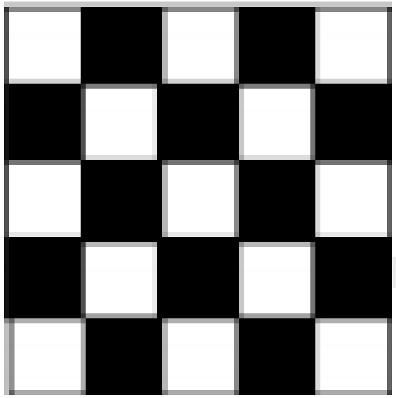
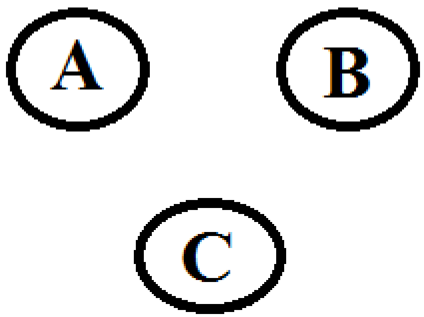
1) Um tabuleiro 5 x 5 possui 25 casas no total.

Isto é, um número ímpar de casas:

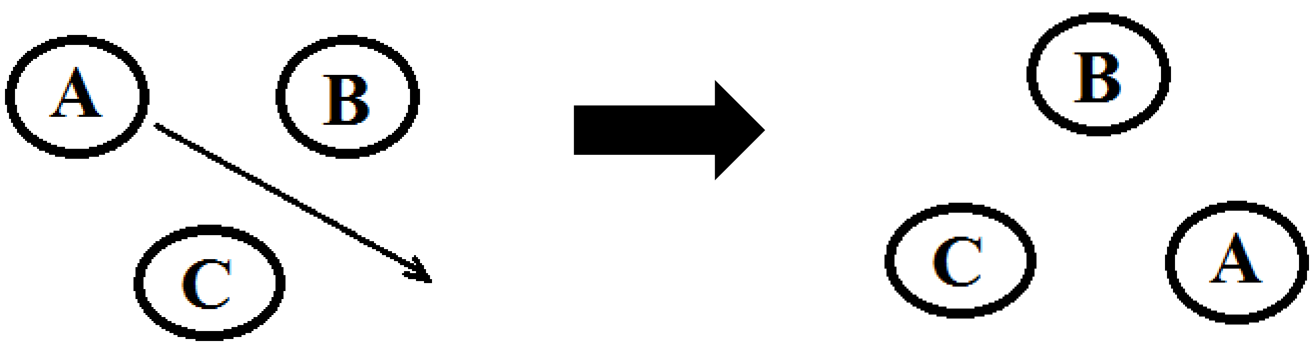


logo não podemos cobrí-lo com peças 1 x 2, pois cada peça dessa ocupa um número par de casas.

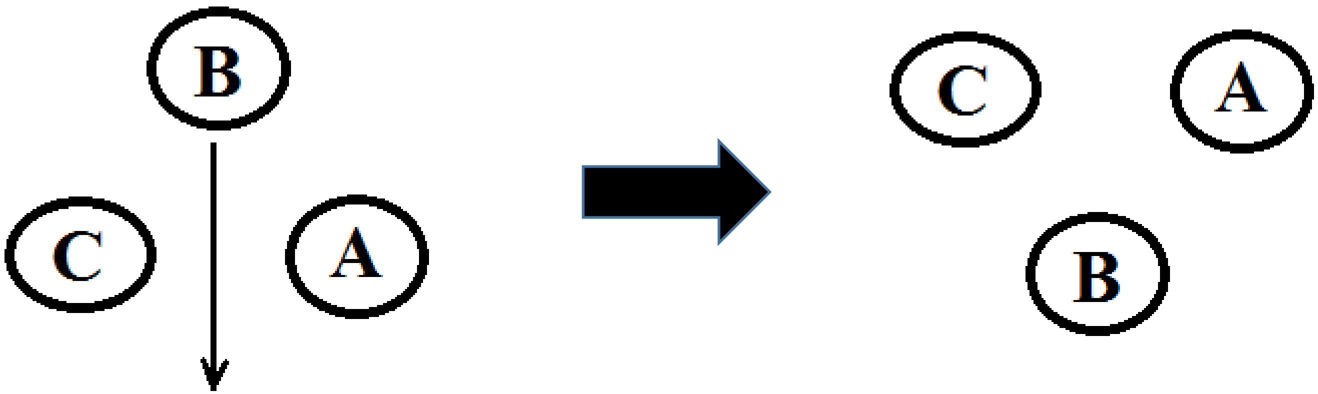
2) Suponhamos a posição abaixo como sendo a posição inicial dos discos:



Adotando o sentido horário, observe que esta mesma posição pode ser escrita como: **ABC**, **BCA** ou **CAB**.
Batendo no disco A, sabemos que passará por B e C, logo teremos uma nova posição:



Observe que esta nova posição pode ser escrita como: **BAC**, **ACB** ou **CBA**. Batendo agora em outro disco, sabemos que ele passará entre os outros dois, logo teremos:

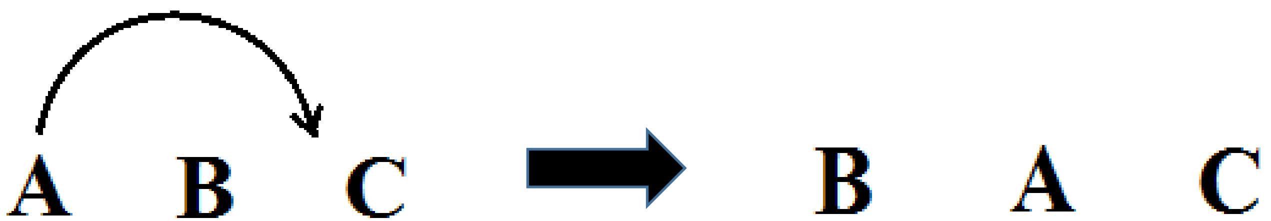


Observe que a nova posição pode ser escrita como: **CAB**, **ABC** ou **BCA,** como na posição inicial. Ou seja, após duas jogadas(um número par) voltamos à posição inicial.
Portanto após um número par de jogadas voltaremos a posição inicial.
Logo fazendo isso 25 vezes(número ímpar), não voltará a posição inicial.

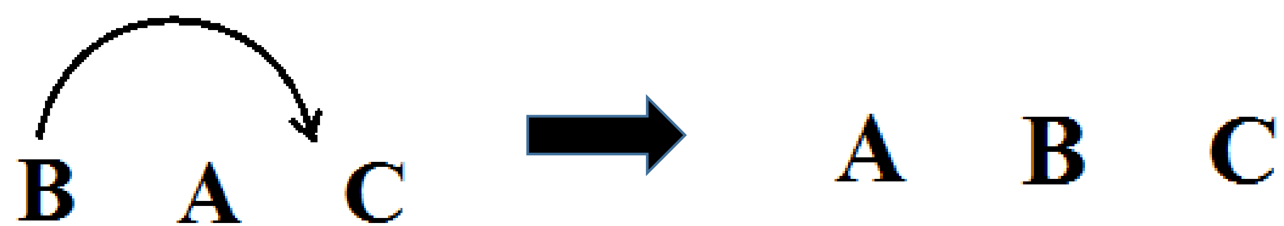
3) Chamemos os três gafanhotos de A, B e C. Suponhamos que a posição abaixo seja a posição inicial:

A B C

Um gafanhoto pula sobre o outro, logo teremos uma nova posição:



Novamente um gafanhoto pula sobre o outro:

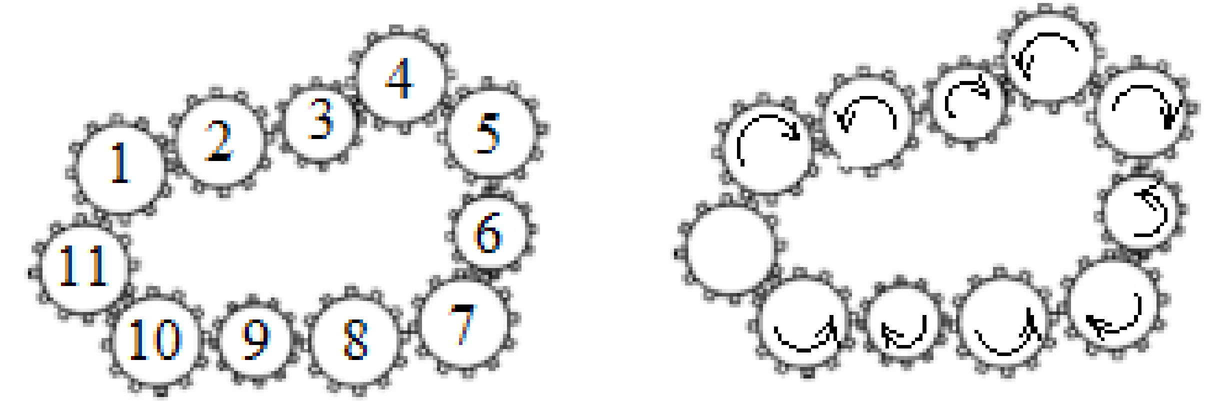


Observe que após dois gafanhotos pularem, retornamos a posição inicial.

Isto é, após um número par de pulos, retorna-se a posição inicial.

Assim, após 2011 movimentos(um número ímpar) não retorna para a posição inicial.

