EUREKA!

Edição Especial, 2007

Olimpíada
Brasileira de
Matemática

Comissão Nacional de Olimpíadas de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110. Jardim Botânico, Rio de Janeiro – RJ, CEP: 22460-320
Telefone : (21) 25295077 Fax: (21) 25295023
e-mail: obm@impa.br Home-page: www.obm.org.br

Tiragem
4000 exemplares

Postagem
Primeiro Semestre de 2007

EUREKA! Edição Especial OBMEP, 2007

ISSN 1415-479X

ÍNDICE

Caros Leitores

Este número da revista Eureka! foi especialmente preparado para uso no estágio dos alunos contemplados com bolsas de Iniciação Científica na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

A Eureka! é a revista da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e é distribuída gratuitamente a todas as escolas participantes. Já foram publicados 25 números da revista, o primeiro em maio de 1998. Cada edição contém artigos em diversos níveis de dificuldade e provas de competições nacionais e internacionais. Para este número especial, selecionamos sete artigos publicados em números anteriores da Eureka! e as provas da 1ª e 2ª fases da OBM-2005. Publicamos também as provas de 2006 da Olimpíada de Maio, que é uma competição internacional promovida pela Olimpíada de Matemática Argentina, aberta a todas as escolas que dela queiram participar.

A OBM, realizada desde 1979, é a mais tradicional das competições matemáticas brasileiras. Vários pesquisadores brasileiros de destaque na Matemática ou em áreas afins tiveram na participação na OBM um importante ponto de partida em suas carreiras. Os resultados obtidos na OBM são também fator fundamental na escolha das equipes que representam o Brasil nas principais competições internacionais de Matemática (a Olimpíada do Cone Sul, a Olimpíada Ibero-Americana e, a mais importante delas, a Olimpíada Internacional de Matemática, na qual estudantes brasileiros já obtiveram 7 medalhas de ouro). A OBM é disputada em três fases, sendo a última de nível comparável ao das olimpíadas internacionais.

Convidamos os alunos bolsistas da OBMEP a participarem também da OBM, mesmo que sua escola não esteja inscrita para participar. Em caráter excepcional, os bolsistas da OBMEP podem participar a partir da 2ª fase, com as provas sendo aplicadas pelas coordenações de estágio.

Também convidamos todos a visitar a página de Internet da OBM: http://www.obm.org.br . Nela, podem ser encontrados todos os números da revista Eureka!, as provas dos anos anteriores da OBM e das diversas competições internacionais e, esperamos, ainda mais razões para apreciar a Matemática.

Os Editores

NÚMEROS MÁGICOS E CONTAS DE DIVIDIR

Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira

♦ Nível Iniciante.

Temas muito inocentes de aritmética básica, como contas de multiplicar, podem gerar resultados bastante interessantes e surprendentes, como ao multiplicar o número 142857 por 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

$$142857 \times 2 = 285714$$
$$142857 \times 3 = 428571$$
$$142857 \times 4 = 571428$$
$$142857 \times 5 = 714285$$
$$142857 \times 6 = 857142$$

Por que razão acontece essa repetição dos dígitos de 142857 ao multiplicá-lo por 2, 3, 4, 5 e 6, sempre com a mesma ordem circular? Será mera coincidência? Será possível obter outros exemplos desse tipo?

A resposta tem a ver com o resultado de 142857 × 7, que é 999999. Isso quer dizer que o período da representação decimal de 1/7 é exatamente 142857. Vamos examinar com cuidado a conta de divisão de 1 por 7:

```
10        |_7_____
 30        0,142857
  20
   60
    40
     50
       1
```

repetindo o resto 1, o que quer dizer que todo o processo se repete e o resultado da divisão é $1/7 = 0,142857142857142857\ldots$

Podemos reescrever o processo assim:

$$1 = 0 \times 7 + 1$$
$$10 = 1 \times 7 + 3$$
$$30 = 4 \times 7 + 2$$
$$20 = 2 \times 7 + 6$$

$60 \quad = 8 \times 7 + 4$
$40 \quad = 5 \times 7 + 5$
$50 \quad = 7 \times 7 + 1.$ Daí temos:
$10 - 7 \times 1 = 3$, e portanto $100-7 \times 10 = 30$, e como $30 - 7 \times 4 = 2$ temos:
$100 - 7\,(10 + 4) = 2$, e analogamente obtemos:
$1000 - 7\,(100 + 40 + 2) = 6$
$10000 - 7\,(1000 + 400 + 20 + 8) = 4$
$100000 - 7\,(10000 + 4000 + 200 + 80 + 5) = 5$
$1000000 - 7\,(100000 + 40000 + 2000 + 800 + 50 + 7) = 1$

(A última igualdade diz que $142857 \times 7 = 999999$)

Desta forma, os restos sucessivos que aparecem na divisão de 1 por 7, que são 3, 2, 6, 4, 5, 1 são, respectivamente, os restos na divisão por 7 de 10, 100, 1000, 10000, 100000 e 1000000. Estes restos assumem todos os valores possíveis entre 1 e 6 e isso equivale ao fato de o período de 1/7 ter 6 casas. Desta forma, temos:

$2 \times 0{,}142857142857142857\ldots = 2/7 = 100/7 - 14 = 100 \times 0{,}14285714\,2857142857\ldots - 14 = 0{,}285714285714285714\ldots$, e, portanto, temos $2 \times 142857 = 285714$

Da mesma maneira temos que $3/7 = 10/7 - 1$ implica $3 \times 142857 = 428571$, e as outras igualdades seguem de modo análogo.

Notemos agora que sempre que o período da representação decimal de 1/n tiver $n - 1$ casas decimais (que é o máximo possível), o período (que será igual a $(10^{n-1} - 1) / n$) terá as mesmas propiedades de 142857. O primeiro valor de n maior que 7 para o qual isso acontece é 17, e o período de 1/17 é 0588235294117647. Multiplique esse número por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17 para conferir.

Observe que, para que isso aconteça, n deve ser um número primo, pois se $n = p \times b$, com b maior que 1 e p um número primo diferente de 2 e 5, então p nunca aparecerá como resto na divisão de 1 por n, pois em geral um fator primo comum de n e de um resto que aparece na divisão de 1 por n só pode ser 2 ou 5 (de fato, um resto que aparece na divisão de

1 por n é resto da divisão de alguma potência de 10 por n). Por outro lado, se os únicos fatores primos de n são 2 e 5, então $1/n$ tem representação decimal finita.

Conclusão: Se o período de $1/n$ tiver $n-1$ casas decimais, ele terá propiedades análogas às de 142857: os dígitos de seus produtos por 1, 2, 3, 4, …, $n-1$ serão sempre os mesmos, na mesma ordem circular. Para que isso aconteça, n deve ser primo e a menor potência de 10 que deixa resto 1 quando dividida por n deve ser 10^{n-1}. Dizemos que, nesse caso, 10 é raiz primitiva módulo n. Não se sabe se existem infinitos primos n com essa propriedade. Isso seguiria de uma famosa conjectura de teoria dos números, a conjectura de Artin (vide [V]).

Os números primos n menores que 100 tais que o período de $1/n$ na base 10 tem $n-1$ casas são 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61 e 97.

Por outro lado, para todo número primo n existem números naturais B entre 2 e $n-1$ tais que o período de $1/n$ na base B tem exatamente $n-1$ casas (nesses casos B é raiz primitiva módulo n). Se um número B tem essa propriedade, todas as bases da forma $kn + B$ com k natural também têm. Nesses casos, o período de $1/n$ na base B (ou seja, o número $(B^{n-1}-1)/n$), quando multiplicado por 1, 2, 3, …, $n-1$ terá representações na base B que serão permutações uma da outra com a mesma ordem circular.

Por exemplo, com $n = 5$ e $B = 8$, temos que a representação de 1/5 na base 8 é 0,146314631463… Na base 8 temos:
$2 \times (1463)_8 = (3146)_8$, $3 \times (1463)_8 = (4631)_8$,
$4 \times (1463)_8 = (6314)_8$, $5 \times (1463)_8 = (7777)_8$

Referências:

[L] Lima, Elon L., *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, pp. 158-170 – SBM, 1991.
[T] Tahan, Malba, *O homen que calculava*, Ed. Record.
[V] Voloch, José Felipe, *Raizes Primitivas e a Conjectura de Artin*, Revista Matemática Universitária Nº9/10, dezembro de 1989, pp. 153-158.

DOIS PROBLEMAS SOBRE GRAFOS

Paulo Cezar Pinto Carvalho
IMPA

♦ Nível Intermediario.

INTRODUÇÃO

A figura abaixo mostra um mapa rodoviário de um país fictício. Neste artigo vamos examinar dois problemas relativos a este mapa:

1. Um funcionário, encarregado de verificar, periodicamente, o estado das estradas, deseja planejar a sua rota de inspeção. Idealmente, esta rota deveria se iniciar na capital e percorrer cada **estrada** exatamente uma vez, voltando, então, ao ponto de partida. Existe tal rota?

2. Um representante de vendas de uma companhia deseja planejar uma rota na qual ele visite cada **cidade** exatamente uma vez, voltando ao ponto de partida. Existe tal rota?

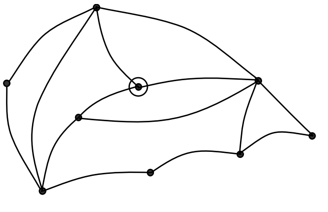


Fig. 1 - Mapa rodoviário de um país fictício

Há vários pontos em comum entre os dois problemas. Por exemplo: em ambos se deseja verificar a existência de um **circuito** (ou **ciclo**) no **grafo** determinado pelo mapa (um grafo é um par (V, A), em que V é o conjunto de **vértices** do grafo, e A é um conjunto de pares de vértices – os **arcos** do grafo). No primeiro problema, este circuito deve incluir exatamente uma vez cada arco do grafo. No segundo problema, o circuito deve incluir exatamente uma vez cada vértice do grafo. Embora os dois problemas sejam aparentemente semelhantes, há algumas diferenças fundamentais entre eles. Convidamos os leitores a refletir um pouco sobre cada um deles antes de prosseguir.

CIRCUITOS EULERIANOS

O primeiro problema – o do inspetor de estradas – foi estudado pela primeira vez por Euler (1707-1783). Por esta razão, um circuito que percorre cada arco de um grafo exatamente uma vez é chamado de **circuito euleriano** e um grafo que possui um tal circuito é chamado de **grafo euleriano**. A situação estudada por Euler ficou imortalizada como o *Problema das Pontes de Könisberg*, ilustrado na figura abaixo, e que possivelmente já é conhecido por muitos dos leitores. O objetivo é percorrer exatamente uma vez todas as sete pontes da cidade (hoje Kaliningrado), que conectam as duas ilhas entre si e com as margens do rio, voltando ao ponto de partida.

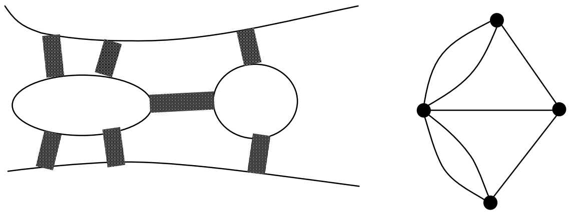


Fig. 2 – O Problema das Pontes de Könisberg

Em linguagem de grafos, trata-se de encontrar um circuito euleriano no grafo da figura acima, no qual os vértices representam as ilhas e as margens e os arcos são as pontes[1]. Euler mostrou a não-existência de tal circuito através de um argumento extremamente simples. Consideremos, por exemplo, a ilha da direita. Um circuito qualquer deve chegar à ilha e sair dela o mesmo número de vezes. Logo, para que exista um circuito euleriano, deve haver um número par de pontes com extremidade nesta ilha. Como existem três pontes nessas condições, concluímos que não é possível encontrar um circuito euleriano. De modo mais geral, temos o seguinte:

Teorema: *Existe um circuito euleriano em um grafo se e somente se o grafo é* ***conexo*** *(isto é, existe um caminho ligando qualquer par de vértices) e cada vértice tem* **grau** *par (ou seja, o número de arcos que nele incidem é par).*

[1] A rigor, neste caso temos um multi-grafo, já que certos pares de vértices são ligados por mais de um arco.

O argumento acima mostra a necessidade de se ter grau em cada vértice para existir um circuito euleriano. É também óbvio que o grafo precisa ser conexo. A prova de que essas duas condições implicam na existência de um circuito euleriano pode ser feita por indução finita no número de arcos do grafo e é deixada como um exercício para o leitor.

[Sugestão: suponha a propriedade verdadeira para grafos com menos de n arcos e considere um grafo com n arcos, satisfazendo às duas condições. Começando em um vértice qualquer, percorra arcos do grafo, até voltar a um vértice já visitado (o caminho gerado possui, então, um ciclo). Retirando do grafo os arcos desse ciclo, obtém-se um ou mais grafos satisfazendo as duas condições e com menor número de arcos (portanto, com circuitos eulerianos, de acordo com a hipótese de indução). Basta explicar como "costurar" esses circuitos eulerianos ao ciclo descrito acima].

Podemos aplicar este teorema ao nosso problema de inspeção de estradas. Da mesma forma como no Problema das Pontes de Könisberg, não existe qualquer circuito euleriano no grafo determinado pelo mapa rodoviário, já que o vértice correspondente à capital tem grau 3. Assim, se o nosso inspetor de estradas recebesse de seu chefe a incumbência de elaborar um trajeto nas condições do problema 1, ele poderia facilmente convencê-lo da impossibilidade de fazê-lo. Como veremos a seguir, a situação do seu colega representante de vendas é bem pior...

CIRCUITOS HAMILTONIANOS

Um circuito passando exatamente uma vez por cada vértice de um grafo é chamado de **circuito hamiltoniano**, em homenagem ao matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865), que estudou este problema no grafo determinado pelas arestas de um dodecaedro regular (existe ou não um circuito hamiltoniano neste caso?). Um grafo que possui um circuito hamiltoniano é chamado de **grafo hamiltoniano.**

A situação do problema de verificar se um grafo é hamiltoniano é bem diferente da do problema anterior. Apesar de terem sido estudados por vários séculos, não há uma boa caracterização dos grafos hamiltonianos. Há diversas famílias de grafos para os quais existe um circuito hamiltoniano (um exemplo trivial é um grafo completo, em que cada vértice é ligado a todos os outros); também é possível estabelecer certas condições que implicam na não-existência de um circuito. Mas uma caracterização geral não foi encontrada e, à luz de certos avanços em teoria da computação das últimas décadas, parece improvável que ela seja encontrada algum dia.

O problema de decidir se um grafo é hamiltoniano está na companhia de diversos problemas ilustres, com as seguintes características em comum:

- O problema possui uma assimetria fundamental: é muito fácil convencer alguém da existência de um circuito hamiltoniano em um grafo: basta exibir tal caminho. No entanto, é difícil, em geral, convencer alguém da não-existência de um tal circuito. Por exemplo, o grafo da figura abaixo (o leitor é capaz de reconhecê-lo?) tem um circuito hamiltoniano, de cuja existência o leitor fica imediatamente convencido pela figura. Já o grafo dado no início do artigo não tem circuito hamiltoniano, mas não existe um argumento simples e geral para demonstrar esse fato (assim, nosso amigo representante de vendas certamente terá mais trabalho para convencer seu chefe da impossibilidade de elaborar uma rota nas condições do problema 2 do que seu colega inspetor de estradas).

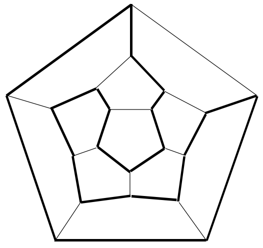


Fig. 3 – Um grafo hamiltoniano

- Não se conhece um algoritmo eficiente para verificar se um grafo é hamiltoniano (por eficiente, entendemos aqui um algoritmo em que o número de passos seja limitado por um polinômio no número de vértices do grafo). Além disso, parece improvável que um tal algoritmo possa algum dia ser encontrado, porque sua existência implicaria na existência de algoritmos eficientes para um grande número de outros problemas, para os quais também não se conhecem algoritmos eficientes. Estes problemas (incluindo o de verificar a existência de circuito hamiltoniano) formam uma classe de problemas chamados de **NP-completos**. Um outro problema famoso da classe é o de determinar o número mínimo de cores que podem ser usadas para colorir os vértices de um grafo de modo que vértices de mesma cor não sejam ligados por um arco.

O leitor poderá estar pensando assim: mas será que esta história de algoritmos eficientes tem relevância, numa era de computadores cada vez mais velozes? Afinal de contas, existe um algoritmo extremamente simples para verificar se um grafo possui um circuito hamiltoniano. Se existir um tal circuito, ele corresponderá a uma permutação (circular) dos vértices com a propriedade de que vértices consecutivos sejam ligados por um arco do grafo. Ora, para verificar a existência de circuito hamiltoniano basta gerar todas as permutações circulares dos vértices e testar se uma delas corresponde a um percurso no grafo.

É claro que este algoritmo funciona para grafos de tamanho moderado (ele poderia ser o recurso usado pelo nosso vendedor: como são apenas 9 cidades, ele teria que testar "apenas" 8! = 40.320 caminhos, o que seria feito com rapidez em um computador). Mas o que ocorre com grafos maiores? Vejamos, por exemplo, uma situação em que o número de cidades cresce para 50 (o que representaria um tamanho ainda bastante razoável para uma situação real). Neste caso, o computador deveria examinar 49! circuitos potenciais. Tentemos estimar a magnitude deste número. A forma mais simples é usar a fórmula de Stirling, que fornece a estimativa $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Mas, neste caso, podemos usar estimativas mais elementares. Por exemplo, podemos usar apenas potências de 2. Temos:

$$49! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times ... \times 15 \times 16 \times ... \times 31 \times 32 \times \ldots \times 49 > 1 \times 2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 8 \times ... \times 8 \times 16 \times ... \times 16 \times 32 \times \ldots \times 32 = 2^2 \text{ x } 4^4 \text{ x } 8^8 \text{ x } 16^{16} \text{ x } 32^{18} = 2^{2+8+64+90} = 2^{164}.$$

Mas $2^{10} = 1024 > 10^3$. Logo $49! > 16.\ 10^{48}$.

Ora, um computador moderno pode realizar cerca de 200 milhões de operações por segundo. Se em cada operação ele conseguir testar um circuito, ele ainda assim precisará de mais de $16.\ 10^{48} / 2.\ 10^{6} = 8 \times 10^{42}$ segundos, o que corresponde a aproximadamente a 2×10^{35} anos. Assim, trata-se claramente de uma missão impossível para o algoritmo de força bruta baseado na análise de cada permutação de vértices.

PROBLEMAS DIFÍCEIS QUE TAMBÉM SÃO ÚTEIS

O resultado da discussão acima pode parecer bastante desanimador: não parece haver bons métodos para verificar a existência de um circuito hamiltoniano e algoritmos de força bruta só funcionam para problemas com pequeno número de vértices (é bom que se diga que existe um meio termo: há estratégias que permitem resolver o problema acima para valores razoáveis de n, reduzindo substancialmente o número de possibilidades a serem examinadas; mesmo estes algoritmos, no entanto, tornam-se impráticos a partir de um certo ponto). O mesmo ocorre com todos os chamados problemas NP-completos.

No entanto, ao invés de ficarmos deprimidos com esta característica desses problemas, podemos explorá-la para uma importante finalidade em *criptografia*, que é a parte da Matemática que estuda métodos para criar e decifrar códigos. Para tal, é também muito importante a assimetria apontada acima (e que ocorre em todos os problemas NP-completos): é difícil encontrar um circuito hamiltoniano (ou mostrar que não existe um), mas é fácil testar se uma seqüência de vértices forma um circuito hamiltoniano.

Suponhamos que você seja cliente de um banco. Para ter acesso aos serviços, você usa o número de sua conta (que é público) e uma senha, que em princípio deve ser conhecida apenas por você. O procedimento mais simples seria ter a sua senha armazenada no sistema do banco. Mas aí você correria o risco de que ela fosse descoberta, por exemplo, por um funcionário desonesto. Em lugar disto, o sistema do banco armazena uma versão codificada da senha, que não precisa ficar em segredo. Esta codificação deve ser feita de tal forma que seja simples verificar se sua senha está correta (para que você seja autorizado a retirar dinheiro do caixa eletrônico), mas seja praticamente impossível recuperar a senha a partir da versão codificada.

Problemas NP-completos servem como uma luva para esta tarefa. Se quiséssemos usar o problema do circuito hamiltoniano, poderíamos agir mais ou menos da formadescrita a seguir. O cliente poderia escolher uma permutação dos números de 1 a 50, conhecida apenas por ele. A partir dessa informação, seria gerado um grafo, contendo necessariamente os arcos correspondentes ao circuito (os demais poderiam, por exemplo, ser gerados por um método aleatório, em que cada um dos possíveis arcos teria uma certa probabilidade de sere escolhido). Este grafo seria armazenado no sistema. A figura a seguir mostra uma representação de uma permutação dos números de 1 a 50 e um grafo, gerado aleatoriamente, que possui um ciclo hamiltoniano dado por esta permutação.

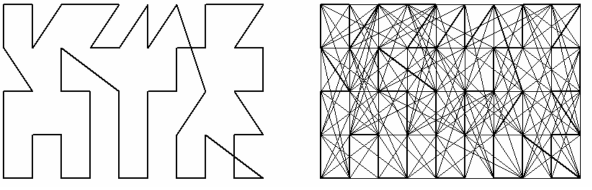


Fig. 4 – Um ciclo hamiltoniano e um grafo gerado a partir dele

Quando o cliente fosse utilizar sua conta, o sistema simplesmente verificaria se a permutação apresentada corresponde a um caminho no grafo. Como é improvável que um tal ciclo pudesse ser encontrado para um grafo deste tamanho, dificilmente um impostor conseguiria se fazer passar pelo cliente, ainda que conhecesse o grafo-problema. Na prática, são utilizados outros problemas NP-completos para se fazer codificação de senhas, mas a idéia é exatamente a mesma acima.

PALAVRAS FINAIS

Grafos são uma fonte inesgotável de problemas com enunciado simples mas que escondem, muitas vezes, uma sofisticada estrutura matemática. Neste artigo abordamos apenas alguns aspectos de dois desses problemas. Certamente voltaremos a falar em grafos em outros artigos desta revista. Para o leitor que deseja saber mais sobre o assunto, recomendamos os livros a seguir:

- Jaime Luiz Szwarcfiter. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Editora Campus.
- Oynstein Ore. *Graphs and Their Uses*. The Mathematical Association of America.

PARIDADE

Eduardo Wagner

♦ Nível Iniciante.

Todo número natural é par ou ímpar.

Elementar, não? A afirmação acima, que é uma das mais simples e óbvias da Matemática, é também uma ferramenta de grande utilidade na resolução de muitos problemas envolvendo números naturais. Vamos comentar neste artigo alguns deles, em graus diferentes de dificuldade, mas inicialmente precisamos recordar três importantes propriedades:

a) a soma de dois números pares é par.
b) a soma de dois números ímpares é par.
c) a soma de um número par com um número ímpar é ímpar.

Dizemos que dois números inteiros têm mesma *paridade*, quando são ambos pares ou ambos ímpares. Assim, podemos dizer que a soma de dois números inteiros é par se, e somente se, eles têm mesma paridade. Vamos aos problemas.

