, 4 e 5?
- Em quais casos a divisão da soma por dois resulta em um número inteiro?

Exercício 7b: Continuando o exercício anterior, vamos imaginar que os números de 1 a 11 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de “+” e de “-“ entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

Ideias:

- Podemos pensar da mesma forma que o exercício 7a.

Exercício 9: Um tabuleiro 5x5 pode ser coberto por dominós 1x2?

Ideias:

- Quantos quadrados ocupa uma peça de dominó no tabuleiro?
- Quantos quadrados têm em um tabuleiro 5x5?
- O tabuleiro poderá todo recoberto de peças de dominó?

Exercício extra: (Eduardo Wagner – Edição Especial OBMEP 2006) Em um quartel existem 100 soldados e, todas as noites, três deles são escolhidos para trabalhar de sentinela. É possível que após certo tempo um dos soldados tenha trabalhado com cada um dos outros exatamente uma vez?

Ideias:

- A informação exatamente uma vez é importante?
- Podemos pensar em uma quantidade menor de soldados, por exemplo, 6 soldados: A, B, C, D, E e F, se escolhermos o soldado A, como ficaria formado os trios para a 1ª, 2ª e 3ª noites?
- Voltando ao problema, escolhendo um soldado, quantos soldados sobram?
- Com este número é possível formar um número inteiro de pares?

Respostas dos exercícios de Paridade

Exercício 2: Não é possível, temos que 5 é um número ímpar, e a partir do exercício 3, quando somamos uma quantidade ímpar de números ímpares o resultado é ímpar, logo não pode ser 100 porque é um número par.

Exercício 6: Em uma folha temos 2 páginas, uma par e uma ímpar, quando somamos o número das páginas de uma folha temos par+ímpar = ímpar, como temos 25 folhas e 25 é ímpar, podemos concluir que estamos somando uma quantidade ímpar de números ímpares onde o resultado é ímpar, logo não pode ser 1990 pois é um número par.

Exercício 7a: Para uma soma ser zero temos que somar um número a seu simétrico, exemplos:

O simétrico de 9 é -9, ou seja, 9-9 = 0

O simétrico de -4 é 4, ou seja, -4+4 = 0

Com isso para a soma ser zero temos que separá-la em 2 grupos de mesma quantidade mas com sinais opostos de modo que um grupo seja o simétrico do outro. Nesse caso não é possível, pois a soma de 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55, 55 é ímpar e não conseguimos separá-lo em 2 grupos de números inteiros.

Exercício 7b: Analogamente ao exercício anterior, temos que separar essa soma em 2 grupos de mesma quantidade para que possamos torna-los simétricos. A soma de 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11 = 66, e 66 é par, logo conseguimos separá-lo em 2 grupos de 33.

Existem outras maneiras de escrever essa soma, uma delas é:

1+2-3+4+5+6+7+8-9-10-11 = 0

Exercício 9: Um dominó 1x2, ocupada 2 quadrados do tabuleiro e em um tabuleiro 5x5 temos o total de 25 quadrados, ou seja, quando sobrepormos as peças do dominó no tabuleiro sobrará uma quadrado vazio, assim não é possível.

Exercício extra: Podemos pensar em uma quantidade menor de soldados, por exemplo, 6 soldados: A, B, C, D, E e F, se fixarmos o soldado A, os trios formados para a 1ª, 2ª e 3ª noites, seriam:

1ª noite: A B C

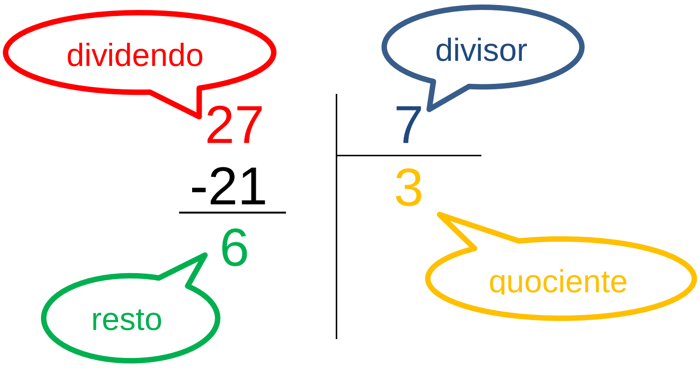
2ª noite: A D E

3ª noite: A F B (vemos que aqui já temos que repetir algum soldado e o problema pede que seja exatamente uma vez).

