OBMEP – Ciclo 3, Encontro 2

CONTAGEM
Aplicações do princípio multiplicativo - Permutações

Márcio A. Silva
malexslv@hotmail.com

Ciclo 3, encontro 2.
Contagem: Aplicações do princípio multiplicativo - Permutações

Exercício 1

Prova 1ª Fase 2016 - Nível 2 - Questão 20

20. Bruno tem 5 figurinhas idênticas com a bandeira da Alemanha, 6 com a bandeira do Brasil e 4 com a da Colômbia. Ele quer fazer um pacote com pelo menos 3 dessas figurinhas. De quantas maneiras ele pode fazer esse pacote?

A) 110
B) 120
C) 200
D) 201
E) 210

Ciclo 3, encontro 2.
Contagem: Aplicações do princípio multiplicativo - Permutações

Solução 1

Prova 1ª Fase 2016 - Nível 2 - Questão 20

ALTERNATIVA C

Vamos primeiro contar quantos pacotes distintos é possível fazer com qualquer número de figurinhas, incluindo o pacote sem nenhuma figurinha. Para fazer um pacote, Bruno pode, por exemplo, escolher primeiramente quantas figurinhas da Alemanha, depois quantas do Brasil e finalmente quantas da Colômbia ele deseja colocar no pacote. Pelo princípio multiplicativo, isso pode ser feito de $6 \times 7 \times 5 = 210$ maneiras diferentes; observemos que o fator 6 nessa expressão corresponde ao fato de que Bruno tem 6 escolhas (a saber, 0, 1, 2, 3, 4, 5) para o número de figurinhas da Alemanha; já o fator 7 é o número de escolhas para o número que figurinhas do Brasil e 5 é o número de escolhas para o número de figurinhas da Colômbia que ele pode colocar no pacote.

Por outro lado, o número de pacotes com menos que três figurinhas é 10, como vemos na tabela abaixo (na segunda coluna, usamos letras A, B e C para denotar Alemanha, Brasil e Colômbia, respectivamente):

Solução 1 (cont.)

Prova 1ª Fase 2016 - Nível 2 - Questão 20

Quantidade de figurinhas escolhidas para colocar no pacote	O que fica dentro do pacote	Quantidade de pacotes
0 figurinha	nada	1
1 figurinha	A ou B ou C	3
2 figurinhas	AA ou BB ou CC ou AB ou AC ou BC	6
Total		1 + 3 + 6 = 10

Segue, então, que o número de pacotes distintos com pelo menos três figurinhas é 210 – 10 = 200.

Outra solução: Um pacote com pelo menos três figurinhas poderá conter figurinhas com as três bandeiras diferentes, ou figurinhas com somente duas das bandeiras ou ainda figurinhas com apenas uma das bandeiras. Vamos fazer a contagem do número de pacotes distintos que podem ser feitos em cada um desses casos, com atenção para que sempre os pacotes contenham, no mínimo, três figurinhas.

Ciclo 3, encontro 2.
Contagem: Aplicações do princípio multiplicativo - Permutações

Solução 1 (cont.)

Prova 1ª Fase 2016 - Nível 2 - Questão 20

1. Pacotes de figurinhas com as três bandeiras diferentes

Bruno tem 5 possibilidades para o número de figurinhas com a bandeira da Alemanha que poderá colocar em um pacote: A, AA, AAA, AAAA, AAAAA. Da mesma forma, terá 6 possibilidades para o número de figurinhas com a bandeira do Brasil e 4 para figurinhas com a bandeira da Colômbia.

O número de pacotes distintos que Bruno poderá formar com pelo menos três figurinhas com as três bandeiras diferentes será 5 x 6 x 4 = 120.

2. Pacotes de figurinhas com todas as figurinhas com a mesma bandeira

O número de pacotes distintos que Bruno poderá formar com pelo menos três figurinhas e todas as figurinhas no pacote com a mesma bandeira é 3 + 4 + 2 = 9 (AAA, AAAA, AAAAA, BBB, BBBB, BBBBB, BBBBBB, CCC e CCCC).