PROBLEMA 1
Em um quartel existem 100 soldados e, todas as noites, três deles são escolhidos para trabalhar de sentinela. É possível que após certo tempo um dos soldados tenha trabalhado com cada um dos outros exatamente uma vez?

RESPOSTA : Não.
Escolha um soldado. Em cada noite em que trabalha, ele está em companhia de dois outros. Como 99 é um número ímpar, não podemos formar pares de soldados sempre diferentes para trabalhar com o escolhido.

PROBLEMA 2
Um jogo consiste de 9 botões luminosos (de cor verde ou vermelha) dispostos da seguinte forma:

1 ○	2 ○	3 ○
4 ○	5 ○	6 ○
7 ○	8 ○	9 ○

Apertando um botão do bordo do retângulo, trocam de cor ele e seus vizinhos (do lado ou em diagonal). Apertando o botão do centro, trocam de cor todos os seus 8 vizinhos porém ele não.

<u>Exemplos</u>:
Apertando 1, trocam de cor 1, 2, 4 e 5.
Apertando 2, trocam de cor 1, 2, 3, 4, 5 e 6.
Apertando 5, trocam de cor 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 e 9.

Inicialmente todos os botões estão verdes. É possível, apertando sucessivamente alguns botões, torná-los todos vermelhos?

RESPOSTA : Não é possível.
Observe que apertando um botão do vértice do retângulo, trocam de cor 4 botões. Apertando um botão do meio de um lado, trocam de cor 6 botões e apertando um botão do centro trocam de cor 8 botões. Assim, cada vez que apertamos um botão trocam de cor um número *par* de botões. Como existem 9 botões, não é possível que todos troquem de cor.

PROBLEMA 3
Escrevemos abaixo os números naturais de 1 a 10.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10.

Antes de cada um deles, coloque sinais "+" ou "–" de forma que a soma de todos seja zero.

SOLUÇÃO: Não é possível fazer isto.
Imaginando que fosse possível, deveríamos separar os números dados em dois grupos com a mesma soma. Então colocaríamos sinais negativos nos números de um dos grupos e sinais positivos nos números do outro.

Teríamos então uma soma igual a zero. Acontece que a soma dos números naturais de 1 a 10 é igual a 55. Como este número é ímpar, não podemos separar os números dados em dois grupos que tenham a mesma soma.

Como o leitor deve estar percebendo, os argumentos utilizados permitiram concluir que as respostas dos três problemas propostos foram iguais: “não é possível fazer tal coisa”. Na maioria das vezes, um argumento de paridade serve exatamente para isto. Mostrar que um determinado fato não pode ocorrer e isto não é desanimador, muito pelo contrário. Serve para nos convencer que não adianta ficar gastando tempo demais fazendo tentativas inúteis. As experiências são valiosas no sentido de nos abrir os olhos para a possibilidade do problema não ter solução e, a partir daí, buscar um argumento que resolva definitivamente a questão.

É muito importante também explorar um problema, ou seja, imaginar pequenas modificações no enunciado e verificar o que ocorre com sua resposta. Por exemplo, o problema 3 não tem solução porque a soma dos naturais de 1 até 10 é 55 (ímpar). O que ocorreria se a soma fosse par? Este é um novo e atrativo problema. Vamos enunciá-lo:

PROBLEMA 3A:

Escrevemos abaixo os números naturais de 1 a 11.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11$$

Antes de cada um deles, coloque sinais “+” ou “–” de forma que a soma de todos seja zero.

SOLUÇÃO:

A soma dos números naturais de 1 a 11 é 66. Como podemos separá-los em dois grupos de soma 33? Começando pelos maiores observe que $11 + 10 + 9 = 30$. Logo, $11 + 10 + 9 + 3 = 33$. O problema 3A tem como uma solução possível:

$$+1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 - 9 - 10 - 11 = 0$$

Fica ao encargo do leitor mostrar que sempre que a soma dos naturais de 1 até n é par então podemos separá-los em dois grupos de igual soma. Você pode utilizar o caminho que utilizamos acima, ou buscar uma outra forma.

Para saber mais e intrigar seus colegas

Você pode propor aos seus amigos os problemas 3 ou 3A com uma lista grande de números naturais consecutivos. O problema terá ou não solução caso a soma desses números seja par ou ímpar, respectivamente. Entretanto, é possível encontrar o resultado desta soma rapidamente, sem precisar somar todas as parcelas. A soma de todos os naturais de 1 até n é igual a $\frac{(1+n)n}{2}$. Por exemplo, a soma de todos os naturais de 1 até 10 é $\frac{(1+10)10}{2}=\frac{11\cdot 10}{2}=55$. Procure demonstrar este fato e, se não conseguir, pergunte ao seu professor ou escreva para a EUREKA!

PROBLEMA 4

Mostre que se a, b e c são inteiros ímpares, a equação $ax^2+bx+c=0$ não tem raiz racional.

<u>Comentários</u>:

1) Um número é *raiz* de uma equação dada se quando for substituído no lugar do "x" a igualdade ficar correta. Por exemplo, $x=\frac{2}{3}$ é raiz (ou solução) da equação $3x-2=0$ porque $3\cdot\frac{2}{3}-2=0$. Ainda, $x=2$ é solução da equação $x^4-x^3+x-10=0$ porque $2^4-2^3+2-10=0$. Freqüentemente não sabemos como resolver uma equação mas, em geral, podemos verificar se um certo valor de x é ou não uma de suas raízes.

2) Um número é *racional* quando puder ser escrito como uma fração de numerador e denominador inteiros. Por exemplo, $\frac{2}{7}$ e $\frac{4}{1}$ são exemplos de números racionais.

3) Quando desejamos demonstrar que certo fato é impossível utilizamos freqüentemente o *método da redução ao absurdo*. Este método consiste em imaginar o contrário, ou seja, que tal fato seja possível. A partir daí procuramos chegar a uma contradição, a um absurdo. Conseguindo isso, teremos mostrado que nossa hipótese (a do contrário) é falsa e conseqüentemente, que a afirmação inicial é verdadeira.

Vamos ver tudo isso na solução do problema. Não se preocupe se você ainda não sabe resolver uma equação do segundo grau. Isto não será necessário. Tudo o que precisamos é verificar se um número racional pode ser uma raiz.

Solução do problema 4

Imaginemos que o número racional $\frac{p}{q}$ seja raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$ onde a, b e c são inteiros ímpares. Logo, fazendo a substituição, devemos ter,

$$a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0$$

$$a\frac{p^2}{q^2} + b\frac{p}{q} + c = 0$$

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

Vamos acrescentar agora uma hipótese importante para facilitar nosso trabalho. Vamos supor que a nossa fração $\frac{p}{q}$ seja *irredutível*, ou seja, que ela já foi simplificada ao máximo. Por exemplo, no lugar de $\frac{4}{6}$ estaremos considerando $\frac{2}{3}$ o que é a mesma coisa. Consideramos então, para a solução do problema, que p e q não são ambos pares.

Observe agora a equação $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$ nos seguintes casos:

a) p e q são ímpares: neste caso, ap^2 é ímpar, bpq é ímpar e cq^2 é ímpar. Como a soma de três números ímpares é ímpar, o resultado não pode ser zero.

b) p é par e q é ímpar: neste caso, ap^2 é par, bpq é par e cq^2 é ímpar. Como a soma de dois números pares e um ímpar é ímpar, o resultado não pode ser zero.

c) p é ímpar e q é par: vale o mesmo argumento do caso b).

Demonstramos então que nenhuma fração de numerador e denominador inteiros pode ser raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$ onde a, b e c são inteiros ímpares.

PROBLEMA 5

Um tabuleiro 6×6 está coberto com dominós 2×1. Mostre que existe uma reta que separa as peças do tabuleiro sem cortar nenhum dominó.

SOLUÇÃO:

Cada dominó é formado por dois quadrados e portanto, se o tabuleiro está inteiramente coberto, 18 dominós foram utilizados. Imagine agora uma reta (horizontal, por exemplo) que separe o tabuleiro em duas partes. Se ela não corta nenhum dominó, está resolvido o problema. Suponha então que ela corte ao meio um dominó. Neste caso, acima desta reta teremos n dominós inteiros mais meio dominó, ou seja, teremos acima desta reta $2n + 1$ quadrados, que é um número ímpar. Mas isto é impossível porque se o tabuleiro tem 6 unidades de largura, qualquer reta o dividirá em partes que contém números pares de quadrados acima e abaixo dela. Assim, se uma reta corta um dominó, deverá cortar um outro dominó. Para a divisão do tabuleiro, existem 10 retas possíveis e, se cada uma delas cortar dois dominós, deveríamos ter 20 dominós no tabuleiro. Como eles são apenas 18 então existe uma reta (pelo menos) que não corta nenhum dominó.

Problemas para pesquisa

PROBLEMA 6

Os números naturais de 1 até 1998 são escritos em um imenso quadro negro. Em seguida, um aluno apaga dois quaisquer colocando no lugar sua diferença (não negativa). Depois de muitas operações, um único número ficará escrito no quadro. É possível que esse número seja zero?

PROBLEMA 7

Em uma ilha plana existem 11 cidades numeradas de 1 a 11. Estradas retas ligam 1 a 2, 2 a 3, 3 a 4, ..., 10 a 11 e 11 a 1. É possível que uma reta corte todas as estradas?

ADEDANHA OU "DE COMO OS DEUSES MATEMÁTICOS TROUXERAM A PAZ AO MUNDO"

Pablo Emanuel – IMPA

♦ Nível Iniciante

Diz a lenda que, há muitos milênios, o mundo vivia em guerra constante, pois as pessoas não sabiam como resolver as suas discordâncias, a não ser pela força bruta. Um dia, os deuses (que são exímios matemáticos), para resolver esta situação, enviaram um mensageiro à Terra, com a missão de ensinar os homens a resolverem as suas disputas. O anjo se dirigiu então aos homens, dizendo:

- Quando dois entre vós precisarem chegar a um acordo, que se faça como vos digo: que um escolha *par* e o outro escolha *ímpar*, então que ambos mostrem ao mesmo tempo a mão exibindo uma certa quantidade de dedos. Serão então somadas estas quantidades. Se a soma for um número par declara-se vencedor o jogador que escolheu *par* e, caso contrário, declara-se vencedor aquele que escolheu *ímpar*.

Os homens ficaram maravilhados com a sabedoria dos deuses e, deste dia em diante, houve um grande período de paz, pois todas as questões eram resolvidas com o jogo que eles haviam aprendido dos deuses.

Um dia, porém, esta paz foi abalada. Três reis disputavam um pedaço de terra, que ficava exatamente na divisa entre os três países. Eles estavam prontos a utilizar o jogo divino do par-ou-ímpar, mas o rei que sabia mais matemática entre os três se levantou e disse:

- Caros colegas, nós todos sabemos que um número só pode ser par ou ímpar, não existindo uma terceira opção. Como somos três, algum de nós não vai ter opção alguma.

Este era realmente um problema muito sério. Para resolvê-lo, foi chamado o melhor matemático da Terra na época, chamado Zerinhoum. Ele pensou durante várias semanas em como resolver o problema dos reis, e finalmente chegou a uma solução:

- Majestades, encontrei a solução para o vosso problema. Ao mesmo tempo, vós estendereis vossas mãos, mantendo-as ou com a palma para cima ou com a palma para baixo. Aquele dentre vós que tiver a mão em posição diferente dos demais ganha a disputa.

- E se todos nós tivermos as palmas das mãos viradas para o mesmo lado? -indagaram os reis.

- Neste caso, majestades, vós jogareis novamente, até que algum entre vós vença.

Como a disputa era muito urgente, os reis aceitaram a sugestão do eminente matemático. Houve mais um período de paz, desta vez muito mais curto. Em pouco tempo, as pessoas perceberam que o jogo de Zerinhoum podia se alongar indefinidamente, e que era possível se fazer alianças para prejudicar adversários políticos.

Então as pessoas rezaram aos deuses, pedindo um novo jogo, que trouxesse de novo a paz à Terra. Os deuses então enviaram novamente um mensageiro. Quando ele chegou, os homens lhe cercaram dizendo:

- Mensageiro dos deuses, atendeste as nossas preces. Vivíamos em guerra, e os deuses nos enviaram o sagrado jogo do par-ou-ímpar, que nos trouxe a paz. Mas este jogo só podia ser jogado por dois jogadores, e as trevas se abateram de novo sobre nós. Então um grande homem nos ensinou um novo jogo, que chamamos Zerinhoum em sua homenagem. Mas este jogo tinha problemas, e a guerra voltou a nos assolar. Por favor, ó grande sábio, que vem em nome dos deuses, ensina-nos um novo jogo, que possa nos trazer de volta nossa paz.

E o anjo assim respondeu:

- Eu vos ensinarei um novo jogo. Zerinhoum era um grande matemático, mas não conhecia os segredos dos deuses. Eu vos revelarei estes segredos.

Para isto, o melhor é começar pelo antigo jogo do par-ou-ímpar. Como se decide se um número é par ou é ímpar? Basta dividi-lo por 2. Se o resto for igual a 0, o número será par, se for igual a 1, o número será ímpar. Estas são as únicas duas opções, porque o resto sempre é menor do que o dividendo (2). Reparai que se dividirmos o número por 3, passam a existir 3 opções para o resto, pois ele pode ser 0, 1 ou 2. Na divisão por 4, existem 4 restos possíveis (0, 1, 2 e 3). Em geral, quando dividimos um número por n , existem n restos possíveis (0, 1, 2, …, $n - 2$ e $n - 1$).

E o que isto tem a ver com o jogo? Tudo, eu vos digo. Se n pessoas estiverem em uma disputa, vós fareis como eu vos digo: As pessoas escolherão, cada uma, um número entre 0 e $n - 1$ diferente. Depois, ao mesmo tempo, elas mostrarão as mãos, exibindo uma quantidade qualquer de dedos. As quantidades serão somadas, e o número resultante será dividido por n. A pessoa que escolheu o resto desta divisão será a vencedora.

Esta é a forma que os deuses jogam. Mas vós da Terra sois muito desorganizados para poder escolher tantos números de forma tranqüila. Portanto, eu vos ensinarei uma forma alternativa de jogar este jogo. Vós vos arrumareis em um círculo. Uma pessoa será designada a contar. Então vós gritareis a palavra mágica "Adedanha" e todos mostrarão as mãos. Os resultados serão somados, e aquele que havia sido designado fará o seguinte procedimento: Em primeiro lugar falará "Um", e apontará para o céu, para que nunca vos esqueçais de que foram os deuses que vos ensinaram este jogo. Então apontará para si mesmo e falará "Dois". Depois apontará para o jogador à sua esquerda e falará "Três", e depois seguirá apontando para o jogador à esquerda deste e assim por diante, sempre acrescentando um ao número que havia falado anteriormente, até chegar à soma que havia sido calculada. O jogador que estiver sendo apontado neste momento será o vencedor. Se a soma for 1, o jogador que estiver à direita do que estiver contando será declarado vencedor. Se for 0, será o que estiver à direita deste.

Os homens entenderam as determinações do mensageiro, mas ainda não entendiam porque o segundo jogo era equivalente ao primeiro. O anjo então lhes explicou:

- A pessoa que está contando vai apontar para si mesma quando estiver falando "2". Depois vai dar uma volta completa no círculo e vai apontar para si mesma novamente quando estiver no "$2 + n$", e novamente no "$2 + 2n$". Ou seja, ela vai estar apontando para si mesma se e somente se estiver falando um número cujo resto na divisão por n seja 2. Da mesma forma, vai estar apontando para o jogador à sua esquerda se e somente se estiver falando um número que deixa resto 3 ao ser dividido por n. E assim por diante, de forma que cada jogador terá associado a si um número entre 0 e $n - 1$ tal que ele é o vencedor se e somente se o resultado da soma deixa aquele resto quando dividido por n.

Os homens estavam maravilhados com a explicação do mensageiro, mas um sábio ancião levantou uma questão:

- Ó, mensageiro divino, sem dúvida és sábio e sagaz. No entanto, uma dúvida me corrói o espírito. Tendo cada jogador 10 dedos, esta soma pode atingir números muito elevados, fazendo com que o responsável pela contagem passe um tempo enorme falando e apontando até que se descubra o vencedor.

- Tens toda a razão, sábio homem. Mas em verdade vos digo que é tolice que um jogador exiba uma quantidade de dedos maior ou igual à quantidade de jogadores. Com efeito, suponde que um jogador coloque um número maior ou igual a n. Os primeiros n dedos só vão ter o efeito de fazer com que a contagem dê uma volta completa no círculo, sem alterar em nada quem será o vencedor. Portanto, ele pode subtrair n da sua quantidade sem que isto altere o resultado. Se o número persistir maior ou igual a n, basta voltar a subtrair, até que o número fique entre 0 e $n - 1$.

- Isto de fato diminui sobremaneira o esforço requerido- replicou o ancião. Mas ainda assim o resultado pode chegar a $n(n - 1)$, que ainda é bastante grande.

- És de fato perspicaz, meu nobre homem. Mas não penseis que a sabedoria dos deuses possui limite. O mesmo processo que foi aplicado a cada número individualmente pode ser aplicado à soma. Por exemplo, considerai um jogo com 4 jogadores. Suponde que um dos jogadores exibe 3 dedos e outro exibe 2 dedos. Por que considerar a sua soma como sendo 5, se o efeito de somar 4 é apenas fazer com que o responsável pela contagem dê uma volta a mais? Em vez disto, é muito mais sensato considerar a sua soma como sendo $5 - 4 = 1$. Mais geralmente, considere um jogo com n jogadores. Em primeiro lugar diminui-se n dos valores jogados por cada um, de forma que todos eles estejam entre 0 e $n - 1$ (se todos os jogadores dessem ouvidos às palavras dos deuses, não jogariam além destes limites). Depois procede-se a soma, da seguinte forma. Soma-se o primeiro valor com o segundo. Caso esta soma seja um valor maior ou igual a n, subtrai-se n do resultado (Sede espertos e sabereis que fazendo isto sempre obtereis um número entre 0 e $n - 1$). Depois, a este resultado, soma-se o terceiro valor, tomando-se o cuidado de se subtrair n caso a soma exceda $n - 1$. Prossegue-se desta forma até que todos os valores tenham sido somados. Se seguistes o meu raciocínio até este ponto, não deveria ser-vos surpresa o fato que o resultado de uma tal operação está sempre entre 0 e $n - 1$, e portanto o jogador responsável pela contagem nunca precisará dar mais de uma volta.

E então todos os habitantes se ajoelharam aos pés do anjo, reconhecendo a sua suprema sabedoria, e o mundo conheceu enfim a paz. Até hoje os homens jogam os jogos de par-ou-ímpar e adedanha da forma como foram ensinados pelos deuses, embora, infelizmente, a maioria tenha se esquecido da lição final e continue se extenuando em uma interminável contagem que dá voltas e mais voltas.

❖❖❖

E foi assim que a lenda me foi contada pela minha avó, que ouviu de sua avó, que ouviu de sua própria avó, e assim por diante, até o princípio dos tempos.

Você deve estar achando meio esquisita a maneira de somar que foi ensinada pelos deuses. No entanto, eles a usaram em várias outras coisas que nos são muito familiares. Se você não acredita, responda rápido a estas perguntas:

a) Se uma coisa começa em uma segunda-feira e dura 7 dias, em que dia ela termina? E se durar 14 dias? E se durar 701 dias?

b) Se uma coisa começa às 8 horas da manhã e dura 24 horas, a que horas ela acaba? E se durar 48 horas? E se durar 4804 horas?

c) Se o ponteiro dos minutos de um relógio está apontando 23 minutos, para onde ele estará apontando daqui a 60 minutos? e daqui a 120 minutos? e daqui a 66681 minutos?

Garanto que, se você respondeu à terceira pergunta dos 3 ítens, não contou de um em um (ou então já estamos no terceiro milênio ☺). Você percebeu que os dias da semana se repetem de 7 em 7 dias, que as horas do dia se repetem de 24 em 24 horas e que o ponteiro do relógio volta a apontar para o mesmo ponto de 60 em 60 minutos. Garanto também que você, sem se dar conta, já pensou várias vezes coisas como "5 horas depois das 21 horas são 2 horas da manhã", ou seja, fez a conta $21 + 5 = 2$! E, por incrível que pareça, esta conta está certa!!! Está certa, porque você está pensando a menos de múltiplos de 24 (ou, como preferem os matemáticos, *módulo 24*) , ou seja:

$$21 + 5 = 2 \ (+ \text{ um múltiplo de } 24\ ),$$

ou, como preferem os matemáticos,

$$21 + 5 = 2 \ (mod\ 24)\ .$$

Desta forma, a terceira pergunta do item c) pode ser reescrita como "Quanto é 23 + 66681 (*mod* 60)" . Se você foi esperto(a) o suficiente para responder àquela pergunta, você já deve ter percebido que 66681 = 21 (*mod* 60), e que 23 + 66681 = 23 + 21 (*mod* 60), ou seja, 23 + 66681 = 44 (*mod* 60), logo o ponteiro estará apontando para o minuto 44. Só para ver se você entendeu até agora, preencha estas lacunas:

$2 + 2 = 1\ (mod\ \_\_\ )$
$2 + \_\_ = 0\ (mod\ 17)$
$26 = 3\ (mod\ \_\_\ )$

Não se esqueça que a expressão "*mod n*" é só uma forma abreviada de "+ um múltiplo de *n*". Lembrando-se disto, veja quantas coisas você sabia, mas não sabia que sabia:

$3 \times 3 = 1\ (mod\ 4)$
$1 = -1\ (mod\ 2)$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1\ (mod\ 5)$
$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 1\ (mod\ 5)$

(esta talvez você não saiba, mas $n \times n \times n \times n = 1\ (mod\ 5)$, sempre que n não é múltiplo de 5. Você pode ver isto e muito mais no artigo do professor Carlos Gustavo Moreira, na EUREKA! N°. 2. Pergunta: se n é múltiplo de 5, quanto é $n \times n \times n \times n\ (mod\ 5)$?)

Agora que você já sabe o segredo dos deuses matemáticos, já pode jogar adedanha da forma original, como os deuses a conceberam, e manter a paz no mundo sem fazer esforço.

QUADRILÁTEROS E TRIÂNGULOS

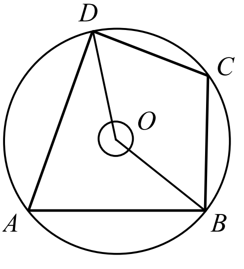
Marcelo Mendes

♦ Nível Intermediário

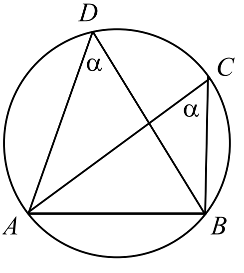
Apresentamos a seguir alguns resultados que servem de ferramenta para resolução de problemas de geometria elementar envolvendo quadriláteros e triângulos, bastante freqüentes em problemas de olimpíada.

QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS

Os ângulos opostos de um quadrilátero inscritível são suplementares. Reciprocamente, se os ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares, então esse quadrilátero é inscritível (cíclico).



Além disso, se ocorrer uma situação onde dois ângulos iguais "olham" para um mesmo segmento, então os extremos desse segmento e os vértices dos dois ângulos formam um quadrilátero inscritível.