Voltando ao problema, escolhendo um soldado, sobram 99. Assim fixamos o soldado X e temos que formar diferentes duplas para acompanha-lo, mas não é possível, pois 99 é ímpar e não conseguimos formar pares de soldados que trabalham juntos apenas uma vez.

Algoritmo da Divisão

Para iniciar esse assunto, vejamos um exemplo, $27 \div 7$:



Podemos escrever o número 27 da seguinte maneira:
27=7x3+6

Questionamentos:

- <u>Em uma divisão por 7, quais são os restos possíveis?</u>
- <u>Em uma divisão por 7, qual é o maior resto?</u>
- <u>Em uma divisão por 7, qual é o menor resto?</u>

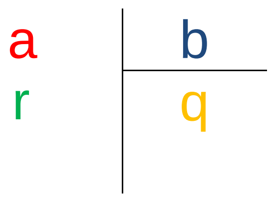
Assim em uma divisão por 7 os restos são 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, onde o maior é 7 e o menor é 0.

- <u>Em uma divisão por a, quais são os restos possíveis?</u>
- <u>Em uma divisão por a, qual é o maior resto?</u>
- <u>Em uma divisão por a, qual é o menor resto?</u>

Assim em uma divisão por a os restos são 0, 1, 2, 3, 4, ..., a-1, onde o maior é a-1 e o menor é 0.

Isso facilitará a nossa compreensão para a generalização do algoritmo da divisão.

Na divisão de a por b, temos:



Ou seja, a = bq+r, com $0 \leq r < b$.

Exercícios de Algoritmo da Divisão

(seção 2.1 da Apostila Encontros de Aritmética):

Exercício 1: Em cada caso calcule o quociente q e o resto r da divisão de a por b. Em seguida, tire a prova verificando a igualdade $a = bq+r$.

a) $a = 307$ e $b = 4$
b) $a = 1933$ e $b = 6$
c) $a = 879$ e $b = 7$

Exercício 2: Encontre o número natural que ao ser dividido por 7 resulta um quociente 4 e o resto o maior possível.

Ideias:

- Usando apenas os dados do enunciado e o algoritmo da divisão, podemos remontar o problema dessa maneira: a é o número que queremos, o $7 = b$, o $4 = q$ e o resto $= r$, assim, $a = 7.4+r$.
- Qual é o maior resto possível?
- Como ficará a equação $a = 28+r$?

Exercício 5: Na divisão de dois números inteiros, o quociente é 16 e o resto é o maior possível. Se a soma do dividendo é do divisor é 125, determine o resto.

Ideias:

- Usando apenas os dados do enunciado e o algoritmo da divisão, podemos remontar o problema dessa maneira: a = dividendo, b = divisor, o quociente é 16 e o resto r, assim $a = 16.b+r$.
- Por outro lado $a+b = 125$.
- Qual é o maior resto possível?
- Como ficará a equação $16b+r$?
- Podemos isolar algum membro para obter a resposta?

Respostas dos exercícios de Algoritmo da Divisão

Exercício 1:

a) $307 = 4.76+3$
b) $1933 = 6.322+1$
c) $879 = 7.125+4$

Exercício 2: Chamaremos o dividendo de a, o divisor é o 7, o quociente é o 4 e o resto, como é o maior possível ele precisa ser menor que o divisor, logo o resto é 6. Assim, podemos remontar o problema da seguinte maneira: $a = 7.4+6 = 34$. Portanto o número natural que queríamos encontrar é o 34.

Exercício 5: Chamaremos o dividendo de a, o divisor de b, o quociente é o 16 e o resto, como é o maior possível ele precisa ser menor que o divisor, logo o resto é b-1. Assim, podemos remontar o problema da seguinte maneira: $a = 16b+b-1 = 17b-1$. No enunciado temos outro dado importante onde a soma do dividendo e do divisor é 125, logo $a+b = 125$. Com isso temos:

I) $a = 17b-1$
II) $a+b = 125$

Substituindo I em II teremos:

$a+b = 125$
$(17b-1)+b = 125$
$18b-1 = 125$
$18b = 126$
$b = 7$

Voltando para o enunciado o que queremos de terminar é o resto e temos que o resto é $b-1 =$ $= 7-1 = 6$, portanto o resto é 6.