3. Pacotes de figurinhas com bandeiras de exatamente dois países

Se os países forem, por exemplo, Alemanha e Brasil, teremos 5 x 6 – 1 possibilidades, já que os pacotes devem conter pelo menos três figurinhas, e precisamos desconsiderar o pacote que tem apenas uma figurinha com a bandeira da Alemanha e uma do Brasil. A mesma contagem para as outras duplas (Alemanha-Colômbia e Brasil-Colômbia) nos dará, neste caso, o número de pacotes procurado:

(5 x 6 – 1) + (5 x 4 – 1) + (6 x 4 - 1) = 29 + 19 + 23 = 71.

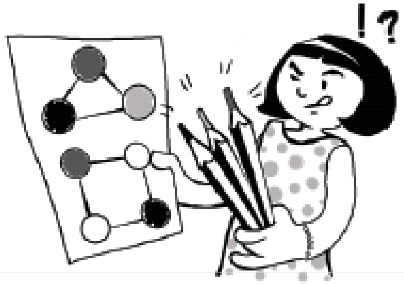
Somando os valores obtidos nas três contagens parciais, teremos 120 + 9 + 71 = 200 pacotes distintos.

Ciclo 3, encontro 2.
Contagem: Aplicações do princípio multiplicativo - Permutações

Exercício 2

Prova 2ª Fase 2009 - Nível 2 - Questão 2

(2) Ana quer colorir as bolinhas das figuras 1, 2 e 3 de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que **bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes**.



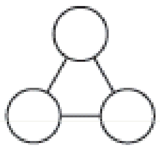


Figura 1

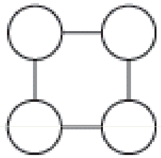


Figura 2

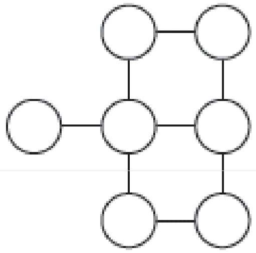
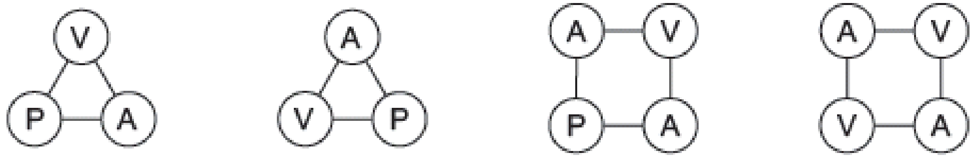


Figura 3

Veja a seguir duas maneiras diferentes de colorir a figura 1 e duas maneiras diferentes de colorir a figura 2:



(a) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 1?

(b) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 2?

(c) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 3?

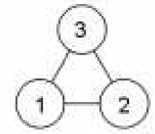
Ciclo 3, encontro 2.
Contagem: Aplicações do princípio multiplicativo - Permutações

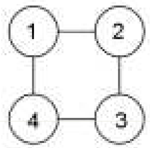
Solução 2

Prova 2ª Fase 2009 - Nível 2 - Questão 2

Solução

a) Ana pode pintar a bolinha 1 com qualquer uma das três cores. A bolinha 2 deve então ser pintada de uma cor diferente da primeira, restando a Ana duas cores para pintá-la. A bolinha 3 deve ser pintada com a cor que sobrar. Portanto, a figura 1 pode ser pintada de $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras diferentes.





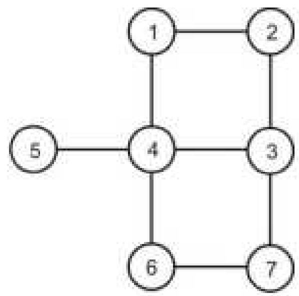
b) Vamos dividir as maneiras de pintar a figura 2 em dois casos.