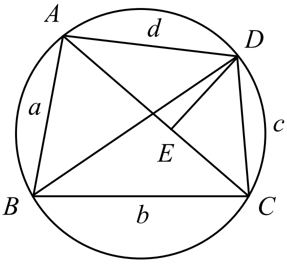
Exemplo: Seja AB o diâmetro de um semicírculo. Um ponto M é marcado no semicírculo e um ponto K é marcado sobre AB. Um círculo com o centro P passa por A, M, K e um círculo com centro Q passa por M, K, B. Prove que M, K, P, Q pertencem a um mesmo círculo.

Solução: No círculo circunscrito de AMK, $\angle MPK = 2\angle MAK$; e no círculo circunscrito de BMK, $\angle MQK = 2\angle MBK$. Como AB é diâmetro do semicírculo, $\angle AMB = 90^o$ e $\angle MAK+\angle MBK = 90^o$. Daí, $\angle MPK+\angle MQK = 180^o$ e $MPKQ$ é inscritível.

TEOREMA DE PTOLOMEU

Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível de diagonais AC e BD, então:

$$AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD.$$



Prova: Seja $x = BD$ e $y = AC$ e a, b, c, d, os comprimentos dos lados. Construa $\angle CDE = \angle ABD$, $E \in AC$. Daí, $\Delta CDE \sim \Delta ADB$ e $\Delta ADE \sim \Delta BCD$, dando, respectivamente, $EC\cdot x = ac$ e $AE\cdot x = bd$. Somando essas duas últimas equações, temos $xy = ac + bd$, como queríamos provar

Há também uma extensão para esse teorema que vale para quadriláteros não inscritíveis: $AB \times CD + AD \times BC > AC \times BD$, isto é, numa situação geral vale $AB \times CD + AD \times BC \geq AC \times BD$.

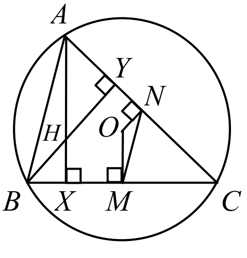
Exemplo: Prove que, se $ABCDEFG$ é um heptágono regular convexo, então:

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Aplicando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero inscritível $ACDE$, onde $CD = DE = a = AB$, $AC = CE = b$ e $AD = AE = c$, temos $bc = ac + ab$. Dividindo essa última equação por abc, segue o resultado.

A RELAÇÃO ENTRE A DISTÂNCIA DO ORTOCENTRO A UM VÉRTICE E DO CIRCUNCENTRO AO LADO OPOSTO

Sejam H e O respectivamente o ortocentro e o circuncentro, do ΔABC e M, o ponto médio do lado BC. Então $AH = 2 \cdot OM$.



Prova: Sejam AX e BY alturas e N, o ponto médio de AC. Como MN é base média, MN // AB e $MN = \frac{1}{2}AB$. Daí, $\Delta ABH \sim \Delta OMN$ pois têm lados paralelos entre si (e razão 2:1). Portanto, $AH = 2 \cdot OM$

Exemplo: Prove que o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo qualquer são colineares. **(*Reta de Euler*)**

Seja G a interseção de AM e HO (na figura acima). Então, $\Delta AHG \sim \Delta GOM$ na razão 2:1. Daí, $AG = 2 \cdot GM$. Portanto, G é o baricentro e pertence à reta HO.

PROBLEMAS

1. Seja P um ponto sobre o menor arco AC da circunferência circunscrita a um triângulo equilátero ABC. Calcule a medida do ângulo $\angle APC$.

2. Prove que um trapézio é inscritível se, e somente se, ele for isósceles (lados não paralelos iguais).

3. Sejam AX e BY alturas de um triângulo isósceles ABC ($AC = BC$) de ortocentro H. Prove que $2\cdot HX\cdot XC = XY\cdot HC$.

4. Seja $ABCD$ um losango inscritível de lado 1 e P, um ponto sobre o menor arco CD. Prove que $PD^2 + PC\cdot PA = 1$.

5. Seja P um ponto sobre o menor arco AC da circunferência circunscrita a um triângulo equilátero ABC. Prove que $PB = PA + PC$.

6. Seja H o ortocentro de um triângulo ABC e P, o ponto diametralmente oposto a B na circunferência circunscrita a ABC. Prove que $AHCP$ é um paralelogramo.

7. $ABCD$ é um paralelogramo. H é o ortocentro do ΔABC e O, o circuncentro do ΔACD. Prove que H, O, D são colineares.

8. Seja $A_1A_2\ldots A_n$ um polígono regular de n lados. Se $\dfrac{1}{A_1A_2} = \dfrac{1}{A_1A_3} + \dfrac{1}{A_1A_4}$, calcule n.

9. Sejam M, N, P os pontos médios dos lados de um ΔABC acutângulo de circuncentro O. Prolongue MO, NO, PO, a partir de O, até X, Y, Z, respectivamente, tais que $MX = 2\cdot OM, NY = 2\cdot ON, PZ = 2\cdot OP$. Prove que ΔXYZ é semelhante ao ΔABC.

10. Sejam M, N, P os pontos médios dos lados de um ΔABC acutângulo de circuncentro O. Prolongue MO, NO, PO, a partir de O, até X, Y, Z, respectivamente, tais que MX, NY, PZ tenham comprimentos respectivamente iguais às metades das alturas do triângulo a partir dos vértices A, B, C. Prove que ΔXYZ é semelhante ao triângulo órtico de ABC (triângulo formado pelos pés das alturas do ΔABC).

CONTAR DUAS VEZES PARA GENERALIZAR (O RETORNO)

José Paulo Q. Carneiro, Universidade Santa Úrsula

♦ Nível Intermediário

1. A fórmula que dá diretamente a soma dos quadrados $S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ dos n primeiros inteiros positivos pode ser deduzida de várias maneiras (por exemplo, [3]). Uma das mais comuns é partir da identidade: $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, escrevê-la para k variando de 1 até n:

$$2^3 - 1^3 = 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3\times 2^2 + 3\times 2 + 1$$

....

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

e somar termo a termo estas n igualdades, obtendo:

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3S_n^{(2)} + 3S_n^{(1)} + n$$

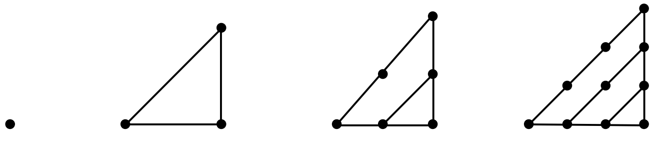
onde $S_n^{(1)} = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, como é bem conhecido (ver [1]). Substituindo este valor e fazendo as contas, chega-se a :

$$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Esta dedução é bastante eficiente e rápida, mas, quando apresentada pela primeira vez a um estudante, costuma deixar aquela sensação de "coelho tirado da cartola", devido ao aparecimento súbito de uma identidade cuja motivação não se sabe de onde veio. Este tipo de sensação desperta admiração em uns, mas em outros inspira uma frustração, proveniente da reflexão: "eu nunca vou conseguir bolar um artifício destes!". Coloca-se, portanto, a questão: há algum problema onde a soma dos quadrados apareça naturalmente? E, para este problema, há alguma outra maneira de resolvê-lo, por meio da qual possamos deduzir a fórmula da soma dos quadrados?

2. Tradicionalmente, em problemas de contagem, o símbolo C_n^p ("combinação de *n*, *p* a *p*") representa o número de subconjuntos de *p* elementos contidos em um conjunto de *n* elementos. Se, por exemplo, fizermos $p = 2$, então C_n^2 é o número de pares (não ordenados) que se pode extrair de um conjunto com *n* elementos. Exemplos: o número de apertos de mão dados por *n* pessoas quando cada uma cumprimenta todas as outras somente uma vez, ou ainda o número de partidas de futebol em um campeonato com um só turno e *n* equipes. Em [1], um artigo com o mesmo título que o presente aproveitava justamente o último exemplo citado para mostrar como, resolvendo um mesmo problema de contagem por dois métodos diferentes, era possível deduzir que: $C_n^2 = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

3. Os pitagóricos (sec.VI a.C.) chamavam os números C_n^2 de **números triangulares**. O motivo é que eles podem ser vistos como "triângulos" nas figuras:

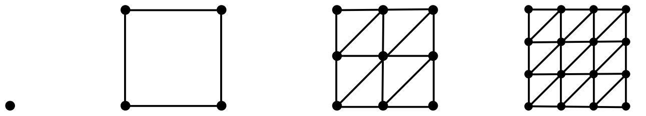


$T_1 = 1 \quad T_2 = 1 + 2 = 3 \quad T_3 = 1 + 2 + 3 = 6 \quad T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Deste modo: $C_n^2 = T_{n-1}$, para $n > 1$.

Além dos números triangulares, os pitagóricos consideravam também os **números quadrados** $Q_1 = 1^2 = 1$, $Q_2 = 2^2 = 4$, etc., que podem ser visualizados como quadrados (daí seu nome).

Estas figuras pitagóricas sugerem também uma relação interessante entre os números triangulares e os números quadrados. Se você partir o quadrado usando a diagonal sudoeste-nordeste, e incluindo esta diagonal na parte de baixo, você poderá olhar cada número quadrado como a soma de dois números triangulares consecutivos; mais especificamente: $Q_n = T_{n-1} + T_n$.



$2^2 = 1+3$ $\quad$ $3^2 = 3+6$ $\quad$ $4^2 = 6+10$

Esta relação pode, é claro, ser confirmada algebricamente, já que: $T_{n-1} + T_n = \dfrac{(n-1)n}{2} + \dfrac{n(n+1)}{2} = n^2 = Q_n$.

4. A observação precedente pode ser usada para calcular a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais. De fato:

$Q_1 = \quad T_1$
$Q_2 = T_1 + T_2$
$Q_3 = T_2 + T_3$
....
$Q_n = T_{n-1} + T_n$

Somando termo a termo, temos: $S_n^{(2)} = Q_1 + \cdots + Q_n = 2(T_1 + \cdots + T_{n-1}) + T_n$. Só resta agora calcular $T_1 + \cdots + T_{n-1}$, isto é, a soma dos $n-1$ primeiros números triangulares. Para isto, lembremos que esta soma é o mesmo que $C_2^2 + C_3^2 \cdots + C_n^2$, a qual vamos calcular pelo artifício de resolver um mesmo problema por duas contagens diferentes (ver [1]).

O número de subconjuntos de 3 elementos contidos em um conjunto A de $n+1$ elementos é representado, como já se sabe, por C_{n+1}^3. Vamos contar estes subconjuntos.

Para formar um subconjunto de A com 3 elementos, primeiramente escolhemos um elemento $a \in A$. Para isto, temos $n+1$ escolhas. Uma vez escolhido *a*, temos *n* escolhas possíveis para tomar um segundo elemento *b*; e para cada escolha de a e b, temos $n-1$ escolhas possíveis para selecionar o terceiro elemento *c*. Isto dá então um total de $(n+1)n(n-1)$ escolhas. Mas é claro que esta contagem inclui repetições. Para cada a,b,c escolhidos, houve 6 repetições, correspondentes às 6 permutações destes elementos, a saber: a,b,c; a,c,b; b,a,c; b,c,a; c,a,b; c,b,a. Portanto: $C_{n+1}^{3}=\dfrac{(n+1)n(n-1)}{6}$.

Por outro lado, se quisermos evitar desde o início as repetições, podemos contar do seguinte modo. Primeiramente, fixamos o elemento *a*; o número de subconjuntos de *A* com 3 elementos e que possuem *a* é o mesmo que o de subconjuntos de $A-\{a\}$ com 2 elementos, isto é: C_n^2. Tomemos agora um segundo elemento $b\neq a$. O número subconjuntos de *A* com 3 elementos, que possuem *b* mas não *a*, é o mesmo que o de subconjuntos de $A-\{a;b\}$ com 2 elementos, isto é: C_{n-1}^{2}. Analogamente, o número subconjuntos de *A* com 3 elementos, que contêm *c,* mas não intersectam $\{a,b\}$, é o mesmo que o de subconjuntos de $A-\{a;b;c\}$ com 2 elementos, isto é: C_{n-2}^{2}. E assim por diante, até que cheguemos ao antepenúltimo elemento, quando já teremos contado todos os subconjuntos *A* com 3 elementos. Logo: $C_{n+1}^{3}=C_n^2+C_{n-1}^{2}+\cdots+C_2^2$.

Deste modo, concluímos que:

$T_1+\cdots+T_{n-1}=C_2^2+C_3^2\cdots+C_n^2=C_{n+1}^{3}=\dfrac{(n+1)n(n-1)}{6}$. Conseguimos, portanto, calcular a soma dos $n-1$ primeiros números triangulares. Daí concluímos que:

$$S_n^{(2)}=Q_1+\cdots+Q_n=2(T_1+\cdots+T_{n-1})+T_n=\frac{(n+1)n(n-1)}{3}+\frac{(n+1)n}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Podemos generalizar as fórmulas acima, calculando de duas maneiras diferentes o número de subconjuntos de $k+1$ elementos contidos em um conjunto *A* de $n+1$ elementos, que é representado por C_{n+1}^{k+1}.

A primeira expressão para C_{n+1}^{k+1} é clássica e pode ser provada do mesmo modo que foi feito para $k+1=3$: temos

$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

(lembremos que $m! = 1 \,.\, 2 \,.\, ... \,.\, m$).

Seja agora $A = \{a_1, a_2, ..., a_{n+1}\}$. O número de subconjuntos de $k + 1$ elementos de A que contêm a_1 é C_n^k (escolhemos os k elementos de A diferentes de a_1). O número de subconjuntos de $k + 1$ elementos de A que contêm a_2 mas não contêm a_1 é C_{n-1}^k, e assim sucessivamente, o que mostra a igualdade

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + ... + C_k^k.$$

Se $P_k(n) = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)(n+k-2)...(n+1)n}{k!}$ é o "polinômio triangular generalizado de dimensão k", temos que $P_k(n)$ é um polinômio em n de grau k, e, pela fórmula acima, temos

$$P_k(1) + P_k(2) + ... + P_k(m) = C_k^k + C_{k+1}^k + ... + C_{m+k-1}^k = C_{m+k}^{k+1}.$$

Podemos, como antes, escrever n^k como uma combinação linear dos polinômios $P_j(n), 0 \le j \le k$, e usar a fórmula acima para obter uma fórmula para $S_n^{(k)} = 1^k + 2^k + ... + n^k$ (essa fórmula será a combinação correspondente dos termos C_{n+j}^{j+1}, com $0 \le j \le k$).

Tal fórmula também pode ser obtida recursivamente como no início do artigo, somando as identidades $(j+1)^{k+1} - j^{k+1} = \sum_{r=0}^{k} C_{k+1}^r \cdot j^r$, desde $j = 1$ até $j = n$, ficando o lado esquerdo igual a $(n+1)^{k+1} - 1$ e o direito igual a $(k+1)S_n^{(k)} + \sum_{r=0}^{k-1} C_{k+1}^r \, S_n^{(r)}$, o que dá $S_n^{(k)} = \dfrac{1}{k+1}\left((n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{r=0}^{k-1} C_{k+1}^r S_n^{(r)}\right)$.

Referências Bibliográficas:

[1] Carneiro, J.P., Contar duas vezes para generalizar, *Eureka!*, nº6, pp.15-17, 1999.
[2] Eves, H., Introdução à História da Matemática, Editora da UNICAMP, 1995
[3] Valadares, E.C., e Wagner, E., Usando geometria para somar, *Revista do Professor de Matemática*, nº39, pp.1-8, 1999.

OS NÚMEROS IRRACIONAIS

Hermano Frid
Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA

♦ Nível Intermediário.

No texto a seguir fazemos uma breve introdução ao conceito de número irracional. Na sua maior parte o texto será acessível a alunos da última série do primeiro grau. As duas últimas seções talvez requeiram um pouco mais de maturidade embora não exijam nenhum conhecimento prévio adicional. Para simplificar a exposição nos restringiremos a números positivos. A extensão dos fatos abordados ao contexto geral de números positivos, negativos e 0 não requer nenhuma dificuldade adicional.

Pode-se imaginar que a idéia de número inteiro positivo tenha surgido num estágio primário da civilização, juntamente com a necessidade da prática da contagem. Por exemplo, era necessário a um pastor saber contar de algum modo o número de animais no seu rebanho. A maneira de representar o resultado dessa contagem era no início bastante diferente da que usamos agora e é provável que no começo cada pessoa tivesse sua maneira própria de fazê-lo. Contar significa estabelecer um modo de comparar quantidades de elementos de conjuntos distintos. Por exemplo, a quantidade de pedrinhas em um saco com a quantidade de animais num rebanho, ou a quantidade de alimentos conseguidos em uma caçada ou em colheita com a quantidade de membros da tribo. Também não é difícil imaginar que a ideia de fração tenha surgido na evolução da civilização humana, primeiramente e de forma mais elementar, com a ocorrência usual da necessidade de um determinado grupo de pessoas partilhar um ou mais bens de propriedade comum entre seus membros. E num estágio mais avançado, dentre outras motivações possíveis, com a necessidade de as pessoas trocarem entre si bens de tipos distintos. Por exemplo, um pastor deseja trocar com um agricultor peles de carneiro por sacos de milho numa razão de 3 peles de carneiro para cada grupo de 7 sacos de milho. Por outro lado, a idéia de um "número" que não seja nem inteiro nem fração é, em princípio, muito menos natural que a daqueles e surge num estágio muito mais avançado da civilização com a necessidade da prática da medição. Por exemplo, medir as dimensões ou a área de um terreno, comparar as distâncias entre pares de pontos distintos, etc.

Procuraremos, a seguir, mostrar as propriedades básicas destes números "estranhos" em contraste com as propriedades, na maior parte já bem conhecidas, daqueles mais intuitivos, os inteiros e as frações.

1. BASE DECIMAL; DÍZIMAS

Os números reais positivos podem ser representados no sistema decimal por uma seqüência de algarismos – elementos do conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} – Separados por uma vírgula. Assim, se $a_N, a_{N-1}, ..., a_0, a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, ...,$ são algarismos quaisquer, um número real positivo representado no sistema decimal tem a forma

$$a_N a_{N-1} a_{N-2} ... a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} ..., \qquad (1)$$

onde $a_N > 0.$ Nessa representação, à esquerda da vírgula temos sempre um número finito de algarismos, porém à direita podemos ter uma infinidade de algarismos. Por exemplo, 783,5231 representa o número obtido como resultado da expressão

$$7\times10^2 + 8\times10^1 + 3\times10^0 + 5\times10^{-1} + 2\times10^{-2} + 3\times10^{-3} + 1\times10^{-4}. \qquad (2)$$

Por outro lado, a fração $\frac{154}{999}$ tem representação decimal 0, 1545454… com uma infinidade de algarismos à direita. Essa representação se traduz como resultado de uma expressão com infinitas parcelas

$$1\times10^{-1} + 5\times10^{-2} + 4\times10^{-3} + 5\times10^{-4} + 4\times10^{-5} + 5\times10^{-6} + ... \qquad (3)$$

Essa expressão significa exatamente que se quisermos aproximar $\frac{154}{999}$ no sistema decimal com "precisão de 8 casas decimais, por exemplo, devemos tomar como aproximação o número 0,15454545 que é resultado da expressão

$$1\times10^{-1} + 5\times10^{-2} + 4\times10^{-3} + 5\times10^{-4} + 4\times10^{-5} + 5\times10^{-6} + 4\times10^{-7} + 5\times10^{-8}. \qquad (4)$$

Claro, o número 0, 1545454… é o que chamamos de uma dízima periódica e por isso pode ser obtido como uma fração $\frac{154}{999}$.

O QUE ACONTECE NO CASO DE UMA DÍZIMA NÃO-PERIÓDICA?

Neste caso, assim como no periódico, temos uma infinidade de algarismos à direita da vírgula e assim só nos é possível escrever a representação decimal até uma certa casa decimal, porém, diferentemente do que acontece no caso periódico, não há repetição indefinidamente de um determinado grupo de algarismos e, assim, o número em questão *não pode ser obtido como uma fração* $\frac{p}{q}$ *com e* e q diferente de 0. Os números que podem ser obtidos como frações são chamados *racionais;* os que não podem ser obtidos como frações são chamados *irracionais*.

2. POR QUE PRECISAMOS DOS NÚMEROS IRRACIONAIS?

Responderemos esta pregunta através de um exemplo. Euclides provou que o número positivo cujo quadrado é 2, isto é, *o número positivo x que satisfaz a equação* $x^2 = 2,$ (5)

não é racional. Euclides argumentou da seguinte forma: Suponhamos que o número x satisfazendo (5) seja racional. Então existem inteiros positivos p e q, primos entre si, tais que $\frac{p^2}{q^2} = 2.$

ou seja $p^2 = 2q^2.$ (6)

Portanto p^2 é par e p também é par; p pode ser escrito na forma $p = 2k$.

Assim, $(2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2 \cdot$ (7)

Pela mesma razão que acabamos de expor, concluímos que q também deve ser par. Mas isto nos leva a uma contradição pois p e q são primos entre si por hipótese! Assim, a suposição de que $x = \frac{p}{q}$ nos leva a uma contradição e, portanto, deve ser descartada, considerada falsa.

Chegamos à conclusão que $\sqrt{2}$, que é como representamos o número positivo cujo quadrado é 2, é *um número irracional!!*

3. COMO OBTER APROXIMAÇÕES RACIONAIS PARA $\sqrt{2}$

Podemos obter aproximações cada vez melhores de $\sqrt{2}$ (o número x que satisfaz (5)) através do seguinte procedimento que é um caso particular de um esquema inventado por *Newton* conhecido como *método de Newton.* (Com base nesse método podemos programar as máquinas de calcular para produzirem aproximações de $\sqrt{2}$ tão precisas quanto o avanço da eletrônica nos permitir). primeiro "chutamos" um número x_0 como uma primeira aproximação de x que nos pareça razoável; por exemplo, $x_0 = 1$. Em seguida observamos que

$$x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0) \cong 2x_0(x - x_0),$$

onde o símbolo $\cong$ significa "é aproximadamente igual a". Assim, $x^2 - x_0^2 \cong 2x_0(x - x_0)$,

e, portanto, dividindo a "equação aproximada" por $2x_0$ e arranjando os termos, obtemos $x \cong \dfrac{x^2 - x_0^2}{2x_0} + x_0$. (8)

substituindo $x^2 = 2$ e $x_0 = 1$ em (8), obtemos $x \cong \dfrac{2-1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$.

Assim temos uma segunda aproximação $x_1 = \dfrac{3}{2}$. Encontramos também

x_2 : $x_2 \cong \dfrac{2 - \frac{9}{4}}{3} + \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x_2 \cong -\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x_2 \cong \dfrac{-1}{12} + \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 \cong \dfrac{17}{12}$. Da mesma forma, podemos obter uma quarta aproximação x_3, fazendo

$$x_3 = \frac{x^2 - x_2^2}{2x_2} + x_2 = \frac{2 - (17/12)^2}{17/6} + \frac{17}{12}$$

$$= \frac{288 - 289}{2 \times 12 \times 17} + \frac{17}{12} = \frac{288 - 289 + 2 \times 289}{2 \times 12 \times 17} = \frac{577}{408}.$$

Assim, $x_3 = \dfrac{577}{408}$ seria a aproximação seguinte: Sua representação decimal é a dízima periódica $x_3 = 1{,}414\underbrace{2156862745098039}_{período}\underbrace{21568627...9}....$

Agora se você pegar uma máquina de calcular e pedir (através dos devidos comandos) que ela calcule $\sqrt{2}$, você obterá, se sua máquina puder exibir 33 dígitos (incluindo a vírgula ou ponto), a expressão decimal

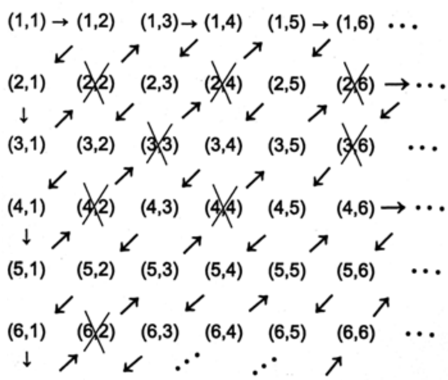
$$1{,}4142135623730950488016887242097.$$

Horrível, não é? Você obterá uma expressão ainda maior se sua máquina puder exibir mais dígitos. Repare como nossas aproximações x_1, x_2 e x_3 estão cada vez mais próximas desse número!