4)



Observe:

- se a engrenagem 1 girar no sentido horário, a engrenagem 2 deve girar no sentido anti-horário;
- se a engrenagem 2 gira no sentido anti-horário, a engrenagem 3 deve girar no sentido horário;
- se a engrenagem 3 gira no sentido horário, a engrenagem 4 deve girar no sentido anti-horário;

- se a engrenagem 4 gira no sentido anti-horário, a engrenagem 5 deve girar no sentido horário;

E assim sucessivamente.

Observe que as engrenagens ímpares giram no sentido horário e as pares giram no sentido anti-horário. E as engrenagens lado a lado giram em sentidos opostos.

Assim as engrenagens 1 e 11 estão lado a lado e ambas giram no mesmo sentido.

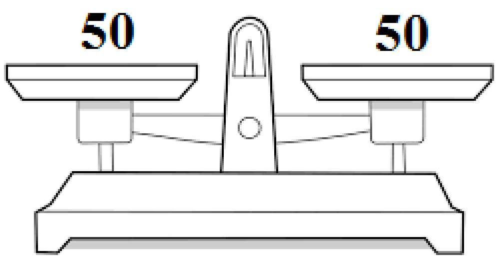
Portanto todas as engrenagens não podem rodar simultaneamente, pois para isso precisaríamos de um número par de engrenagens.

5) Temos 101 moedas, sendo 50 falsas e 51 verdadeiras.

Sabemos que uma moeda falsa difere 1 grama da verdadeira, então suponhamos que a moeda falsa tenha peso 0 e a moeda verdadeira tenha peso 1(poderia ser o contrário).

Temos dois casos a considerar:

1º) caso: Supondo q a moeda retirada seja uma moeda verdadeira



Colocando 50 moedas em cada lado da balança teremos as seguintes possibilidades:

- Se forem colocadas todas as verdadeiras de um lado;
- Se forem colocadas 49 verdadeiras de um lado e 1 de outro;
- Se forem colocadas 48 verdadeiras de um lado e 2 de outro;

E assim sucessivamente teremos a seguinte tabela:

Peso do lado direito	Peso do lado esquerdo	Diferença
50	0	50-0=50 (número par)
49	1	49-1=48 (número par)
48	2	48-2= 46 (número par)
....	...	...
0	50	0-50=-50 (número par)

Observe que testando todas as possibilidades a diferença da balança sempre será um número par.

<u>2º)Caso</u>: Supondo q a moeda retirada seja uma moeda falsa.
Novamente colocando 50 moedas de cada lado da balança, agora teremos 51 moedas verdadeiras e 49 moedas falsas para pesar:

Peso do lado esquerdo	Peso do lado direito	Diferença
50	1	50-1=49 (número ímpar)
49	2	49-2=47(número ímpar)
48	3	48-3=45 (número ímpar)
....	.....	.....
1	50	1-50=-49 (número ímpar)

Novamente podemos observar que testando todas as possibilidades a diferença da balança sempre será um número ímpar.
Portanto, ao retirarmos uma moeda, devemos observar a diferença, se esta for par sabemos que a moeda retirada é verdadeira e se a diferença for ímpar, sabemos que a moeda retirada é falsa.

6)

a)

Sabemos que um número ímpar é representado por **2n+1,** para todo n pertencente aos inteiros.

Logo o dobro de um número ímpar é dado por:

$$2(2n+1) = 4n+2$$

Temos que **4n** é múltiplo de 4, mas ao somarmos 2, o número **4n+2** nunca será múltiplo de 4.

b) Temos dois casos a considerar:

1º Caso: a é par

- Se **n** é ímpar, seja **n=2k+1**

$$\boldsymbol{a^{2k+1}} = \boldsymbol{a^{2k}}.\ \boldsymbol{a = par\,.par = par = a}$$

Observe que $\boldsymbol{a^{2k}}$ é uma quantidade par de números pares e par x par = par, logo $\boldsymbol{a^{2k}}$ é par.

- Se **n** é par, seja **n=2k**

$$\boldsymbol{a^{2k} = par = a}$$

2º Caso: **a** é ímpar;

- Se **n** é ímpar, seja **n=2k+1**

$$\boldsymbol{a^{2k+1} = a^{2k}.\ a = \text{í}mpar\ .\ \text{í}mpar = \text{í}mpar = a}$$

Observe que $\boldsymbol{a^{2k}}$ é uma quantidade par de números ímpares e ímpar x ímpar = ímpar, logo $\boldsymbol{a^{2k}}$ é ímpar.

- Se **n** é par, seja **n=2k**

$$\boldsymbol{a^{2k} = \text{í}mpar = a}$$

c)

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 é ímpar

Observe que temos uma quantidade ímpar de números pares que somados dão par, e temos uma quantidade ímpar de ímpares que somados dão ímpares, logo

par + ímpar = ímpar

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 = 3.628.800

Observe que temos uma quantidade ímpar de números pares que multiplicados dão par, e temos uma quantidade ímpar de ímpares que multiplicados dão ímpares, logo

par . ímpar = par