1º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas da mesma cor. Essa cor pode ser escolhida de três maneiras diferentes; após esta escolha, a cor da bolinha 2 pode ser escolhida de duas maneiras diferentes, bem como a da bolinha 4. O número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3 \times 2 \times 2 = 12$.

2º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso, a cor da bolinha 1 pode ser escolhida de três maneiras diferentes e após isso, restam duas possibilidades para a cor da bolinha 3. Para as bolinhas 2 e 4 há apenas uma possibilidade, que é a cor que não foi usada nas bolinhas 1 e 3. Logo o número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3 \times 2 \times 1 = 6$.

No total, a figura 2 pode ser pintada de $12 + 6 = 18$ maneiras diferentes.

c) As bolinhas de 1 a 4 formam a figura do item anterior e portanto, para pintá-las, Ana tem 18 possibilidades. Para pintar a bolinha 5, ele tem duas cores disponíveis, pois a bolinha 4 já está pintada. Logo temos $18 \times 2 = 36$ possibilidades para pintar as bolinhas de 1 a 5. Dividimos agora nossa contagem em dois casos:



1º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas da mesma cor. Nesse caso, temos uma escolha para a cor da bolinha 6 (pois a bolinha 3 já foi pintada) e duas para a bolinha 7, ou seja, temos $1 \times 2 = 2$ possibilidades.

2º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso também temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (diferente das cores das bolinhas 3 e 4) e sobra apenas uma cor para a bolinha 7. Aqui temos apenas uma possibilidade.

No total, há $36 \times 2 + 36 \times 1 = 108$ maneiras diferentes de pintar a figura 3.

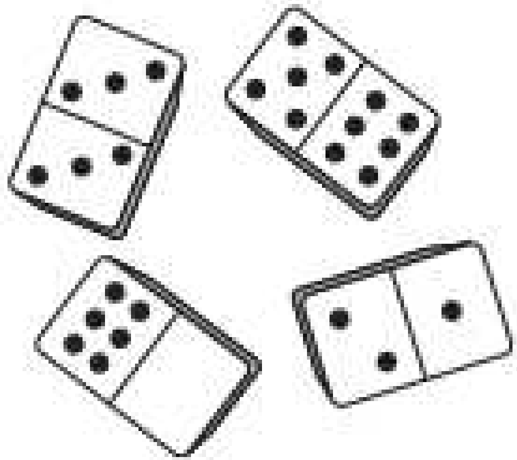
Ciclo 3, encontro 2.
Contagem: Aplicações do princípio multiplicativo - Permutações

Exercício 3

Prova 1ª Fase 2009 - Nível 1 - Questão 8

8. O jogo de dominó tem 28 peças diferentes. As peças são retangulares e cada uma é dividida em dois quadrados; em cada quadrado aparecem de 0 a 6 bolinhas. Em quantas peças o número total de bolinhas é ímpar?

A) 9
B) 10
C) 12
D) 21
E) 24



Ciclo 3, encontro 2.
Contagem: Aplicações do princípio multiplicativo - Permutações

Solução 3

Prova 1ª Fase 2009 - Nível 1 - Questão 8

Solução

ALTERNATIVA C

O número total de bolinhas de uma peça é ímpar quando um dos quadrados tiver um número ímpar de bolinhas e o outro tiver um número par de bolinhas. São 3 possibilidades para números ímpares (1, 3 e 5) e 4 possibilidades (0, 2, 4 e 6) para números pares. Logo o número de peças que apresentam um número ímpar de bolinhas é $3 \times 4 = 12$.

Podemos também fazer uma listagem ordenada de todas as peças, marcando aquelas que têm um número ímpar de bolinhas:

0-0						
0-1	1-1					
0-2	**1-2**	2-2				
0-3	1-3	**2-3**	3-3			
0-4	**1-4**	2-4	**3-4**	4-4		
0-5	1-5	**2-5**	3-5	**4-5**	5-5	
0-6	**1-6**	2-6	**3-6**	4-6	**5-6**	6-6