4. OS NÚMEROS RACIONAIS PODEM SER ENUMERADOS

Isto significa que podemos dispor os números racionais numa sucessão da forma $r_1, r_2, r_3, \ldots,$ com uma infinidade de elementos. Podemos interpretar este fato como significando que a quantidade de números racionais, embora sendo infinita, é de uma "ordem de infinitude" equivalente a dos números naturais 1, 2, 3…. O argumento para a demonstração desse fato é devido a *Georg Cantor*.

Como todo racional tem uma representação única como fração $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros positivos primos entre si, basta que saibamos enumerar os pares ordenados (p, q) de naturais primos entre si. A forma de obter essa enumeração está descrita pela figura abaixo:



A enumeração é obtida seguindo-se o caminho indicado pelas flechas, iniciando a partir de (1,1), tendo o cuidado de descartar os pares de naturais que não são primos entre si, como, por exemplo, (2,2), (4,2), (3,3) etc.. Com isso, teríamos

$$r_1 = \frac{1}{1} = 1,\ \ r_2 = \frac{1}{2},\ r_3 = \frac{2}{1} = 2,\ r_4 = \frac{3}{1} = 3,\ r_5 = \frac{1}{3}, \text{etc.}$$

5. REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS RACIONAIS

Há pouco dissemos que não era possível pôr uma dízima não periódica em forma de fração $\frac{p}{q}$ com p e q naturais primos entre si. Vamos dar uma explicação para este fato. Fixemos um natural q. Quando dividimos um número qualquer $N > q$ pelo número q. Obtemos como resto da divisão um elemento do conjunto (finito) $\{0, 1, 2,\ldots, q-1\}$. Tomemos como exemplo $q = 7$ e $N = 17$; nesse caso os restos possíveis pertencem ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Agora vamos recordar o algoritmo da divisão com esse exemplo específico:

```
17  |7
14   2,4285714285 71...
30
28
 20
 14
  60
  56
   40
   35
    50
    49
     10
      7
     30
```

O que acontece é que os restos possíveis são elementos do conjunto *finito* de q elementos $\{0, 1,\ldots, q-1\}$(no exemplo acima $q = 7$). Assim, em no máximo q iterações do algoritmo ou acabamos repetindo um elemento do conjunto de restos possíveis (no exemplo acima o primeiro a se repetir foi o 3), ou o 0 ocorre como resto e o processo termina. No primeiro caso, a partir daí passamos a repetir os restos ocorridos anteriormente na mesma ordem (3, 2, 6, 4, 5, 1, no exemplo acima). As casas decimais no quociente por sua vez também se repetem o obtemos então uma dízima periódica. No segundo caso, obtemos simplesmente um número finito de casas decimais.

6. REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS IRRACIONAIS

Todo número irracional positivo possui uma representação decimal *única* por meio de uma dízima *não periódica*. Para simplificar vamos nos restringir aos números entre 0 e 1. Já sabemos que um número cuja representação decimal possui uma quantidade finita de casas decimais pertence ao conjunto dos racionais. Da mesma forma aprendemos que um número cuja representação decimal é uma dízima periódica é também um número racional. Por outro lado, vimos no item anterior que as representações decimais de um racional são necessariamente de um dos dois tipos: ou possuem uma quantidade finita de casas decimais, ou "terminam" em uma dízima periódica. Logo, uma representação decimal para um número irracional tem necessariamente que ser uma *dízima não-periódica.* Afirmamos que essa representação é *única*. Repare que isso não ocorre em geral com os racionais. Por exemplo, 0, 21 e 0, 20999… representam o mesmo racional $\frac{21}{100}$. Suponhamos que um irracional x entre 0 e 1 possua duas representações decimais distintas:

$$x = 0, a_{-1}a_{-2}a_{-3}..., \tag{10}$$

$$x = 0, b_{-1}b_{-2}b_{-3}..., \tag{11}$$

Se essas representações são distintas certamente existe um $p \in \mathrm{N}$ tal que $a_{-k} = b_{-k}$, para $k = 0,..., p-1$, e $a_{-p} \neq b_{-p}$. Para fixar idéias vamos assumir então que $a_{-p} \geq b_{-p} + 1$ e por (10) e (11)

$$x \geq 0, a_{-1}a_{-2}...a_{-p}, \tag{12}$$

$$x \leq 0, a_{-1}a_{-2}...b_{-p}999... = 0, a_{-1}a_{-2}...(b_{-p}+1), \tag{13}$$

já que $b_{-k} = a_{-k}$ se $k = 0,..., p-1$ e b_{-k} é sempre menor ou igual a 9. Mas (12) e (13) implicam que $a_{-p} = b_{-p} + 1$ e $x = 0, a_{-1}a_{-2}...a_{-p}$.

Porém nesse caso x é racional e chegamos a uma contradição! Chegaríamos a uma contradição semelhante também se tivéssemos assumido $b_{-p} > a_{-p}$, argumentando da mesma forma apenas trocando os papéis dos a_{-k} e b_{-k}. A contridição tem origem no fato de termos suposto que havia duas representações decimais distintas para o mesmo irracional x. Logo essa possibilidade tem que ser descartada, considerada falsa, e assim concluímos que todo irracional possui uma representação decima única como dízima não-periódica.

7. OS IRRACIONAIS NÃO PODEM SER ENUMERADOS

Isto significa que não podemos dispor os números irracionais numa sucessão $s_1, s_2, s_3, ...,$ mesmo admitindo uma infinidade de elementos. Quer dizer, diferentemente dos racionais, a "ordem de infinitude" da quantidade dos números irracionais é maior que a dos números naturais. Concluímos daí que *existem muito mais números irracionais do que racionais!*

Vamos tentar justificar nossa afirmação sobre a não-enumerabilidade dos irracionais. O argumento é uma adaptação de uma idéia também devida a *G. Cantor*. Suponhamos que fosse possível dispor os irracionais numa sucessão $s_1, s_2, s_3, ...,$. Basta considerarmos apenas os irracionais entre 0 e 1. Criamos um número irracional x, também entre 0 e 1, através de uma representação decimal (portanto, uma dízima não periódica) da seguinte forma. O número x tem representação decimal dada por $x = 0, x_{-1}x_{-2}x_{-3}...$ onde x_{-p} é escolhido dentro do conjunto {0, 1, …, 9} de modo que x_{-p} é diferente de $(s_p)_{-p}$ onde este último é o algarismo que aparece na casa decimal de ordem p do irracional s_p (p-ésima elemento da sucessão $s_1, s_2, ...s_p, ...$). A escolha de cada x_p também deve atender a condição de não permitir que nenhum grupo de algarismos dentre os já escolhidos $x_{-1}, x_{-2}, ..., x_{-(p-1)}$ possa se tornar o gerador de uma dízima periódica. Desta forma obtemos uma dízima não periódica representando um único irracional que, no entanto, não pode constar na lista $s_1, s_2, s_3, ...,$. De fato, se $x = s_r$, para algum $r \in \mathbb{N}$, então como $x_{-r} \neq (s_r)_{-r}$ teríamos um absurdo (uma contradição)!.

8. ESTUDO SUPLEMENTAR: O IRRACIONAL π

O número π é definido como sendo a área limitada por um círculo de raio 1. Ele é certamente o irracional *transcendente* mais conhecido. A expressão transcendente significa, neste contexto, um número irracional que não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros.

Por exemplo, os irracionais $\sqrt{2}, 1+\sqrt{3}$ não são transcendentes pois são raízes das equações polinomiais $x^2 = 2, x^2 - 2x - 2 = 0$, respectivamente. Neste último caso dizemos que os números são *algébricos*. A demonstração de que π é um número irracional, apesar de não ser trivial, pode ser feita usando-se apenas o cálculo diferencial elementar que é ensinado no primeiro período dos cursos de ciências exatas. A primeira demonstração de que π é irracional só foi obtida em 1766 por *J. H. Lambert*, de forma não completamente rigorosa, tendo sido finalmente (re)obtida de modo rigoroso pelo famoso matemático *A. M. Legendre* e publicada em 1855. A prova de que π é transcendente é muito mais complexa e só foi obtida em 1882 por *F. Lindermann.*

O fabuloso matemática grego *Arquimedes* foi o primeiro a obter uma aproximação razoável de π por numeros racionais. Ele provou que

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7},$$

usando dois polígonos regulares de 96 lados, um inscrito e outro circunscrito a um círculo de raio 1.

Podemos obter aproximações cada vez melhores de π, com o auxílio de uma máquina de calcular bastante rudimentar, capaz apenas de fazer as operações básicas (+, –, ·) e mais a operação de extrair raiz quadrada, da seguinte forma. A idéia é aproximarmos o círculo de raio 1 por polígonos regulares de 2^n lados inscritos neste círculo. Primeiramente, é fácil verificar que para a área e o perímetro do polígono regular de 2^n lados inscritos num círculo de raio 1 temos

$$\text{Área} = \frac{1}{4}\text{Perímetro} \times \sqrt{4 - l^2},$$

onde l é o comprimento do lado do polígono. Como l se aproxima mais e mais de 0 a medida que n cresce, vemos que para o círculo de raio 1 devemos ter (fazendo $l = 0$ na fórmula acima)

$$\text{Área} = \frac{1}{4}\text{Perímetro}$$

Assim, podemos também definir π como sendo a metade do perímetro do círculo de raio 1. Por outro lado, usando o teorema de *Pitágoras* que diz que em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos, se l_n denota o comprimento do lado do polígono regular de 2^n lados, é fácil mostrar que

$$l_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}.$$

(14)

Para n = 2 temos o polígono regular de 4 lados, quadrado, inscrito no círculo de raio 1, cujo lado, facilmente obtido usando-se o teorema de Pitágoras, é

$$l_2 = \sqrt{2}.$$

Por meio de (14) obtemos sucessivamente

$$l_3 = \sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$l_4 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$l_5 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

$$l_6 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}},$$

$$l_7 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}},$$

$$l_8 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Para obter uma boa aproximação de π calculemos, por exemplo, o valor da metade do perímetro do polígono de $2^8 = 256$ lados, inscrito no círculo de raio 1, cujo lado tem comprimento igual a l_8. Podemos obter um valor aproximado para l_8 executando a seguinte seqüência de operações numa calculadora

2 sqrt + 2 = sqrt + 2 = sqrt + 2 = sqrt
+ 2 = sqrt + 2 = sqrt + / – + 2 = sqrt,

e obtemos

$$l_8 = 0.02454307657143985215881652390200 64.$$

Agora, multiplicaremos o resultado obtido para l_8 por 256, que é o número de lados da polígono em questão, e em seguida dividimos por 2 o que nos dá

$$\pi \simeq 3.14151380114430107632851505945682$$

o que fornece uma aproximação com erro menor que 0, 0001 já que é sabido que

$$3,1415 < \pi < 3,1416.$$

Considerações finais: Exceto pelas duas últimas seções, o texto acima foi elaborado a partir de um "pedido" de minha filha, Marina, atualmente na 8a. série do primeiro grau, urgida por um trabalho de casa em grupo passado por sua professora. O referido trabalho, felizmente, resultou bastante diferente do que foi exposto acima, que acabou servindo apenas como uma entre várias referências usadas pelo grupo. No entanto, as 7 primeiras seções foram bem compreendidas por ela e seu grupo; as duas últimas foram escritas depois que o prazo para a entrega do trabalho havia esgotado e, portanto, não chegaram a ser "testadas". Para concluir gostaria de deixar aqui meus agradecimentos ao estimado professor e colega Elon Lages Lima pelas sugestões sobre uma versão preliminar destas notas.

EXERCÍCIOS:

1) Usando o mesmo argumento de Euclides descrito em **2.** prove que $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$ são irracionais.
2) Usando o método de Newton, descrito em 3, obtenha aproximações correspondentes ao x_3 do texto para os irracionais $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ e compare com o resultado fornecido pela máquina de calcular.
3) Pesquise sobre a vida e a obra dos grandes matemáticos mencionados no texto: *Arquimedes, Pitágoras, Euclides, Isaac Newton* e *Georg Cantor*.
4) Prove a fórmula (14).

XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Problemas e Soluções da Primeira Fase

PROBLEMAS – NÍVEL 1

1. Sabendo-se que $9\,174\,532 \times 13 = 119\,268\,916$, pode-se concluir que é divisível por 13 o número:
A) 119 268 903 B) 119 268 907 C) 119 268 911
D) 119 268 913 E) 119 268 923

2. Numa caixa havia 3 meias vermelhas, 2 brancas e 1 preta. Professor Piraldo retirou 3 meias da caixa. Sabendo-se que nenhuma delas era preta, podemos afirmar sobre as 3 meias retiradas que:
A) são da mesma cor.
B) são vermelhas.
B) uma é vermelha e duas são brancas.
D) uma é branca e duas são vermelhas.
E) pelo menos uma é vermelha.

3. Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco composto de 20% de polpa e 80% de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é polpa?
A) 5% B) 7% C) 8% D) 20 E) 60%

4. Perguntado, Arnaldo diz que 1 bilhão é o mesmo que um milhão de milhões. Professor Piraldo o corrigiu e disse que 1 bilhão é o mesmo que mil milhões. Qual é a diferença entre essas duas respostas?
A) 1 000 B) 999 000 C) 1 000 000
D) 999 000 000 E) 999 000 000 000

5. Numa seqüência, cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos
anteriores mais próximos. O segundo termo é igual a 1 e o quinto termo vale 2005. Qual é o sexto termo?
A) 3 002 B) 3 008 C) 3 010 D) 4 002 E) 5 004

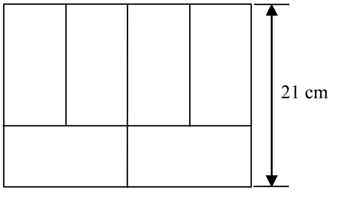
6. Um galão de mel fornece energia suficiente para uma abelha voar 7 milhões de quilômetros. Quantas abelhas iguais a ela conseguiriam voar mil quilômetros se houvesse 10 galões de mel para serem compartilhados entre elas?
A) 7 000 B) 70 000 C) 700 000
D) 7 000 000 E) 70 000 000

7. Três anos atrás, a população de Pirajussaraí era igual à população que Tucupira tem hoje. De lá para cá, a população de Pirajussaraí não mudou mas a população de Tucupira cresceu 50%. Atualmente, as duas cidades somam 9000 habitantes. Há três anos, qual era a soma das duas populações?
A) 3 600 B) 4 500 C) 5 000 D) 6 000 E) 7 500

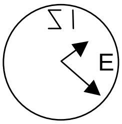
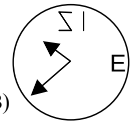
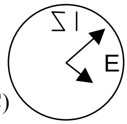
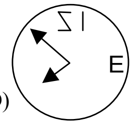
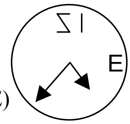
8. Um agricultor esperava receber cerca de 100 mil reais pela venda de sua safra. Entretanto, a falta de chuva provocou uma perda da safra avaliada entre $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$ do total previsto. Qual dos valores a seguir pode representar a perda do agricultor?
A) R$ 21.987,53 B) R$ 34.900,00 C) R$ 44.999,99
D) R$ 51.987,53 E) R$ 60.000,00

9. Devido a um defeito de impressão, um livro de 600 páginas apresenta em branco todas as páginas cujos números são múltiplos de 3 ou de 4. Quantas páginas estão impressas?
A) 100 B) 150 C) 250 D)300 E) 430

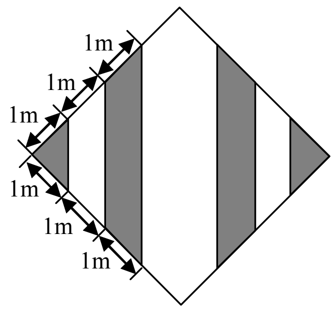
10. Seis retângulos idênticos são reunidos para formar um retângulo maior conforme indicado na figura. Qual é a área deste retângulo maior?
A) 210 cm^2 B) 280 cm^2
C) 430 cm^2 D) 504 cm^2
E) 588 cm^2



11. O relógio do professor Piraldo, embora preciso, é diferente, pois seus ponteiros se movem no sentido anti-horário. Se você olhar no espelho o relógio quando ele estiver marcando 2h23min, qual das seguintes imagens você verá?

A)  B)  C)  D)  E) 

12. Uma placa decorativa consiste num quadrado de 4 metros de lado, pintada de forma simétrica com algumas faixas, conforme indicações no desenho ao lado. Qual é a fração da área da placa que foi pintada?

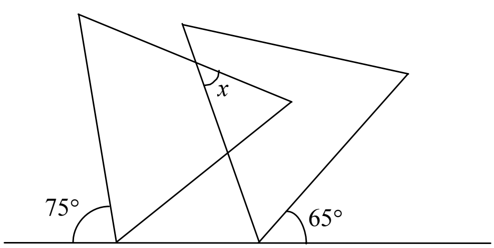


A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{6}{13}$ E) $\frac{7}{11}$

13. Películas de *insulfilm* são utilizadas em janelas de edifícios e vidros de veículos para reduzir a radiação solar. As películas são classificadas de acordo com seu grau de transparência, ou seja, com o percentual da radiação solar que ela deixa passar. Colocando-se uma película de 70% de transparência sobre um vidro com 90% de transparência, obtém-se uma **redução** de radiação solar igual a :

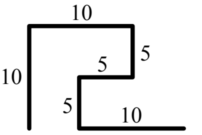
A) 3% B) 37% C) 40% D) 63% E) 160%

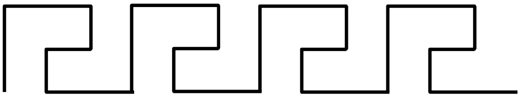
14. Na figura, os dois triângulos são eqüiláteros. Qual é o valor do ângulo x?



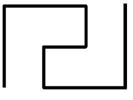
A) 30^{o} B) 40^{o} C) 50^{o} D) 60^{o} E) 70^{o}

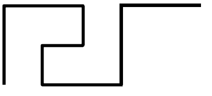
15. Um serralheiro solda varetas de metal para produzir peças iguais que serão juntadas para formar o painel abaixo. O desenho ao lado apresenta as medidas, em centímetros, de uma dessas peças. O serralheiro usa exatamente 20 metros de vareta para fazer o seu trabalho.

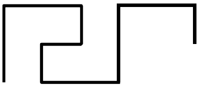


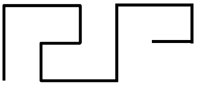


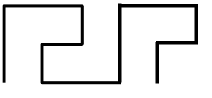
Qual dos desenhos abaixo representa o final do painel?

A) 

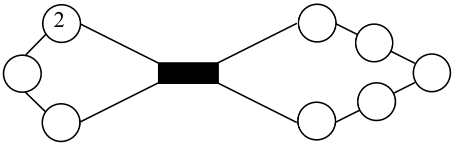
B) 

C) 

D) 

E) 

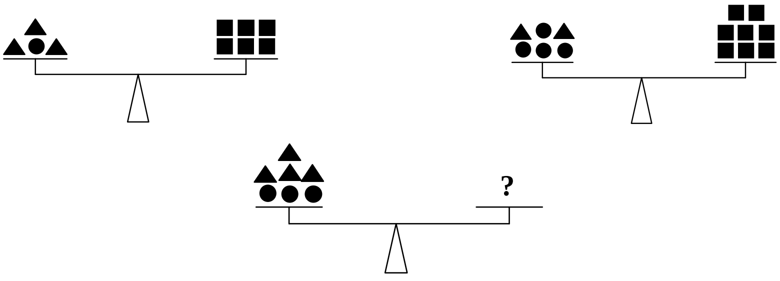
16. Dentre os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, escolha alguns e coloque-os nos círculos brancos de tal forma que a soma dos números em dois círculos vizinhos seja sempre um quadrado perfeito. Atenção: o 2 já foi colocado em um dos círculos e não é permitido colocar números repetidos; além disso, círculos separados pelo retângulo preto não são vizinhos.



A soma dos números colocados em todos os círculos brancos é:

A) 36 B) 46 C) 47 D) 49 E) 55

17. Figuras com mesma forma representam objetos de mesma massa. Quantos quadrados são necessários para que a última balança fique em equilíbrio?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

18. As 10 cadeiras de uma mesa circular foram numeradas com números consecutivos de dois algarismos, entre os quais há dois que são quadrados perfeitos. Carlos sentou-se na cadeira com o maior número e Janaína, sua namorada, sentou-se na cadeira com o menor número. Qual é a soma dos números dessas duas cadeiras?

A) 29 B) 36 C) 37 D) 41 E) 64

19. Em um ano, no máximo quantos meses têm cinco domingos?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

20. As nove casas de um tabuleiro 3×3 devem ser pintadas de foram que cada coluna, cada linha e cada uma das duas diagonais não tenham duas casas de mesma cor. Qual é o menor número de cores necessárias para isso?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

PROBLEMAS – NÍVEL 2

1. Uma loja de sabonetes realiza uma promoção com o anúncio *"Compre um e leve outro pela metade do preço"*. Outra promoção que a loja poderia fazer oferecendo o mesmo desconto percentual é

A) *"Leve dois e pague um"* B) *"Leve três e pague um"*
C) *"Leve três e pague dois"* D) *"Leve quatro e pague três"*
E) *"Leve cinco e pague quatro"*

2. Veja o problema No. 13 do Nível 1.

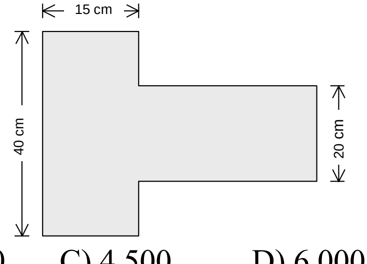
3. Veja o problema No. 10 do Nível 1.
4. Veja o problema No. 4 do Nível 1.
5. Veja o problema No. 9 do Nível 1.

6. Platina é um metal muito raro, mais raro até do que ouro. Sua densidade é 21,45 g/cm^3. Suponha que a produção mundial de platina foi de cerca de 110 toneladas em cada um dos últimos 50 anos e desprezível antes disso. Assinale a alternativa com o objeto cujo volume é mais próximo do volume de platina produzido no mundo em toda a história.
A) uma caixa de sapatos B) uma piscina
C) um edifício de dez andares D) o monte Pascoal E) a Lua

7. Veja o problema No. 5 do Nível 1.
8. Veja o problema No. 17 do Nível 1.

9. Entre treze reais não nulos há mais números positivos do que negativos. Dentre os $\frac{13\times 12}{2}=78$ produtos de dois dos treze números, 22 são negativos. Quantos números dentre os treze números dados são negativos?
A) 2 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

10. O desenho abaixo mostra um pedaço de papelão que será dobrado e colado nas bordas para formar uma caixa retangular. Os ângulos nos cantos do papelão são todos retos. Qual será o volume da caixa em cm^3?



A) 1 500 B) 3 000 C) 4 500 D) 6 000 E) 12 000

11. Sendo a, b e c números reais, pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, é verdade que $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. A distributiva da adição em relação à multiplicação $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$ não é sempre verdadeira, mas ocorre se, e somente se,

A) $a = b = c = \frac{1}{3}$ ou $a = 0$ B) $a = b = c$

C) A igualdade nunca ocorre D) $a + b + c = 1$ ou $a = 0$

E) $a = b = c = 0$

12. Em certa cidade, acontece um fato interessante. Dez por cento dos Baianos dizem que são Paulistas e dez por cento dos Paulistas dizem que são Baianos. Todos os outros Paulistas e Baianos assumem a sua verdadeira origem. Dentre os Paulistas e Baianos, 20% dizem que são Paulistas. Que percentual os realmente Paulistas representam dentre os Paulistas e Baianos?

A) 12,5% B) 18% C) 20% D) 22% E) 22,5%

13. Veja o problema No. 14 do Nível 1.

14. As letras O, B e M representam números inteiros. Se $O \times B \times M = 240$, $O \times B + M = 46$ e $O + B \times M = 64$, quanto vale $O + B + M$?

A) 19 B) 20 C) 21 D) 24 E) 36

15. Veja o problema No. 15 do Nível 1.

16. Veja o problema No. 19 do Nível 1.

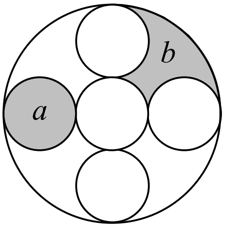
17. Quantos números entre 10 e 13000, quando lidos da esquerda para a direita, são formados por dígitos consecutivos e em ordem crescente? Exemplificando, 456 é um desses números, mas 7890 não é:

A) 10 B) 13 C) 18 D) 22 E) 25

18. Um piloto percorreu três trechos de um rali, de extensões 240 km, 300 km e 400 km, respectivamente. As velocidades médias nos três trechos foram 40 km/h, 75 km/h e 80 km/h, mas não necessariamente nessa ordem. Podemos garantir que o tempo total em horas gasto pelo piloto nos três trechos é:

A) menor ou igual a 13 horas
B) maior ou igual a 13 horas e menor ou igual a 16 horas
C) maior ou igual a 14 horas e menor ou igual a 17 horas
D) maior ou igual a 15 horas e menor ou igual a 18 horas
E) maior ou igual a 18 horas

19. Na figura, todas as circunferências menores têm o mesmo raio *r* e os centros das circunferências que tocam a circunferência maior são vértices de um quadrado. Sejam *a* e *b* as áreas cinzas indicadas na figura. Então a razão $\frac{a}{b}$ é igual a:



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

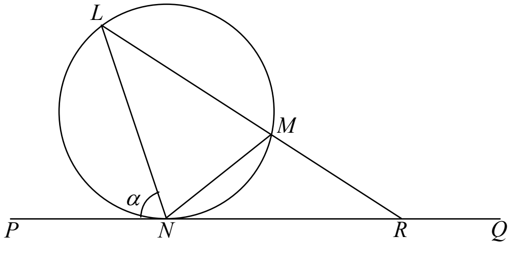
20. Um professor de Inglês dá aula particular para uma classe de 9 alunos, dos quais pelo menos um é brasileiro. Se o professor escolher 4 alunos para fazer uma apresentação, terá no grupo pelo menos dois alunos de mesma nacionalidade; se escolher 5 alunos, terá no máximo três alunos de mesma nacionalidade. Quantos brasileiros existem na classe?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

21. Um relógio, com ponteiros de horas, minutos e segundos, faz *plim* toda vez que um ponteiro ultrapassa outro no mostrador. O número de *plins* registrados em um certo dia, no período entre as 12 horas e 1 segundo e as 23 horas, 59 minutos e 59 segundos é:

A) 732 B) 1438 C) 1440 D) 1446 E) 1452

22. Na figura, a reta PQ toca em N o círculo que passa por L, M e N. A reta LM corta a reta PQ em R. Se $LM = LN$ e a medida do ângulo PNL é α, $\alpha < 60^{\circ}$, quanto mede o ângulo LRP?



A) $3\alpha - 180^{\circ}$ B) $180^{\circ} - 2\alpha$ C) $180^{\circ} - \alpha$ D) $90^{\circ} - \alpha/2$ E) α

23. Os inteiros positivos x e y satisfazem a equação

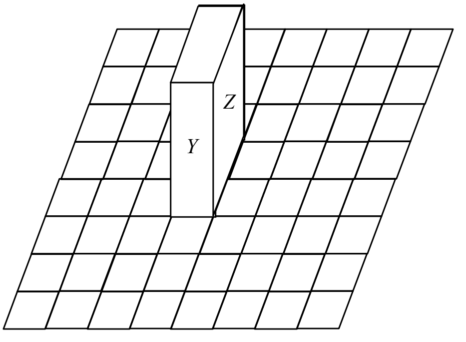
$$\sqrt{x+\tfrac{1}{2}\sqrt{y}} - \sqrt{x-\tfrac{1}{2}\sqrt{y}} = 1.$$

Qual das alternativas apresenta um possível valor de y?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

24. Veja o problema No. 16 do Nível 1.

25. Um bloco de dimensões $1 \times 2 \times 3$ é colocado sobre um tabuleiro 8×8, como mostra a figura, com a face X, de dimensões 1×2, virada para baixo. Giramos o bloco em torno de uma de suas arestas de modo que a face Y fique virada para baixo. Em seguida, giramos novamente o bloco, mas desta vez de modo que a face Z fique virada para baixo. Giramos o bloco mais três vezes, fazendo com que as faces X, Y e Z fiquem viradas para baixo, nessa ordem. Quantos quadradinhos diferentes do tabuleiro estiveram em contato com o bloco?

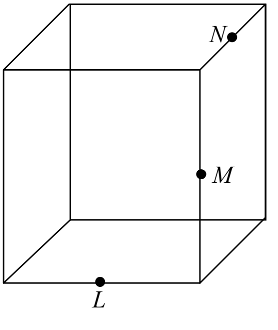


A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E)22

PROBLEMAS – NÍVEL 3

1. Veja o problema No. 17 do Nível 2.

2. Os pontos L, M e N são pontos médios de arestas do cubo, como mostra a figura. Quanto mede o ângulo LMN?



A) 90^o B) 105^o C) 120^o D) 135^o E) 150^o

3. Veja o problema No. 22 do Nível 2.

4. Veja o problema No. 14 do Nível 2.

5. Esmeralda digitou corretamente um múltiplo de 7 muito grande, com 4010 algarismos. Da esquerda para a direita, os seus algarismos são 2004 algarismos 1, um algarismo n e 2005 algarismos 2. Qual é o valor de n?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

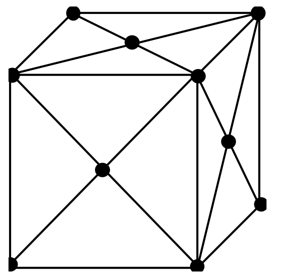
6. Veja o problema No. 23 do Nível 2.

7. Veja o problema No. 25 do Nível 2.

8. Veja o problema No. 1 do Nível 2.

9. Veja o problema No. 6 do Nível 2.

10. A figura mostra um cubo de aresta 1 no qual todas as doze diagonais de face foram desenhadas. Com isso, criou-se uma rede com 14 vértices (os 8 vértices do cubo e os 6 centros de faces) e 36 arestas (as 12 arestas do cubo e mais 4 sobre cada uma das 6 faces). Qual é o comprimento do menor caminho que é formado por arestas da rede e que passa por todos os 14 vértices?



A) $1+6\sqrt{2}$ B) $4+2\sqrt{2}$ C) 6 D) $8+6\sqrt{2}$ E) $12+12\sqrt{2}$

11. Uma das faces de um poliedro é um hexágono regular. Qual é a quantidade mínima de arestas que esse poliedro pode ter?

A) 7 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

12. Veja o problema No. 19 do Nível 1.

13. O ponto D pertence ao lado BC do triângulo ABC. Sabendo que $AB = AD = 2$, $BD = 1$ e os ângulos BAD e CAD são congruentes, então a medida do segmento CD é:

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{7}{6}$

14. Esmeralda adora os números triangulares (ou seja, os números 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28…), tanto que mudou de lugar os números 1, 2, 3, …, 11 do relógio de parede do seu quarto de modo que a soma de cada par de números vizinhos é um número triangular. Ela deixou o 12 no seu lugar original. Que número ocupa o lugar que era do 6 no relógio original?

A) 1 B) 4 C) 5 D) 10 E) 11

15. Os termos a_n de uma seqüência de inteiros positivos satisfazem a relação

$$a_{n+3} = a_{n+2}(a_{n+1} + a_n) \text{ para } n = 1, 2, 3\ldots$$

Se $a_5 = 35$, quanto é a_4?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

16. Veja o problema No. 11 do Nível 2.

17. Veja o problema No. 19 do Nível 2.

18. Entre treze reais não nulos há mais números positivos do que negativos. Dentre os $\frac{13\times 12}{2} = 78$ produtos de dois dos treze números, 22 são negativos. Quantos números dentre os treze números dados são negativos?

A) 2 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

19. Traçando as quatro retas perpendiculares aos lados de um paralelogramo não retângulo pelos seus pontos médios, obtém-se uma região do plano limitada por essas quatro retas. Podemos afirmar que a área dessa região é igual à área do paralelogramo se um dos ângulos do paralelogramo for igual a:

A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 90°

20. O número $(2+\sqrt{2})^3(3-\sqrt{2})^4 + (2-\sqrt{2})^3(3+\sqrt{2})^4$ é:

A) inteiro ímpar B) inteiro par
C) racional não inteiro D) irracional positivo
E) irracional negativo

21. Sejam $A = 10^{(\log_{10} 2005)^2}$, $B = 2005^3$ e $C = 2^{\sqrt{2005}}$. Então:

A) $A < B < C$ B) $A < C < B$
C) $B < A < C$ D) $B < C < A$ E) $C < A < B$

22. Veja o problema No. 18 do Nível 2.

23. Dois números inteiros são chamados de *primanos* quando pertencem a uma progressão aritmética de números primos com pelo menos três termos. Por exemplo, os números 41 e 59 são primanos pois pertencem à progressão aritmética (41; 47; 53; 59) que contém somente números primos. Assinale a alternativa com dois números que **não são** primanos.

A) 7 e 11 B) 13 e 53 C) 41 e 131 D) 31 e 43 E) 23 e 41

24. Um relógio, com ponteiros de horas, minutos e segundos, faz *plim* toda vez que um ponteiro ultrapassa outro no mostrador. O número de *plins* registrados em um certo dia no período entre as 12 horas e 1 segundo e as 23 horas, 59 minutos e 59 segundos é:

A) 732 B) 1438 C) 1440 D) 1446 E) 1452

25. Veja o problema No. 20 do Nível 2.

GABARITO

NÍVEL 1 (5ª. e 6ª. séries)

1) A	6) B	11) A	16) B
2) E	7) E	12) C	17) D
3) A	8) A	13) B	18) D
4) E	9) D	14) B	19) C
5) B	10) E	15) B	20) C

NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. séries)

1) D	6) B	11) D	16) C	21) Anulada
2) B	7) B	12) A	17) D	22) Anulada
3) E	8) D	13) B	18) Anulada	23) C
4) E	9) A	14) B	19) C	24) B
5) D	10) B	15) B	20) C	25) B

NÍVEL 3 (Ensino Médio)

1) D	6) C	11) C	16) D	21) C
2) C	7) B	12) C	17) C	22) Anulada
3) Anulada	8) D	13) B	18) A	23) B
4) B	9) B	14) C	19) B	24) Anulada
5) B	10) A	15) D	20) B	25) C

XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Problemas e Soluções da Segunda Fase

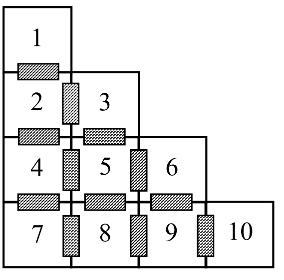
PROBLEMAS – Nível 1 PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

01. O tanque do carro de Esmeralda, com capacidade de 60 litros, contém uma mistura de 20% de álcool e 80% de gasolina ocupando metade de sua capacidade. Esmeralda pediu para colocar álcool no tanque até que a mistura ficasse com quantidades iguais de álcool e gasolina. Quantos litros de álcool devem ser colocados?

02. Na seqüência de números 1, a, 2, b, c, d, ... dizemos que o primeiro termo é 1, o segundo termo é a, o terceiro termo é 2, o quarto termo é b, e assim por diante.
Sabe-se que esta seqüência tem 2005 termos e que cada termo, a partir do terceiro, é a média aritmética de todos os termos anteriores. Qual é o último termo dessa seqüência?

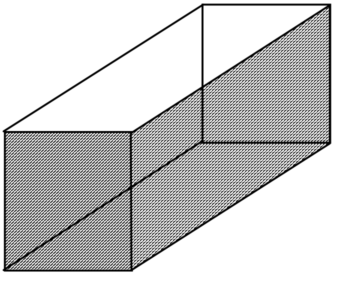
03. Natasha é supersticiosa e, ao numerar as 200 páginas de seu diário, começou do 1 mas pulou todos os números nos quais os algarismos 1 e 3 aparecem juntos, em qualquer ordem. Por exemplo, os números 31 e 137 não aparecem no diário, porém 103 aparece.
Qual foi o número que Natasha escreveu na última página do seu diário?

04. Juliana foi escrevendo os números inteiros positivos em quadrados de papelão, colados lado a lado por fitas adesivas representadas pelos retângulos escuros no desenho abaixo. Note que cada fila de quadrados tem um quadrado a mais que a fila de cima. Ela escreveu até o número 105 e parou. Quantos pedaços de fita adesiva ela usou?

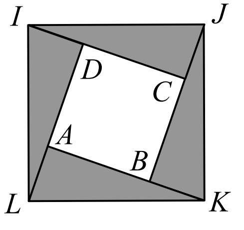


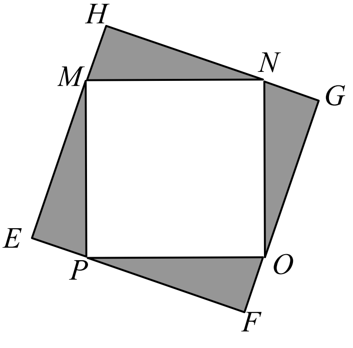
05. Lara tem cubos iguais e quer pintá-los de maneiras diferentes, utilizando as cores laranja ou azul para colorir cada uma de suas faces.
Para que dois cubos não se confundam, não deve ser possível girar um deles de forma que fique idêntico ao outro. Por exemplo, há uma única maneira de pintar o cubo com uma face laranja e cinco azuis.
Quantos cubos pintados de modos diferentes ela consegue obter?

06. Um carpinteiro fabrica caixas de madeira abertas na parte de cima, pregando duas placas retangulares de 600 cm^2 cada uma, duas placas retangulares de 1200 cm^2 cada uma e uma placa retangular de 800 cm^2, conforme representado no desenho.
Qual é o volume, em litros, da caixa? Note que l litro = 1000 cm^3.



PROBLEMAS – Nível 1 PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)
PROBLEMA 1
Quatro peças iguais, em forma de triângulo retângulo, foram dispostas de dois modos diferentes, como mostram as figuras.





Os quadrados *ABCD* e *EFGH* têm lados respectivamente iguais a 3 cm e 9 cm. Calcule as áreas dos quadrados *IJKL* e *MNOP*.

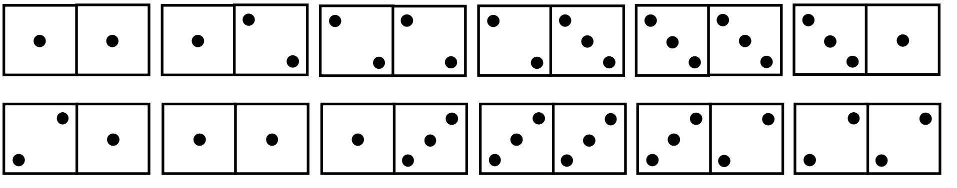
PROBLEMA 2

Considere três números inteiros positivos consecutivos de três algarismos tais que o menor é múltiplo de 7, o seguinte é múltiplo de 9 e o maior é múltiplo de 11. Escreva todas as seqüências de números que satisfazem essas propriedades.

PROBLEMA 3

Cada peça de um jogo de dominó possui duas casas numeradas. Considere as 6 peças formadas apenas pelos números 1, 2 e 3.

(a) De quantos modos é possível colocar todas estas peças alinhadas em seqüência, de modo que o número da casa da direita de cada peça seja igual ao número da casa da esquerda da peça imediatamente à direita? A seguir, mostramos dois exemplos:



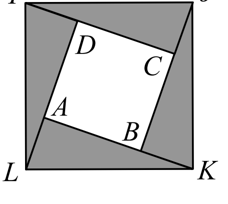
(b) Explique por que não é possível fazer o mesmo com todas as 10 peças formadas apenas pelos números 1, 2, 3 e 4.

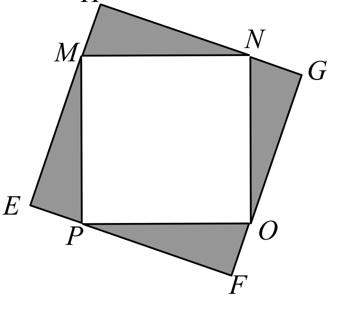
PROBLEMAS – Nível 2 PARTE A

(Cada problema vale 4 pontos)

01. Veja o problema No. 3 do Nível 1 Parte A.

02. Quatro peças iguais, em forma de triângulo retângulo, foram dispostas de dois modos diferentes, como mostram as figuras abaixo.

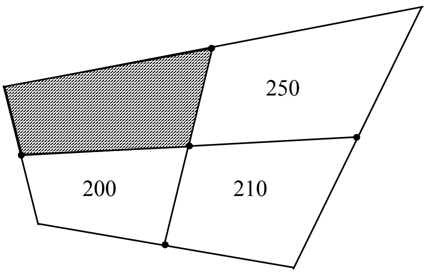




Os quadrados *ABCD* e *EFGH* têm lados respectivamente iguais a 3 cm e 9 cm. Determine a medida do lado do quadrado *IJKL*.

03. Veja o problema No. 4 do Nível 1 parte A.

04. Um terreno quadrangular foi dividido em quatro lotes menores por duas cercas retas unindo os pontos médios dos lados do terreno. As áreas de três dos lotes estão indicadas em metros quadrados no mapa a seguir.



Qual é a área do quarto lote, representado pela região escura no mapa?

05. Seja a um número inteiro positivo tal que a é múltiplo de 5, $a + 1$ é múltiplo de 7, $a + 2$ é múltiplo de 9 e $a + 3$ é múltiplo de 11. Determine o menor valor que a pode assumir.

PROBLEMAS – Nível 2 PARTE B

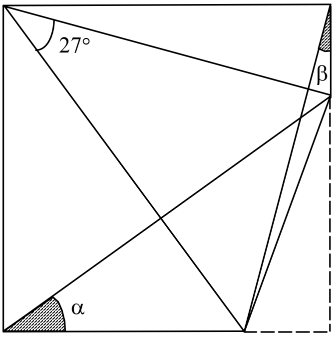
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Gabriel resolveu uma prova de matemática com questões de álgebra, geometria e lógica. Após checar o resultado da prova Gabriel observou que respondeu corretamente 50% das questões de álgebra, 70% das questões de geometria e 80% das questões de lógica. Gabriel observou, também, que respondeu corretamente 62% das questões de álgebra e lógica e 74% das questões de geometria e lógica. Qual a porcentagem de questões corretas da prova de Gabriel?

PROBLEMA 2

O canto de um quadrado de cartolina foi cortado com uma tesoura. A soma dos comprimentos dos catetos do triângulo recortado é igual ao comprimento do lado do quadrado. Qual o valor da soma dos ângulos α e β marcados na figura abaixo?



PROBLEMA 3

(a) Fatore a expressão $x^2 - 9xy + 8y^2$.

(b) Determine todos os pares de inteiros (*x*; *y*) tais que $9xy - x^2 - 8y^2 = 2005$.

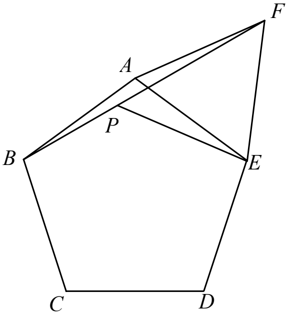
PROBLEMA 4

Veja o problema No. 3 do Nível 1 Parte B.

PROBLEMAS – Nível 3 PARTE A

(Cada problema vale 4 pontos)

01. Na figura, *ABCDE* é um pentágono regular e *AEF* é um triângulo eqüilátero. Seja *P* um ponto sobre o segmento BF, no interior de *ABCDE*, e tal que o ângulo $P\hat{E}A$ mede 12º, como mostra a figura abaixo.



Calcule a medida, em graus, do ângulo $P\hat{A}C$.

02. Seja a um número inteiro positivo tal que a é múltiplo de 5, $a + 1$ é múltiplo de 7, $a + 2$ é múltiplo de 9 e $a + 3$ é múltiplo de 11. Determine o menor valor que a pode assumir.

03. Veja o problema No. 4 do Nível 2 parte A.

04. A função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ satisfaz $f(x+f(y))=x+f(f(y))$ para todos os números reais x e y. Sabendo que $f(2)=8$, calcule $f(2005)$.

05. Você tem que determinar o polinômio $p(x)$ de coeficientes inteiros positivos fazendo perguntas da forma "Qual é o valor numérico de $p(k)$?", sendo k um inteiro positivo à sua escolha.

Qual é o menor número de perguntas suficiente para garantir que se descubra o polinômio?

PROBLEMAS – Nível 3 PARTE B

(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Determine todos os pares de inteiros $(x; y)$ tais que $9xy - x^2 - 8y^2 = 2005$.

PROBLEMA 2

Um prisma é reto e tem como base um triângulo equilátero. Um plano corta o prisma mas não corta nenhuma de suas bases, determinando uma secção triangular de lados a, b e c. Calcule o lado da base do prisma em função de a, b e c.

PROBLEMA 3

No campeonato tumboliano de futebol, cada vitória vale três pontos, cada empate vale um ponto e cada derrota vale zero ponto. Um *resultado* é uma vitória, empate ou derrota. Sabe-se que o Flameiras não sofreu nenhuma derrota e tem 20 pontos, mas não se sabe quantas partidas esse time jogou. Quantas seqüências ordenadas de resultados o Flameiras pode ter obtido? Representando vitória por V, empate por E e derrota por D, duas possibilidades, por exemplo, são (V, E, E, V, E, V, V, V, E, E) e (E, V, V, V, V, V, E, V).

PROBLEMA 4

Determine o menor valor possível do maior termo de uma progressão aritmética com todos os seus sete termos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 primos positivos distintos.

Curiosidade: No ano passado, os ex-olímpicos Terence Tao (Austrália, ouro na IMO 1988) e Ben Green (Reino Unido, prata na IMO 1994) provaram que existem progressões aritméticas arbitrariamente grandes com todos os termos primos positivos. Tal questão remonta ao século XVIII, aparecendo nas pesquisas de Lagrange e Waring.

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	18	2	214	182	10	24

01. O tanque contém uma mistura de 30 litros, sendo $0,2\times 30=6$ litros de álcool e 30 – 6 = 24 litros de gasolina. Portanto, para que as quantidades de gasolina e álcool fiquem iguais, devem ser colocados no tanque 24 – 6 = **18** litros de álcool.

02. Como 2 é a média aritmética de 1 e *a*, podemos escrever $\frac{1+a}{2}=2$, logo $1+a=4 \Leftrightarrow a=3$; portanto, $b=\frac{1+2+3}{3}=2$; $c=\frac{1+3+2+2}{4}=2$; $d=\frac{1+3+2+2+2}{5}=2$. Esses exemplos sugerem que todos os termos, a partir do terceiro, são iguais a 2. De fato, quando introduzimos em uma seqüência um termo igual à média de todos os termos da seqüência, a média da nova seqüência é a mesma que a da seqüência anterior. Assim, o último termo da seqüência dada é **2**.

03. Natasha pulou os números 13, 31, 113, 130,131, 132, ..., 139, num total de 13 números. Portanto, na última página do seu diário escreveu o número 200 + 13 +1 = **214**.

04. Olhando para o último número da fila n, vemos que ele é a soma de todos os números de 1 a n: por exemplo, na fila 4, o último número da fila é 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Note que para obter a quantidade de números até uma certa fila, basta somar o número da fila ao total de números que havia antes dessa fila. Assim, temos, fila 5 : 15, fila 6: 21, fila 7: 28, fila 8: 36, fila 9: 45, fila 10: 55, fila 11: 66, fila 12: 78, fila 13: 91, fila 14: 105

O número de fitas adesivas horizontais entre uma fila $n - 1$ e uma fila n é igual a $n - 1$ e o número de fitas adesivas verticais numa fila n é igual $n - 1$. Portanto, até a fila número 14, o número de fitas é $(1+2+\cdots+13)+(1+2+\cdots+13)=2\cdot\dfrac{13\cdot 14}{2}=\mathbf{182}$.

05. Todas as faces azuis: *uma maneira*.

Cinco faces azuis e uma amarela: *uma maneira*.

Quatro faces azuis e duas amarelas: *duas maneiras* (duas faces amarelas opostas ou duas faces amarelas adjacentes).

Três faces azuis e três faces amarelas: *duas maneiras* (três azuis com um vértice comum – *uma maneira* ou três azuis com uma aresta comum duas a duas – *uma maneira*)

Duas faces azuis e quatro amarelas: *duas maneiras*

Uma face azul e cinco amarelas: *uma maneira*.

Todas as faces amarelas: *uma maneira*.

Portanto, o número de maneiras diferentes de pintar o cubo é **10**.

06. Sejam a, b e c as medidas da caixa, conforme indicado no desenho ao lado.

Segundo o enunciado, podemos escrever $ab = 600$, $ac = 1200$ *e* $bc = 800$. Sabemos que o volume da caixa é abc. Utilizando as propriedades das igualdades e de potências, podemos escrever

$$(ab)\cdot(ac)\cdot(bc)=600\cdot 1200\cdot 800 \Leftrightarrow a^2\cdot b^2\cdot c^2 = 2\cdot 3\cdot 10^2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 10^2\cdot 2^3\cdot 10^2 \Leftrightarrow$$

$$(abc)^2 = 2^6\cdot 3^2\cdot 10^6 \Leftrightarrow abc=\sqrt{2^6\cdot 3^2\cdot 10^6} \Leftrightarrow abc = 2^3\cdot 3\cdot 10^3 = 24\cdot 1000\ \text{cm}^3$$

Como 1 litro é igual a 1000 cm^3, concluímos que o volume da caixa é de **24** litros.

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

1ª maneira: O quadrado *IJKL* e o quadrado *MNOP* têm como lados as hipotenusas dos triângulos retângulos dados, logo têm a mesma área *s*. Fazendo os dois quadrados coincidirem, concluímos que o dobro da soma *t* das áreas dos quatro triângulos retângulos é a diferença entre as áreas dos quadrados *IJKL* e *EFGH*, ou seja, $2t = 9^2 - 3^2 \Leftrightarrow 2t = 72 \Leftrightarrow t = 36$. Assim, $s = 9 + 36 = 81 - 36 = 45$ cm^2.

2ª maneira: No quadrado *IJKL*, seja $JC = x$. Então $IC = ID + DC = JC + DC = x + 3$. Então, no quadrado *EFGH*, temos $HN + NG = x + 3 + x = 9 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$. Portanto, a área do quadrado *IJKL*, igual à soma das áreas dos quatro triângulos retângulos com a área do quadrado *ABCD*, vale $4 \cdot \dfrac{3 \cdot (3+3)}{2} + 3^2 = 36 + 9 = 45$ e a área do quadrado *MNOP*, igual à diferença entre a área do quadrado *EFGH* e a soma das áreas dos quatro triângulos retângulos, vale $9^2 - 4 \cdot \dfrac{3 \cdot (3+3)}{2} = 81 - 36 = 45$ cm^2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Seja $n = abc$ múltiplo de 11; então $n - 1$ deve ser múltiplo de 9 e $n - 2$ deve ser múltiplo de 7.

Seja $c \neq 0$:

Como abc é múltiplo de 11, podemos ter $a - b + c = 0$ ou $a - b + c = 11$. Como $abc - 1$ é múltiplo de 9, podemos ter $a + b + c - 1 = 9$ ou $a + b + c - 1 = 18$. No caso de $a + b + c - 1 = 0$, teríamos $n - 1 = 99 \Leftrightarrow n = 100$, que não é múltiplo de 11. Assim, simultaneamente, somente podemos

ter $(i)\left|\begin{array}{l} a+b+c=10 \\ a+c=b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2b=10 \\ a+c=b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} b=5 \\ a+c=5 \end{array}\right.$ ou

$$(ii)\left|\begin{array}{l} a+b+c=19 \\ a+c=b+11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2b+11=19 \\ a+c=b+11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} b=4 \\ a+c=15 \end{array}\right.$$

No caso *(i)* existem as seguintes possibilidades para n: 154, 253, 352, 451, que são múltiplos de 11; para $n - 1$ temos os números 153, 252, 351, 450 e 549 são múltiplos de 9. Para os números $n - 2$ temos 152, 251, 350, 449 e 548, dos quais apenas 350 é múltiplo de 7.
No caso *(ii)* existem as seguintes possibilidades para n: 649, 748, 847 e 946, que são múltiplos de 11; para $n - 1$ temos os números 648, 747, 846 e 945 são múltiplos de 9. Para os números $n - 2$ temos 647, 746, 845 e 944, dos quais nenhum é múltiplo de 7.

Seja $c = 0$:

Neste caso, $n - 1$ tem os algarismos a, $b - 1$ e 9. Assim, $a + b - 1 + 9 = 9$ ou $a + b - 1 + 9 = 18$ ou seja, $a + b = 1$ ou $a + b = 10$. Como $a - b + c = a - b = 0$ ou $a - b + c = a - b = 11$, concluímos que $a = b$. Assim, $a = b = 5$, o que fornece os números $n = 550$, $n - 1 = 549$ e $n - 2 = 548$, que não é divisível por 7.

Portanto, a única seqüência de três números inteiros consecutivos nas condições dadas é 350, 351 e 352.

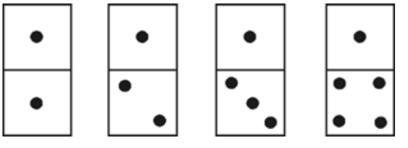
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:
1ª maneira:

a) Podemos representar uma seqüência válida como uma seqüência de pares ordenados. O primeiro exemplo é a seqüência [(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,1)] e, a partir dela, podemos criar outras seqüências válidas movendo o par da esquerda para a direita (ou da direita para a esquerda). Assim, são válidas as seqüências [(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,1),(1,1)], [(2,2),(2,3),(3,3),(3,1),(1,1), (1,2)],etc. num total de 6 seqüências diferentes. Mudando a posição dos números dos pares ordenados, podemos criar outras 6 seqüências: [(2,1), (1,1), (1,3), (3,3),(3,2),(2,2)], [(1,1), (1,3), (3,3),(3,2),(2,2), (2,1)], etc. Portanto, de acordo com as regras dadas há 12 modos de colocar as peças em seqüência.

2ª maneira:

As pontas devem ter o mesmo número, pois eles aparecem um número par de vezes (se aparecer um número numa ponta e outro na outra, então há pelo menos dois números que aparecem um número ímpar de vezes, o que não ocorre). Alguma peça com dois números iguais deve aparecer em uma das pontas, pois do contrário teríamos três das quatro peças centrais com duas iguais, vizinhas, o que é impossível). Sendo assim, a seqüência pode ser representada por XX-XY-YY-YZ-ZZ-ZX, onde para X temos três possibilidades, para Y temos duas possibilidade e para Z, uma possibilidade, num total de 3.2.1 = 6 possibilidades para a seqüência que começa com uma dupla. Se a seqüência terminar com uma dupla, teremos novamente 6 possibilidades. Portanto, há 12 modos de colocar as seis peças em seqüência.

a) Para cada número, existem 4 peças. Por exemplo, as peças com o número 1 estão desenhadas ao lado. O número de vezes em que aparece o número 1 é ímpar, logo a seqüência deveria começar com 1 e terminar com outro número ou começar com outro número e terminar com 1. Neste caso, os outros dois números deveriam aparecer um número par de vezes, pois não estariam na ponta, mas isso não ocorre: todos os quatro números aparecem um número ímpar de vezes.



Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	214	-------	182	240	1735

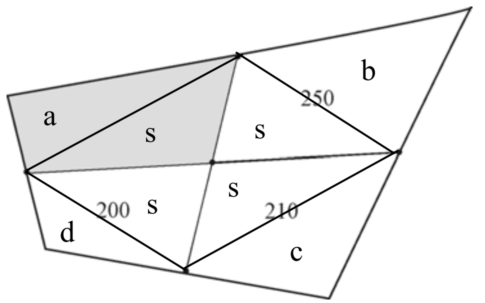
01. Natasha pulou os números 13, 31, 113, 130,131, 132, ..., 139, num total de 13 números. Portanto, na última página do seu diário escreveu o número 200 + 13 +1 = **214**.

02. Sejam x e y o maior e o menor catetos, respectivamente, do triângulo retângulo. Como o lado do quadrado *ABCD* mede 3 cm, temos $x - y = 3$. Por outro lado, como o lado de *EFGH* mede 9 cm, temos $x + y = 9$. Resolvendo o sistema, encontramos $x = 6$ e $y = 3$. Logo, o lado do quadrado *IJKL*, que é a hipotenusa do triângulo retângulo, mede $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm.

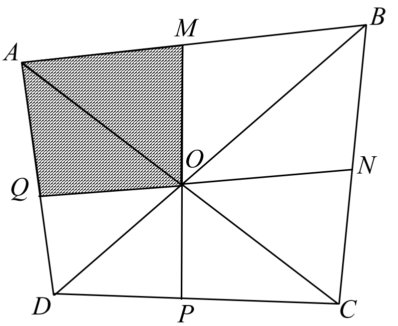
OUTRA SOLUÇÃO: O quadrado *IJKL* e o quadrado *MNOP* têm como lados as hipotenusas dos triângulos retângulos dados, logo têm a mesma área s. Fazendo os dois quadrados coincidirem, concluímos que o dobro da soma t das áreas dos quatro triângulos retângulos é a diferença entre as áreas dos quadrados *IJKL* e *EFGH*, ou seja, $2t = 9^2 - 3^2$, o que fornece $t = 36$.. Assim, $s = 9 + 36 = 81 - 36 = 45$ cm^2 e o lado do quadrado IJKL é $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm.

03. Olhando para o último número da fila n, vemos que ele é a soma de todos os números de 1 a n: por exemplo, na fila 4, o último número da fila é 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Note que para obter a quantidade de números até uma certa fila, basta somar o número da fila ao total de números que havia antes dessa fila. Assim, temos, fila 5 : 15, fila 6: 21, fila 7: 28, fila 8: 36, fila 9: 45, fila 10: 55, fila 11: 66, fila 12: 78, fila 13: 91, fila 14: 105
O número de fitas adesivas horizontais entre uma fila $n - 1$ e uma fila n é igual a $n - 1$ e o número de fitas adesivas verticais numa fila n é igual $n - 1$. Portanto, até a fila número 14, o número de fitas é $(1 + 2 + \cdots + 13) + (1 + 2 + \cdots + 13) = 2 \cdot \frac{13 \cdot 14}{2} = \mathbf{182.}$

04. Primeira Solução: Unindo os pontos médios de lados consecutivos do quadrilátero, obtemos segmentos paralelos às suas diagonais e iguais à metade delas. Portanto, o quadrilátero assim obtido é um paralelogramo. Os segmentos traçados dividem cada um dos quatro lotes em duas partes. Todas as partes internas têm a mesma área s, igual a 1/4 da área do paralelogramo. Cada uma das partes externas tem área igual a 1/4 do triângulo determinado pela diagonal correspondente. Assim, $a + c$ é igual à metade da área do quadrilátero, o mesmo ocorrendo com $b + c$. Daí, $a + s + c + s = b + s + d + s$. Portanto, a área S desconhecida satisfaz $S + 210 = 200 + 250$, ou seja, $S =$ **240**.



Segunda Solução: Ligando o ponto de interseção das retas que representam as duas cercas aos vértices, obtemos:



Observemos que, como $AQ = QD$ e as alturas de OAQ e OQD que passam por O são iguais, as áreas de OAQ e OQD são iguais.
Analogamente, as áreas de OAM e OMB; OBN e ONC; OCP e OPD são iguais. Logo área OAQ + área OAM + área OCP + área ONC = área OQD + área OMB + área OPD + área OBN $\Leftrightarrow$ área $AMOQ$ + área $CNOP$ = área $DPOQ$ + área $BMON$ $\Leftrightarrow$ área $AMOQ = 200 + 250 - 210 = 240$.

05. Como a + 3 é múltiplo de 11, a + 3 = 11b, b $\in$ Z. Sendo a múltiplo de 5, $a-10b=b-3$ também é, de modo que b – 3 = $5c \Leftrightarrow b=5c+3 \Leftrightarrow a=11(5c+3)-3=55c+30,\ c\in\mathbb{Z}_{+2}$ O número a + 2 é múltiplo de 9, assim como a + 2 – 54c – 36 = c – 4. Portanto $c-4=9d \Leftrightarrow c=9d+4 \Leftrightarrow a=55(9d+4)+30=495d+250,\ d\in\mathbb{Z}.$ Por fim, sendo a + 1 múltiplo de 7, então a + 1 – 497d – 245 = a + 1 – 7 (71d + 35) = –2d + 6 = –2(d – 3) também é, ou seja, $d-3=7k \Leftrightarrow d=7k+3, k\in\mathbb{Z}$ e $a=495(7k+3)+250=3465t+1735$ Logo o menor valor de a é **1735.**

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Vamos representar por A, G e L a quantidade de questões de Álgebra, Geometria e Lógica da Prova e por a, g e l as questões respondidas acertadamente em cada uma destas áreas. As condições do problema fornecem as seguintes equações:

$$\frac{a}{A}=0,5;\quad \frac{g}{G}=0,7;\quad \frac{l}{L}=0,8;\quad \frac{a+l}{A+L}=0,62;\quad \frac{g+l}{G+L}=0,74$$

Substituindo as relações expressas pelas três primeiras equações nas outras duas, obtemos:

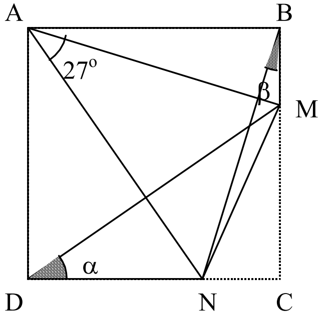
$$\frac{0,5A+0,8L}{A+L}=0,62 \Rightarrow 0,12A=0,18L \Rightarrow A=\frac{3L}{2}$$
$$\frac{0,7G+0,8L}{G+L}=0,74 \Rightarrow 0,04G=0,06L \Rightarrow G=\frac{3L}{2}$$

A porcentagem de questões acertadas é:

$$\frac{a+g+l}{A+G+L}=\frac{0,5A+0,7G+0,8L}{A+G+L}=\frac{0,5.\frac{3}{2}L+0,7.\frac{3}{2}L+0,8L}{\frac{3}{2}L+\frac{3}{2}L+L}=\frac{2,6}{4}=0,65=65\%$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Vamos denotar por A, B, C e D os vértices do quadrado e por MN o corte efetuado. Como $CM + CN = BC = CD$, resulta que $BM = CN$ e $DN = MC$. Em conseqüência, os triângulos ADN e DCM são congruentes, o mesmo ocorrendo com ABM e BCN (em cada caso, os triângulos são retângulos e possuem catetos iguais). Logo, $D\hat{A}N = CDM = \alpha$ e $B\hat{A}M = CBN = \beta$. Assim, $\alpha + \beta + 27^\circ = 90^\circ$ e $\alpha + \beta = 63^\circ$.



SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

a) $x^2 - 9xy + 8y^2 = x^2 - xy - 8xy + 8y^2 = x(x - y) - 8y\,(x - y) = (x - 8y)(x - y)$.

Alternativamente, as raízes da equação do 2º grau $x^2 - 9xy + 8y^2$, de incógnita x, são y e $8y$. Logo, $x^2 - 9xy + 8y^2$ fatora em $(x - 8y)(x - y)$.

b) A equação a ser resolvida é $(x - y)(8y - x) = 2005$ (*)

Observemos que a fatoração em primos de 2005 é $5 \cdot 401$.

Além disso, a soma dos fatores $x - y$ e $8y - x$ é $7y$, que é múltiplo de 7. A soma dos fatores é ± 406, sendo que somente ± 406 é múltiplo de 7. Assim,

$$(*)\left|\begin{array}{c} x-y=5 \text{ e } 8y-x=401 \\ \text{ou} \\ x-y=401 \text{ e } 8y-x=5 \\ \text{ou} \\ x-y=-5 \text{ e } 8y-x=-401 \\ \text{ou} \\ x-y=-401 \text{ e } 8y-x=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} x=63 \text{ e } y=58 \\ \text{ou} \\ x=459 \text{ e } y=58 \\ \text{ou} \\ x=-63 \text{ e } y=-58 \\ \text{ou} \\ x=-459 \text{ e } y=-58 \end{array}\right.$$

As soluções são, portanto, (63; 58), (459;58), (–63; –58) e (–459; –58).

OUTRA SOLUÇÃO:

Observando a equação dada como uma equação do segundo grau em x, obtemos

$x^2 - 9yx + 8y^2 + 2005 = 0$ (*),

cujo discriminante é

$\Delta = (9y)^2 - 4(8y^2 + 2005) = 49y^2 - 8020$

Para que (*) admita soluções inteiras, seu discriminante deve ser um quadrado perfeito; portanto

$49y^2 - 8020 = m^2 \Leftrightarrow (7y - m)(7y + m) = 8020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 401$ (**)

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $m \geq 0$, pois se $(m; y)$ é solução de (**), então $(-m; y)$ também é. Observando também que $7y - m$ e $7y + m$ têm a mesma paridade e $y - m \leq 7y + m$, então podemos dividir o problema em 4 casos:

- $7y - m = 2$ e $7y + m = 4010 \Leftrightarrow m = 2004$ e $y = 2006/7$, impossível;
- $7y - m = 10$ e $7y + m = 802 \Leftrightarrow m = 396$ e $y = 58$;
- $7y - m = -802$ e $7y + m = -10 \Leftrightarrow m = 396$ e $y = -58$;
- $7y - m = -4010$ e $7y + m = -2 \Leftrightarrow m = 2004$ e $y = -2006/7$, impossível.

Se $y = 58$, as soluções em x de (*) são $\frac{9y+m}{2} = \frac{9 \cdot 58 + 396}{2} = 459$ e $\frac{9y-m}{2} = \frac{9 \cdot 58 - 396}{2} = 63$.

Se $y = -58$, as soluções em x de (*) são $\frac{9y+m}{2} = \frac{9 \cdot (-58) + 396}{2} = -63$ e $\frac{9y-m}{2} = \frac{9 \cdot (-58) - 396}{2} = -459$.

Logo as soluções são (63 ; 58), (459 ; 58), (– 63 ; – 58) e (– 459 ; – 58).

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Veja a solução do problema No. 3 do Nível 1 parte B

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte A

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	12	1735	240	2011	2

01 . Primeiro observamos que os ângulos internos de um pentágono regular medem $\frac{(5-2)\cdot 180°}{5} = 108°$.

Como *AF* = *AE* = *AB*, o triângulo *ABF* é isósceles com $m(A\hat{B}F) = m(A\hat{F}B) = \frac{180° - m(B\hat{A}F)}{2} = \frac{180° - m(B\hat{A}E) - m(E\hat{A}F)}{2} = \frac{180° - 108° - 60°}{2} = 6°$

.

No triângulo *PEF*, $m(E\hat{F}P) = m(A\hat{F}E) - m(A\hat{F}B) = 60° - 6° = 54°$ e $m(E\hat{P}F) = 180° - m(P\hat{E}F) - m(E\hat{F}P) = 180° - 60° - 12° - 54° = 54°$, ou seja, o triângulo *PEF* é isósceles com *PE* = *EF*. Assim, como *EF* = *AE*, o triângulo *PEA* também é isósceles com

$m(P\hat{A}E) = m(E\hat{P}A) = \frac{180° - m(P\hat{E}A)}{2} = \frac{180° - 12°}{2} = 84°.$

Além disso, $m(C\hat{A}B) = \frac{180° - m(A\hat{B}C)}{2} = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$ e

$m(C\hat{A}E) = m(B\hat{A}E) - m(C\hat{A}B) = 108° - 36° = 72°.$

Logo, $m(P\hat{A}C) = m(P\hat{A}E) - m(C\hat{A}E) = 84° - 72° = 12°.$

02. PRIMEIRA SOLUÇÃO:

Como a + 3 é múltiplo de 11, a + 3 = 11b, $b \in \mathbb{Z}$. Sendo a múltiplo de 5, $a - 10b = b - 3$ também é, de modo que b – 3 = $5c \Leftrightarrow b = 5c + 3 \Leftrightarrow a = 11(5c+3) - 3 = 55c + 30,\ c \in \mathbb{Z}$

O número a + 2 é múltiplo de 9, assim como a + 2 – 54c – 36 = c – 4. Portanto $c - 4 = 9d \Leftrightarrow c = 9d + 4 \Leftrightarrow a = 55(9d+4) + 30 = 495d + 250,\ d \in \mathbb{Z}.$

Por fim, sendo a + 1 múltiplo de 7, então a + 1 – 497d – 245 = a + 1 – 7 (71d + 35) = –2d + 6 =

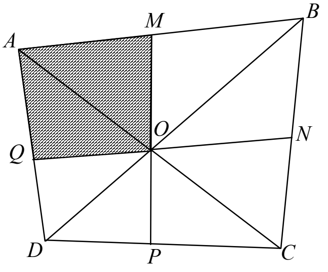
–2(d – 3) também é, ou seja, d – 3 = 7k $\Leftrightarrow d = 7k + 3, k \in \mathbb{Z}$ e

$a = 495(7k+3) + 250 = 3465t + 1735.$ Logo o menor valor de a é 1735.

SEGUNDA SOLUÇÃO:

As condições do problema equivalem a dizer que $2a - 5 = 2(a+1) - 7 = 2(a+2) - 9 = 2(a+3) - 11$ é múltiplo de 5, 7, 9 e 11, donde é múltiplo de $5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = 3465.$ Assim, o menor valor de a é tal que $2a - 5 = 3465$, ou seja, a = 1735.

03. Ligando o ponto de interseção das retas que representam as duas cercas aos vértices, obtemos:



Observemos que, como $AQ = QD$ e as alturas de OAQ e OQD que passam por O são iguais, as áreas de OAQ e OQD são iguais.

Analogamente, as áreas de OAM e OMB; OBN e ONC; OCP e OPD são iguais. Logo área OAQ + área OAM + área OCP + área ONC = área OQD + área OMB + área OPD + área OBN $\Leftrightarrow$ área $AMOQ$ + área $CNOP$ = área $DPOQ$ + área $BMON$ $\Leftrightarrow$ área $AMOQ = 200 + 250 - 210 = 240$.

04. Substituindo y por 2 e x por $a - f(2) = a - 8$, obtemos $f(a - f(2) + f(2)) = a - 8 + f(f(2)) \Leftrightarrow f(a) = a - 8 + f(8)$.

Substituindo a por 2 na última equação, obtemos $f(2) = 2 - 8 + f(8) \Leftrightarrow 8 = 2 - 8 + f(8) \Leftrightarrow f(8) = 14$. Assim $f(a) = a - 8 + 14 = a + 6$ e $f(2005) = 2005 + 6 = 2011$.

05. A idéia da solução é perguntar o valor numérico de $p(k)$ para k suficientemente grande. Suponha que o polinômio seja: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, com $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ inteiros positivos. Se k é um inteiro, tal que: $k > M = máx\ \{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0\}$, então $p(k)$ é um inteiro, cujos dígitos na representação em base k são exatamente os coeficientes do polinômio $p(x)$. Podemos então tomar k igual a uma potência de 10 suficientemente grande.

Logo para resolver o problema, basta perguntarmos o valor de $p(1)$, assim obtemos uma cota superior para M, e então perguntamos o valor de $p(x)$ para x igual a uma potência de 10 maior do que $p(1)$. Portanto, o número mínimo de perguntas que devemos fazer, para garantir que o polinômio $p(x)$ seja determinado sem sombra de dúvidas, é 2.

Por exemplo: Se $p(1) = 29$, perguntamos $p(100)$, digamos que $p(100) = 100613$. Então o nosso polinômio é $p(x) = 10x^2 + 6x + 13$.

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Temos $9xy - x^2 - 8y^2 = 2005 \Leftrightarrow xy - x^2 + 8xy - 8y^2 = 2005$

$\Leftrightarrow x(y-x) + 8y(x-y) = 2005 \Leftrightarrow (x-y)(8y-x) = 2005(*)$

Observemos que a fatoração em primos de 2005 é $5 \cdot 401$.

Além disso, a soma dos fatores $x - y$ e $8y - x$ é $7y$, que é múltiplo de 7. Devemos então escrever 2005 como produto de dois fatores, cuja soma é um múltiplo de 7. Para isso, os fatores devem ser ± 5 e ± 401. A soma dos fatores é ± 406.

$$(*)\left|\begin{array}{l} x-y=5 \text{ e } 8y-x=401 \\ \qquad\text{ou} \\ x-y=401 \text{ e } 8y-x=5 \\ \qquad\text{ou} \\ x-y=-5 \text{ e } 8y-x=-401 \\ \qquad\text{ou} \\ x-y=-401 \text{ e } 8y-x=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=63 \text{ e } y=58 \\ \qquad\text{ou} \\ x=459 \text{ e } y=58 \\ \qquad\text{ou} \\ x=-63 \text{ e } y=-58 \\ \qquad\text{ou} \\ x=-459 \text{ e } y=-58 \end{array}\right.$$

As soluções são, portanto, (63; 58), (459;58), (–63; –58) e (–459; –58).

OUTRA SOLUÇÃO:

Observando a equação dada como uma equação do segundo grau em x, obtemos

$x^2 - 9yx + 8y^2 + 2005 = 0$ (*),

cujo discriminante é

$\Delta = (9y)^2 - 4(8y^2 + 2005) = 49y^2 - 8020$

Para que (*) admita soluções inteiras, seu discriminante deve ser um quadrado perfeito; portanto

$49y^2 - 8020 = m^2 \Leftrightarrow (7y - m)(7y + m) = 8020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 401$ (**)

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $m \geq 0$, pois se $(m; y)$ é solução de (**), então
$(-m; y)$ também é. Observando também que $7y - m$ e $7y + m$ têm a mesma paridade e
$7y - m \leq 7y + m$, podemos dividir o problema em 4 casos:

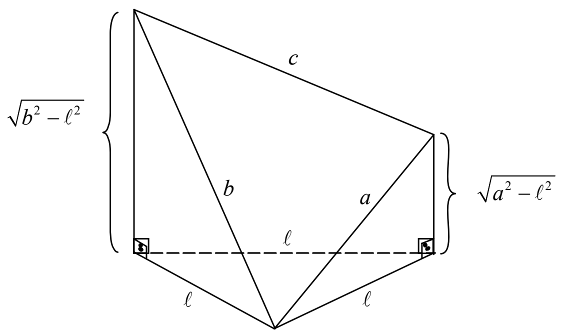
- $7y - m = 2$ e $7y + m = 4010 \Leftrightarrow m = 2004$ e $y = 2006/7$, impossível;
- $7y - m = 10$ e $7y + m = 802 \Leftrightarrow m = 396$ e $y = 58$;
- $7y - m = -802$ e $7y + m = -10 \Leftrightarrow m = 396$ e $y = -58$;
- $7y - m = -4010$ e $7y + m = -2 \Leftrightarrow m = 2004$ e $y = -2006/7$, impossível.

Se $y = 58$, as soluções em x de (*) são $\frac{9y+m}{2} = \frac{9\cdot 58+396}{2} = 459$ e $\frac{9y-m}{2} = \frac{9\cdot 58-396}{2} = 63$.

Se $y = -58$, as soluções em x de (*) são $\frac{9y+m}{2} = \frac{9\cdot(-58)+396}{2} = -63$ e $\frac{9y-m}{2} = \frac{9\cdot(-58)-396}{2} = -459$.

Logo as soluções são (63 ; 58), (459 ; 58), (– 63 ; – 58) e (– 459 ; – 58).

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:



Podemos supor, sem perda de generalidade, a configuração acima e, portanto, pelo teorema de Pitágoras:

$$\ell^2 + \left(\sqrt{b^2 - \ell^2} - \sqrt{a^2 - \ell^2}\right)^2 = c^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{\left(b^2 - \ell^2\right)\left(a^2 - \ell^2\right)} = a^2 + b^2 - c^2 - \ell^2 \Leftrightarrow$$

$$4\left(b^2a^2 - b^2\ell^2 - a^2\ell^2 + \ell^4\right) = \ell^4 + a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2\ell^2 - 2b^2\ell^2 + 2c^2\ell^2 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 \Leftrightarrow$$

$$3\ell^4 - 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\ell^2 - (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2) = 0$$

O discriminante da equação do segundo grau acima, em ℓ^2, é

$$\Delta = \left[-2(a^2 + b^2 + c^2)\right]^2 + 4\cdot 3\cdot\left(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2\right) =$$

$$16(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2).$$

Logo $\ell^2 = \dfrac{2(a^2 + b^2 + c^2) \pm \sqrt{16(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2)}}{2\cdot 3} \Leftrightarrow$

$$\ell^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2) \pm 2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}}{3}$$

De fato, observando que ℓ é menor ou igual a min $\{a, b, c\}$, temos $\ell^2 \le \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$. Portanto

$$\ell = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + c^2) - 2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}}{3}}.$$

Observação: Outra maneira de obter as equações é trabalhar em R^3, supondo, sem perda de generalidade, que $C = (0, 0, 0)$, $A = (\ell, 0, h)$ e $B = \left(\dfrac{\ell}{2}, \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}, z\right)$, com $h, z \ge 0$. Obteríamos, então, as equações

$\ell^2 + h^2 = a^2, \ell^2 + z^2 = b^2$ e $\ell^2 + (z-h)^2 = c^2$, que nos leva à mesma equação da solução acima.

Curiosidade: Para o triângulo 3, 4, 5 a medida do lado da projeção que é um triângulo equilátero é aproximadamente e. O erro é de apenas 0,1%.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Primeira Solução:

Seja a_n o número de ordenadas de resultados (sem derrotas), cujo total de pontos seja n. A pergunta do problema é: quanto vale a_{20}?

Para responder a tal pergunta, iremos determinar uma relação recursiva entre os termos dessa seqüência. Pensando no último resultado de uma ordenada de resultados totalizando n pontos, ele pode ser E ou V. Se for E, então retirando o último termo da ordenada, ela passa a totalizar $n - 1$ pontos. Se for V, então ao retiramos o último resultado, a ordenada passa a totalizar $n - 3$ pontos. Disto, concluímos que:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$.

Calculando os valores da seqüência, temos: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 4$, $a_6 = 6$, $a_7 = 9$,

$a_8 = 13$, $a_9 = 19$, $a_{10} = 28$, $a_{11} = 41$, $a_{12} = 60$, $a_{13} = 88$, $a_{14} = 129$, $a_{15} = 189$, $a_{16} = 277$, $a_{17} = 406$, $a_{18} = 595$, $a_{19} = 872$ e $a_{20} = 1278$.

Logo existem 1278 possíveis seqüências ordenadas de resultados que o Flameiras pode ter obtido.

Segunda Solução:

Sejam x e y o número de vitórias e empates do Flameiras, respectivamente. Temos que: $x \geq 0$,

$y \geq 0$ e $3x + y = 20$. Dividindo em 7 possíveis casos:

1º caso: $x = 0$ e $y = 20$: Temos exatamente uma seqüência ordenada de resultados.

2º caso: $x = 1$ e $y = 17$: Uma seqüência ordenada deverá conter exatamente um "V" e 17 "E", portanto o número de seqüências ordenadas é exatamente o número de anagramas da palavra:

"VEEEEEEEEEEEEEEEEE", que é: $(17 + 1)! / (17! \cdot 1!) = 18$.

3º caso: $x = 2$ e $y = 14$: Analogamente ao 2º caso, o número de seqüências ordenadas é igual ao número de anagramas da palavra "VVEEEEEEEEEEEEEE", que é: $(14 + 2)! / (14! \cdot 2!) = 120$.

4º caso: $x = 3$ e $y = 11$: $(11 + 3)! / (11! \cdot 3!) = 364$ seqüências ordenadas.

5º caso: $x = 4$ e $y = 8$: $(8 + 4)! / (8! \cdot 4!) = 495$ seqüências ordenadas.

6º caso: $x = 5$ e $y = 5$: $(5 + 5)! / (5! \cdot 5!) = 252$ seqüências ordenadas.
7º caso: $x = 6$ e $y = 2$: $(2 + 6)! / (2! \cdot 6!) = 28$ seqüências ordenadas.
Temos um total de $1 + 18 + 120 + 364 + 495 + 252 + 28 = 1278$ seqüências ordenadas de resultados possíveis.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:
Seja p, $p + d$, $p + 2d$, $p + 3d$, $p + 4d$, $p + 5d$, $p + 6d$ a progressão aritmética, que podemos supor crescente sem perda de generalidade. Então:

1) $p \neq 2$.

De fato, se $p = 2$, $p + 2d$ é par e maior do que 2 e, portanto, não é primo.

2) d é múltiplo de 2.

Caso contrário, como p é ímpar, $p + d$ seria par e maior do que 2.

3) $p \neq 3$

Senão, teríamos $p + 3d$ múltiplo de 3, maior do que 3.

4) d é múltiplo de 3

Caso contrário, $p + d$ ou $p + 2d$ seria múltiplo de 3 e maior do que 3.

5) $p \neq 5$

Senão teríamos $p + 5d$ múltiplo de 5, maior do que 5.

6) d é múltiplo de 5.

Caso contrário, $p + d$, $p + 2d$, $p + 3d$ ou $p + 4d$ seria múltiplo de 5, maior do que 5.

De 1), 2), 3), 4), 5) e 6), $p \geq 7$ e d é múltiplo de 30.
Se $p = 7$, observando que $187 = 11 \cdot 17$, então $d \geq 120$.
Para $d = 120$, a seqüência é 7, 127, 247, 367, 487, 607, 727 a qual não serve, pois $247 = 13 \cdot 19$.
Para $d = 150$, a seqüência é 7, 157, 307, 457, 607, 757, 907 e satisfaz as condições do problema.

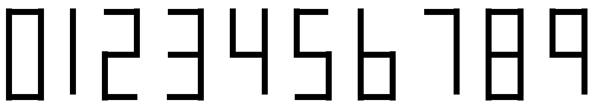
Finalmente, se $p \neq 7$, então d é múltiplo de 210 e o menor último termo possível para tais seqüências é $11 + 6 \cdot 210 = 1271$.
Portanto a resposta é 907.

OLIMPÍADA DE MAYO
PROBLEMAS

Primeiro Nível

Problema 1

Um calendário digital exibe a data: dia, mês e ano, com 2 dígitos para o dia, 2 dígitos para o mês e 2 dígitos para o ano. Por exemplo, 01-01-01 é o primeiro dia de janeiro de 2001 e 25-05-23 é o dia 25 de maio de 2023. Em frente ao calendário há um espelho. Os dígitos do calendário são os mesmos da figura.



Se 0, 1, 2, 5 e 8 refletem-se, respectivamente, em 0, 1, 5, 2 e 8, e os demais dígitos perdem o sentido ao se refletirem, determinar quantos dias do século, ao se refletirem no espelho, também correspondem a uma data.

Problema 2

Um retângulo de papel de 3 *cm* por 9 *cm* é dobrado ao longo de uma reta, fazendo coincidir dois vértices opostos. Desse modo, forma-se um pentágono. Calcular a sua área.

Problema 3

Há 20 pontos alinhados, separados por uma mesma distância:

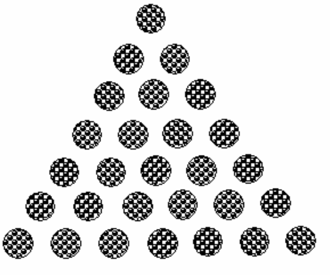
Miguel tem que pintar de vermelho três ou mais desses pontos, de maneira tal que os pontos vermelhos estejam separados pela mesma distância e seja impossível pintar de vermelho exatamente um ponto a mais sem violar a condição anterior. Determinar de quantas maneiras Miguel pode fazer sua tarefa.

Problema 4

Com 150 cubinhos brancos de $1\times1\times1$ monta-se um prisma de $6\times5\times5$, pintam-se suas seis faces de azul e, a seguir, desmonta-se o prisma. Lucrecia deve montar um novo prisma, sem buracos, usando exclusivamente cubinhos que tenham pelo menos uma face azul e de modo que as faces do prisma de Lucrecia sejam todas completamente azuis. Dar as dimensões do prisma de maior volume que Lucrecia pode montar.

Problema 5

Em algumas casas de um tabuleiro 10×10 coloca-se uma ficha de maneira que valha a seguinte propriedade: para cada casa que tenha uma ficha, a quantidade de fichas colocadas na sua mesma linha deve ser maior ou igual à quantidade de fichas colocadas na sua mesma coluna. Quantas fichas pode haver no tabuleiro?
Dar todas as possibilidades.



Segundo Nível

Problema 1

Determinar todos os pares de números naturais a e b tais que $\dfrac{a+1}{b}$ e $\dfrac{b+1}{a}$ são números naturais.

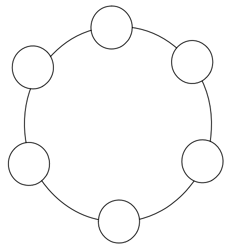
Problema 2

No quadro negro estão escritos vários números primos (alguns repetidos). Mauro somou os números do quadro negro e Fernando multiplicou os números do quadro negro.

O resultado que Fernando obteve é igual a 40 vezes o resultado que Mauro obteve. Determinar quais podem ser os números do quadro negro.
Dar todas as possibilidades.

Problema 3

Escrever um número inteiro positivo em cada casa, de modo que:



- os seis números sejam distintos;
- a soma dos seis números seja 100;
- se multiplicarmos cada número por seu vizinho (no sentido dos ponteiros do relógio) e somarmos os seis resultados das seis multiplicações, obtemos o menor valor possível.

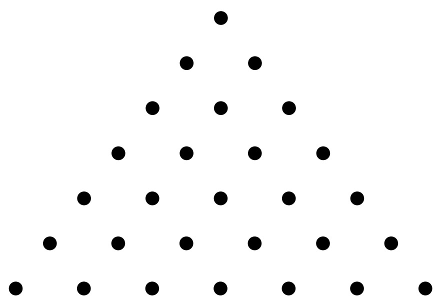
Explicar porque não se pode obter um valor menor.

Problema 4

Seja *ABCD* um trapézio de bases *AB* e *CD*. Seja *O* ponto de interseção de suas diagonais *AC* e *BD*. Se a área do triângulo *ABC* for 150 e a área do triângulo *ACD* for 120, calcular a área do triângulo *BCO*.

Problema 5

Com 28 pontos forma-se uma "grade triangular" de lados iguais, como mostra a gura. Uma operação consiste em escolher três pontos que sejam os vértices de um triângulo eqüilátero e retirar esses três pontos da grade. Se após realizar várias dessas operações resta somente um ponto, que posições este ponto pode ficar?
Dar todas as possibilidades e indicar, em cada caso, as operações realizadas.



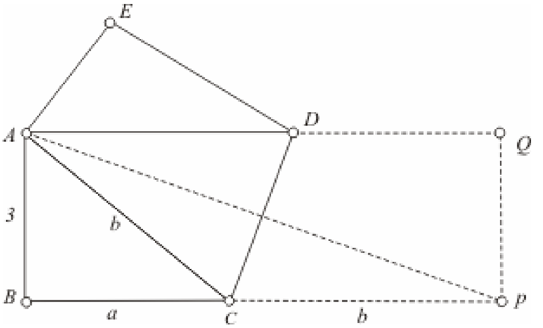
OLIMPÍADA DE MAYO
SOLUÇÕES

Primeiro Nível
Solução do Problema 1

Qualquer combinação de dígitos representa um ano, portanto se um dia tem sentido, ao refletir-se corresponde a um ano. Os dias que se refletem em anos são 14:
01, 02, 05, 08, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 21, 22, 25, 28.
Por outro lado, também são 14 os anos que se refletem em dias (os simétricos da lista anterior):
10, 50, 20, 80, 01, 11, 51, 21, 81, 05, 15, 55, 25, 85.
Os meses que se refletem em meses são 3: 01, 10 e 11.
No total há $14 \cdot 3 \cdot 14 = 588$ datas que se refletem em datas.

Solução do Problema 2

Seja $ABCDE$ o pentágono obtido ao dobrar o papel. A dobra CD é perpendicular à diagonal AP do retângulo e o ponto de interseção de ambas é o centro do retângulo.



Se $BC = a$ e $AC = b$, então $DQ = BC = a$ e $AD = PC = AC = b$, logo $a + b = BP = 9$ e, como o triângulo ABC é retângulo em B, temos $3^2 + a^2 = b^2$, então $9 + a^2 = b^2$, $9 + a^2 = (9 - a)^2$; $9 = 81 - 18a$ e temos $a = 4$ e $b = 5$.

Logo, $\text{área}(ABC) = \text{área}(ADE) = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

Como BC é paralelo a AD, a altura do triângulo ACD traçada de C é igual a AB, logo

$$\text{área}(ACD) = \frac{AD \cdot AB}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}.$$

Finalmente,

$$\text{Área}\left(ABCDE\right) = \text{área}\left(ABC\right) + \text{área}\left(ACD\right) + \text{área}\left(ADE\right) = 2 \cdot 6 + \frac{15}{2} = \frac{39}{2}.$$

Solução do Problema 3

Solução I

Numeramos os pontos da esquerda para a direita, de 1 a 20. Se d for a distância entre os pontos vermelhos consecutivos, o primeiro ponto vermelho é menor ou igual a d (para que não se possa agregar um ponto vermelho antes). Por outro lado, se o primeiro ponto vermelho for x, também serão vermelhos $x + d$ e $x + 2d$, de modo que $1 + 2d \le 20$, e teremos $1 \le d \le 9$. Além disso, para as distâncias d menores ou iguais a 6 há d maneiras de escolher os pontos, o primeiro ponto tem que ser menor ou igual a $20 - 2d$, para que possamos marcar ao menos três pontos; e há $20 - 2d$ escolhas para cada d entre 7 e 9. No total são:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + (20 - 14) + (20 - 16) + (20 - 18) = 33$ possibilidades.

Solução II

Com separação 1 há só 1 distribuição: pintar os 20 pontos de vermelho.

Com separação 2 há 2 distribuições: pintar os ímpares (1, 3, 5, ..., 19) ou pintar os pares (2, 4, 6, ..., 20).

Com separação 3 há 3 distribuições: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19; 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 e 3, 6, 9, 12, 15, 18.

Com separação 4 há 4 distribuições: começando com 1, com 2, com 3 ou com 4.

Com separação 5 há 5 distribuições: começando com 1, com 2, com 3, com 4 ou com 5.

Com separação 6 há 6 distribuições: começando com 1, com 2, com 3, com 4, com 5 ou com 6.

Com separação 7 há 6 distribuições: 1, 8, 15; 2, 9, 16; 3, 10, 17; 4, 11, 18; 5, 12, 19 e 6, 13, 20.

Com separação 8 há 4 distribuições: 1, 9, 17; 2, 10, 18; 3, 11, 19 e 4, 12, 20.

Com separação 9 há 2 distribuições: 1, 10, 19 e 2, 11, 20.

No total são $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6 + 4 + 2 = 33$ escolhas possíveis para os pontos vermelhos.

Solução do Problema 4

O prisma de $6\times5\times5$ pintado de azul contém $4\cdot3\cdot3=36$ cubinhos completamente brancos, que são os que formam um prisma de $4\times3\times3$ no centro do prisma inicial. Os restantes 150 – 36 = 114 cubinhos têm pelo menos uma face azul. Os 8 cubinhos dos vértices têm exatamente 3 faces azuis (concorrentes); os cubinhos das arestas, exceto os 8 que contêm os vértices, têm exatamente duas faces azuis (adjacentes). Desses cubinhos, há 4 em cada aresta de comprimento 6 e 3 em cada aresta de comprimento 5, de modo que o prisma inicial tem $4\cdot4+8\cdot3=40$ cubinhos com 2 faces azuis.

Os restantes 114 – 8 – 40 = 66 cubinhos têm exatamente 1 face azul.

Não é possível que uma dimensão seja 1, porque para isso seriam necessários cubinhos com 2 faces opostas azuis, o que não ocorre com nenhum dos 114 disponíveis.

Vejamos que Lucrecia não pode usar em seu prisma os 114 cubinhos disponíveis. Com efeito, como $114=2\cdot3\cdot19$, qualquer prisma que se forme com todos os 114 cubinhos terá uma de suas dimensões igual a 19 ou um múltiplo de 19. Como conseqüência, haverá 4 arestas de comprimento maior ou igual a 19. Essas 4 arestas requerem, cada uma, pelo menos 17 cubinhos com dois lados adjacentes azuis, o que faz um total de $17\cdot4=68$ desses cubinhos, número que excede os 40 disponíveis. Portanto, não é possível usar 114 cubinhos.

Se descartarmos somente um cubinho, restam 113, e como 113 é um número primo, o único prisma que se forma com 113 cubinhos é de $1\times1\times113$, que não é possível. Logo, Lucrecia deve descartar pelo menos 2 cubinhos.

Vemos que com $112=2^4\cdot7$ cubinhos é possível montar um prisma azul de $4\times4\times7$. Nos vértices temos os 8 cubinhos de 3 faces azuis concorrentes. Nas 8 arestas de comprimento 4, colocamos 16 cubinhos de 2 faces adjacentes azuis e, nas 4 arestas de comprimento 7, colocamos 20 desses cubinhos. Usam-se no total 36 cubinhos de duas faces azuis (temos 40). Para completar o prisma só precisamos cuidar que todos os cubinhos das faces tenham uma face azul à vista.

(Esse é o único prisma azul que se pode montar com 112 cubinhos).

Solução do Problema 5

Seja N a quantidade de fichas do tabuleiro. Demonstraremos que N pode ser qualquer valor de 0 até $10 \cdot 9 = 90$, além de 10^2.

Em primeiro lugar, veremos que N pode ser qualquer valor inteiro nos intervalos da forma $[10k, 10(k+1)]$, $0 \leq k \leq 8$.

Se $N = 10k$, colocamos fichas em todas as casas de k linhas.

Se $N = 10k + p$, $1 \leq p \leq 9 - k$, também podemos escrever N como $9k + (k + p)$. Logo, podemos distribuir as fichas em um retângulo $k \times 9$ completo e $(k + p)$ fichas em outra linha, da seguinte maneira:

♥	♥	♥	...	♥	...	♥	
♥	♥	♥	...	♥	...	♥	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
♥	♥	♥	...	♥	...	♥	
♥	♥	♥	...	♥	...		
			...		...		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
			...		...		

Se $N = 10k + p$, $(9 - k) < p \leq 9$, também podemos escrever como

$N = 10(p + k - 9) + 9(10 - p)$.

Logo, podemos distribuir as fichas em dois retângulos, um $(p + k - 9) \times 10$ e outro $(10 - p) \times 9$.

♥	♥	♥	...	♥	...	♥	♥
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
♥	♥	♥	...	♥	...	♥	♥
♥	♥	♥	...	♥	...	♥	
⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	
♥	♥	♥	...	♥	...	♥	...
			...		...		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
			...		...		

Em todos os casos, cada ficha tem na sua linha igual ou maior quantidade de fichas do que na sua coluna.

A união de todos os intervalos descritos anteriormente permite obter todos os valores de N de 1 até $10 \cdot 9 = 90$. Ademais, trivialmente, vale a propriedade quando o tabuleiro está totalmente vazio ou totalmente preenchido.

Por outro lado, se $10 \cdot 9 < N < 10^2$, há menos de 10 casas vazias. Logo, existe pelo menos uma coluna com fichas em todas as suas casas. Então uma ficha, situada na interseção dessa coluna e alguma linha com alguma casa vazia, não tem a propriedade requerida.

Finalmente, N só pode tomar os valores: 0, 1, 2,..., 88, 89, 90, 100.

Segundo Nível

Solução do Problema 1

Como $\frac{a+1}{b}$ e $\frac{b+1}{a}$ são números naturais, devemos ter $b \le a+1$ e $a \le b+1$. Então $a \le b+1 \le a+2$.

Analisaremos as três possibilidades

$$b+1 = a, \; b+1 = a+1, \; b+1 = a+2.$$

Se $b+1 = a$,

$$\frac{a+1}{b} = \frac{b+2}{b} = 1 + \frac{2}{b}.$$

Esse número é inteiro se, e somente se, b = 1 ou b = 2. Os valores correspondentes de a são, respectivamente, a = 2 ou a = 3.

Se $b+1 = a+1$,

$$\frac{a+1}{b} = \frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a}.$$

Esse número é inteiro se, e somente se, a = 1, e então b = 1.

Se $b+1 = a+2$,

$$\frac{b+1}{a} = \frac{a+2}{a} = 1 + \frac{2}{a}.$$

Esse número é inteiro se, somente se, a = 1 ou a = 2, e os valores correspondentes de b são, respectivamente, b = 2 e b = 3.

Os únicos pares possíveis são:

1 e 1, 1 e 2, 2 e 1, 2 e 3, 3 e 2.

Solução do Problema 2

Solução I

Como o produto dos primos é múltiplo de 40, entre os primos há pelo menos três 2 e um 5 (pois $40 = 2^3 \cdot 5$). Além disso, esses não são os únicos primos que há, pois $40(2+2+2+5) > 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$. Seja q o maior dos primos restantes; denotemos, por S a soma e P o produto dos primos restantes, sem contar q nem os três 2 nem o 5. Então,

$$40(2+2+2+5+q+S) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot q \cdot P \text{, ou seja,}$$

$$11 + q + S = q \cdot P \qquad (1)$$

Como o produto de um ou mais números maiores do que 1 é maior ou igual à sua soma, temos que $P \geq S$, conseqüentemente,

$$11 + q + S \geq q \cdot S.$$

Essa igualdade equivale a

$$12 \geq q \cdot S - q - S + 1 = (q-1)(S-1).$$

Portanto, $q - 1 \leq 12$, e os valores possíveis de q são 13, 11, 7, 5, 3, 2.

Se q = 13, então a única possibilidade para S é S = 2. Nesse caso, os novos primos são 2 e 13, logo q = 13 e P = 2 e, efetivamente, $11 + 13 + 2 = 13 \cdot 2$.

Se q = 11, novamente, a única possibilidade para S é S = 2. Nesse caso, os novos primos são 2 e 11, logo q = 11 e P = 2, porém $11 + 11 + 2 \neq 11 \cdot 2$.

Se q = 7, as possibilidades para S são S = 2 e S = 3. No primeiro caso, os novos primos são 2 e 7, q = 7 e P = 2, logo $11 + 7 + 2 \neq 7 \cdot 2$ e não é solução. No segundo caso, os novos primos são 3 e 7, q = 7 e P = 3 e, efetivamente, $11 + 7 + 3 = 7 \cdot 3$.

Se q = 5, as possibilidades para S são S = 2, S = 3, S = 4. No primeiro caso, os novos primos são 2 e 5, q = 5 e P = 2; temos $11 + 5 + 2 \neq 5 \cdot 2$ e não é solução. No segundo caso, os novos primos são 3 e 5, logo q = 5 e P = 3. Como $11 + 5 + 3 \neq 5 \cdot 3$, não é solução. No terceiro caso, os novos primos são 2, 2 e 5, q = 5 e P = 4, e verificamos que $11 + 5 + 4 = 5 \cdot 4$.

Se $q = 3$, as possibilidades para S são 2, 3, 4, 5, 6 e 7, e os novos primos só podem ser 2 e 3, pois são menores ou iguais a 3. A equação (1) é $11+3+S=14+S=3\cdot P$. Logo, $14+S$ deve ser múltiplo de 3. Dos possíveis valores de $14+S$, os únicos múltiplos de 3 são 14 + 4 = 18 e 14 + 7 = 21. Se $S = 4$, então os novos primos são 2, 2 e 3, $q = 3$ e $P = 4$. Como $14+4\neq 3\cdot 4$, não é solução; se $S = 7$, os novos primos são 2, 2, 3 e 3, $q = 3$ e $P = 12$. Como $14+7\neq 3\cdot 12$, tão pouco é solução. Portanto, descarta-se a possibilidade $q = 3$.

Se $q = 2$, os novos primos só podem ser iguais a 2. Então, S é par, $11+q+S=11+2+S$ é ímpar, enquanto que $q\cdot P=2\cdot P$ é par. Portanto, nesse caso não há solução.

No total há três possibilidades para os números do quadro negro:

2, 2, 2, 2, 5, 13;   2, 2, 2, 3, 5, 7   e   2, 2, 2, 2, 2, 5, 5.

Solução II

Como o produto dos primos é múltiplo de 40, entre os primos há pelo menos três 2 e um 5 (pois $40=2^3\cdot 5$). Além disso, esses não são os únicos primos que há, pois $40(2+2+2+5)>2\cdot 2\cdot 2\cdot 5$.

Se além de 2, 2, 2 e 5 há um primo a mais, digamos p, então $40(2+2+2+5+p)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot p$, ou seja, $11+p=p$, o que é impossível.

Se além de 2, 2, 2 e 5 há dois primos a mais, digamos p e q, $p \leq q$, então $40(2+2+2+5+p+q)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot p\cdot q$, ou seja, $11+p+q=p\cdot q$.

Essa equação é equivalente a

$$12=p\cdot q-p-q+1=(p-1)(q-1).$$

Como p e q são primos e $p\leq q$, as únicas possibilidades são

$$p = 2 \text{ e } q = 13; p = 3 \text{ e } q = 7.$$

Se além de 2, 2, 2 e 5 há três primos a mais, $p\leq q\leq r$, então $40(2+2+2+5+p+q+r)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot p\cdot q\cdot r$, ou seja,

$$11+p+q+r=p\cdot q\cdot r.$$

Se $p = 2$, temos que $p\cdot q\cdot r = 2\cdot q\cdot r$ é par, então $11 + p + q + r = 11 + 2 + q + r$ é par e, conseqüentemente, $q = 2$ (é par) e $r \geq 3$ (é ímpar). Logo, a equação inicial é $4r=15+r$, donde $r = 5$. Obtemos $p = 2$, $q = 2$ e $r = 5$.

Se $p \geq 3$, então p é ímpar. Logo, p, q e r são ímpares, de modo que o produto $p \cdot q \cdot r$ é ímpar. Como $11 + p + q + r$ é par (soma de 4 ímpares), não há soluções.

Se além de 2, 2, 2 e 5 há quatro primos a mais, $p \leq q \leq r \leq s$, então $40(2+2+2+5+p+q+r+s) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot p \cdot q \cdot r \cdot s$, ou seja,

$$11 + p + q + r + s = p \cdot q \cdot r \cdot s .$$

Se $p = 2$, temos que $2 \cdot q \cdot r \cdot s = 11 + 2 + q + r + s = 13 + q + r + s$. Como esse número é par, q, r e s são ímpares, de modo que $q \geq 3$ e, conseqüentemente,

$$2 \cdot q \cdot r \cdot s = q \cdot r \cdot s + q \cdot r \cdot s \geq 27 + q \cdot r \cdot s .$$

Como o produto de um ou mais números maiores do que 1 é maior ou igual à sua soma, temos que $q \cdot r \cdot s \geq q + r + s$ e, conseqüentemente, $2 \cdot q \cdot r \cdot s > 13 + q + r + s$, de modo que não há soluções.

Se $p \geq 3$, então,

$$pqrs \geq 3qrs = qrs + 2qrs \geq qrs + q + r + s + q + r + s > 11 + p + q + r + s ,$$

pois $qrs \geq 27$ e $q + r + s + q + r + s > p + q + r + s$.

Por último, é impossível que além de 2, 2, 2 e 5 haja cinco ou mais primos.

Com efeito, nesse caso a equação é

$40(2+2+2+5+p_1+\cdots+p_n) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$, com $p_1 \leq \cdots \leq p_n$ primos, $n \geq 5$. Simplificando, temos $11 + p_1 + \cdots + p_n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$.

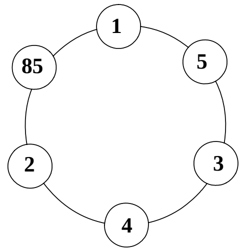
Dividimos ambos os membros pelo maior dos primos, p_n, então

$$\frac{11}{p_n} + \frac{p_1}{p_n} + \cdots + \frac{p_n}{p_n} = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}$$

O lado esquerdo é no máximo $5+n$, enquanto que o lado direito é maior ou igual a 2^{n-1}.

De modo que, para que existam esses n primos devemos ter $2^{n-1} \leq 5 + n$, que é impossível se $n \geq 5$.

Solução do Problema 3



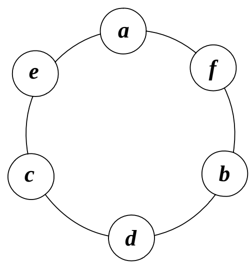
A resposta é a dada pela figura ao lado ou suas simetrias e rotações. O resultado é

$85+2\cdot 85+4\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 3+5=295$

Vamos justificar que este é o menor valor possível. Sejam $a > b > c > d > e > f$, os seis números em ordem decrescente.

Se a soma é mínima, os vizinhos de a são e e f (os vizinhos do maior são os menores).

Com efeito, se f não é vizinho de a, percorremos os números, de um ao seu vizinho, até encontrar f, e logo fazemos uma espécie de reflexão: substituímos a seqüência $x, \ldots, f$ por sua oposta, $f, \ldots, x$. Aqui x é o vizinho de a e os pontos anteriores são os números percorridos até encontrar f. Se refazemos a conta de multiplicar cada número por seu vizinho e somamos os seis produtos, os únicos produtos que mudam são ax e fy (y é o vizinho de f), que se substituem por af e xy. Como $ax + fy > af + xy$, pois é equivalente a $a(x-f) > y(x-f)$, que é verdadeira, em virtude da ordem dos números $a, \ldots, f$, então a soma diminui.



Analogamente, o outro vizinho de a deve ser e. Repetindo esse argumento, chega-se que uma vez escolhidos os seis números, a ordem relativa que produz a menor soma é a da figura ao lado.

Agora vejamos quais são os números. Como são distintos e somam 100, o maior valor possível de a é $85 = 100 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$.

Verifiquemos que 85, 5, 4, 3, 2, 1 são os números com os quais se obtém o mínimo. De fato, se $a = 85 - t$, então $b = 5 + i$, $c = 4 + j$, $d = 3 + h$, $e = 2 + k$, $f = 1 + \ell$ com i, j, h, k, ℓ inteiros não-negativos, já que $1 \le f$, $2 \le e$, $3 \le d$, $4 \le c$, $5 \le b$, pois são números distintos, e $i + j + h + k + \ell = t$.

A nova soma é:

$$(85-t)(1+\ell)+(85-t)(2+k)+(5+i)(1+\ell)+(5+i)(3+h)+(4+j)(2+k)+(3+h)(4+j)=$$

$$85+2\cdot 85+5+5\cdot 3+4\cdot 2+3\cdot 4+85\ell-t\ell-t+85k-2t-tk+5\ell+i+i\ell+5h+3i+ih+4k+2j+$$

$jk+3j+4h+jh=295+87\ell+i+86k+2j+6h+i\ell+ih+jk+jh-t\ell-tk$

(usamos que $-3t=-3(i+j+h+k+\ell)$).

Como $87\ell \geq t\ell$ e $86k \geq tk$, a expressão é maior do que 295.

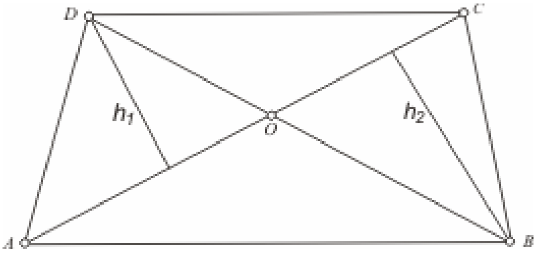
Solução do Problema 4

Solução I

Os triângulos ACD e BCD têm área igual, pois os vértices A e B pertencem a uma reta paralela ao lado comum CD. Conseqüentemente, os triângulos ADO e BCO têm área igual e a área do triângulo OCD é comum.

Chamemos S_1 a área do triângulo AOB, S_2 a área dos triângulos BOC e ADO, e S_3 a área do triângulo OCD.

Se h_1 for a altura dos triângulos ADO e COD, traçada de D, temos:



$$\frac{S_2}{S_3}=\frac{\frac{1}{2}AO\cdot h_1}{\frac{1}{2}CO\cdot h_1}=\frac{AO}{CO}.$$

Analogamente,

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}AO\cdot h_2}{\frac{1}{2}CO\cdot h_2}=\frac{AO}{CO}.$$

Portanto, $S_2^2=S_1S_3$. (1)

Como $S_1+S_2=150$ e $S_2+S_3=120$, temos $S_1=150-S_2$ e $S_3=120-S_2$.

Substituindo esses valores em (1):

$$S_2^2=(150-S_2)(120-S_2)=150\cdot 120-150S_2-120S_2+S_2^2,$$

Obtemos $S_2=\dfrac{150\cdot 120}{270}=\dfrac{200}{3}$.

Solução II

Os triângulos ACD e BCD têm área igual, pois os vértices A e B pertencem a uma reta paralela ao lado comum CD. Então, área(BCD) = 120.

Sejam h_1 e h_2 as alturas dos triângulos ACD e ABC correspondentes à base AC. Então,

área(ACD) = $\dfrac{AC\cdot h_1}{2}$ e área(ABC) $=\dfrac{AC\cdot h_2}{2}$.

Conseqüentemente, $\dfrac{h_2}{h_1}=\dfrac{150}{120}=\dfrac{5}{4}$.

Os triângulos BOC e COD têm a mesma base OC e as alturas correspondentes a essa base são, respectivamente, h_2 e h_1, logo

área(BOC) = $\dfrac{OC\cdot h_2}{2}$ e área(COD) $=\dfrac{OC\cdot h_1}{2}$.

Então, $\frac{\text{área}(\text{BOC})}{\text{área}(\text{COD})}=\dfrac{h_2}{h_1}=\dfrac{5}{4}$. Como a união dos triângulos BOC e COD é o triângulo BCD, da relação anterior, obtemos que:

$$\text{área}(BOC) = \frac{5}{9}\,\text{área}(BCD) = \frac{5}{9}\cdot 120=\frac{200}{3}.$$

Solução do Problema 5

```
            0
          1   2
        2   0   1
      0   1   2   0
    1   2   0   1   2
  2   0   1   2   0   1
0   1   2   0   1   2   0
```

Etiquetamos cada ponto com um 0, um 1 ou um 2, como na figura.

Afirmamos o seguinte: se tomamos dois pontos da grade com o mesmo número, o ponto que forma com eles um triângulo eqüilátero deve ter o mesmo número.

Isso se pode verificar, por exemplo, esgotando todos os casos possíveis (a simetria da figura reduz o número de casos).

Da afirmação anterior, deduz-se que os ternos de números com três pontos da grade que são vértices de um triângulo eqüilátero devem ser um dos seguintes:

0 – 0 – 0 (soma 0); 1 – 1 – 1 (soma 3);

2 – 2 – 2 (soma 6); 0 – 1 – 2 (soma 3).

Logo, vemos que a soma das etiquetas desses vértices é sempre um múltiplo de 3.
Como a soma no início é $10 \cdot 0 + 9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 = 27$ e, cada vez que se retiram pontos que formam um triângulo eqüilátero, se retiram pontos cuja soma é múltipla de 3, se resta no final um ponto, este deve ter um número múltiplo de 3; quer dizer, somente pode restar o 0. Daí, as possíveis posições para o último ponto são os lugares etiquetados por 0.
Agora só nos falta dar um exemplo para cada uma das posições do 0. Pela simetria da figura, somente precisamos dar exemplos para 4 posições.
Colocaremos letras iguais para os pontos de um mesmo triângulo eqüilátero retirado e o símbolo * para o último ponto.

1) Quando o último ponto está no centro

```
      B
     B B
    E F F
   E E F G
  D D * G G
 A D H I I C
A A H H I C C
```

2) Quando o último ponto está no vértice do triângulo eqüilátero maior

```
      *
     A A
    B A C
   B B C C
  D F G F H
 E E G G I I
D E D F H I H
```

3) Quando o último ponto está no ponto médio de um lado do triângulo retângulo maior

```
      E
     F F
    E F E
   G G H H
  A G I H C
 B B I I D D
A B A * C D C
```

4) Quando o último ponto é o ponto médio do segmento formado pelo centro e um vértice

```
      H
     K K
    H K H
   F G G B
  F F G B B
 E D D C * A
E E D C C A A
```

COORDENADORES REGIONAIS DA OBM

Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora – MG
Américo López Gálvez	(USP)	Ribeirão Preto – SP
Amarísio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa – MG
Andreia Goldani	FACOS	Osório – RS
Antonio Carlos Nogueira	(UFU)	Uberlândia – MG
Ali Tahzibi	(USP)	São Carlos – SP
Benedito Tadeu Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal – RN
Carlos Alexandre Ribeiro Martins	(Univ. Tec. Fed. de Paraná)	Pato Branco - PR
Carmen Vieira Mathias	(UNIFRA)	Santa María – RS
Claus Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado – RS
Cleonor Crescêncio das Neves	(UTAM)	Manaus – AM
Cláudio de Lima Vidal	(UNESP)	S.J. do Rio Preto – SP
Edson Roberto Abe	(Colégio Objetivo de Campinas)	Campinas – SP
Élio Mega	(Colégio Etapa)	São Paulo – SP
Eudes Antonio da Costa	(Univ. Federal do Tocantins)	Arraias – TO
Fábio Brochero Martínez	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Florêncio Ferreira Guimarães Filho	(UFES)	Vitória – ES
Genildo Alves Marinho	(Centro Educacional Leonardo Da Vinci)	Taguatingua – DF
Ivanilde Fernandes Saad	(UC. Dom Bosco)	Campo Grande– MS
Jacqueline Rojas Arancibia	(UFPB))	João Pessoa – PB
Janice T. Reichert	(UNOCHAPECÓ)	Chapecó – SC
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina – PI
João Francisco Melo Libonati	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
José Cloves Saraiva	(UFMA)	São Luis – MA
José Luiz Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis – SC
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande– PB
José William Costa	(Instituto Pueri Domus)	Santo André – SP
Krerley Oliveira	(UFAL)	Maceió – AL
Licio Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis – SC
Luzinalva Miranda de Amorim	(UFBA)	Salvador – BA
Mário Rocha Retamoso	(UFRG)	Rio Grande – RS
Marcelo Rufino de Oliveira	(Grupo Educacional Ideal)	Belém – PA
Marcelo Mendes	(Colégio Farias Brito, Pré-vestibular)	Fortaleza – CE
Newman Simões	(Cursinho CLQ Objetivo)	Piracicaba – SP
Nivaldo Costa Muniz	(UFMA)	São Luis – MA
Raúl Cintra de Negreiros Ribeiro	(Colégio Anglo)	Atibaia – SP
Ronaldo Alves Garcia	(UFGO)	Goiânia – GO
Rogério da Silva Ignácio	(Col. Aplic. da UFPE)	Recife – PE
Reginaldo de Lima Pereira	(Escola Técnica Federal de Roraima)	Boa Vista – RR
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(UNIFESP)	SJ dos Campos – SP
Ricardo Amorim	(Centro Educacional Logos)	Nova Iguaçu – RJ
Sérgio Cláudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre – RS
Seme Gebara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte – MG
Tadeu Ferreira Gomes	(UEBA)	Juazeiro – BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondônia)	Porto Velho – RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão – SE
Valdeni Soliani Franco	(U. Estadual de Maringá)	Maringá – PR
Vânia Cristina Silva Rodrigues	(U. Metodista de SP)	S.B. do Campo – SP
Wagner Pereira Lopes	(CEFET – GO)	Jataí – GO
William Beline	(UNESPAR/FECILCAM)	Campo Mourão – PR