Programa de Iniciação Científica da OBMEP

2º Encontro

Aula 2 : 4 horas
Data 25/06/2016

Conteúdos:

- Contagem

Material:

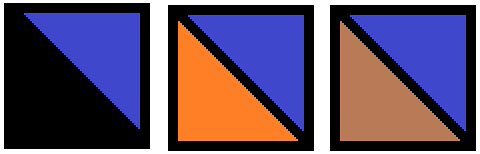
- Métodos de Contagem e Probabilidade, capítulo 1
- O Princípio Fundamental da Contagem

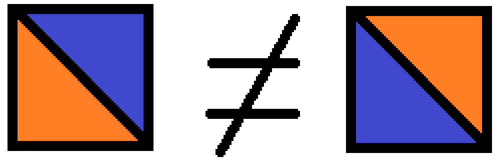
1) No caso deste problema uma forma natural para planejar como pintar os triângulos são:

- Escolher a cor a ser utilizada no triangulo de cima
- A seguir escolher a cor para o triangulo de baixo

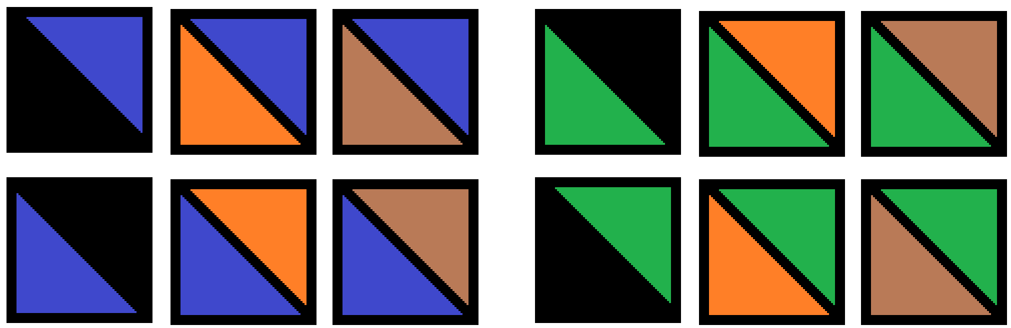
A primeira decisão pode ser feita de 2 maneiras (verde ou azul), uma vez tomada a decisão, listamos as 3 possibilidades para a segunda decisão(preto, laranja ou marrom).

*Supondo que escolhemos azul primeiro:



- Note que 

- Logo teremos as seguintes possibilidades:



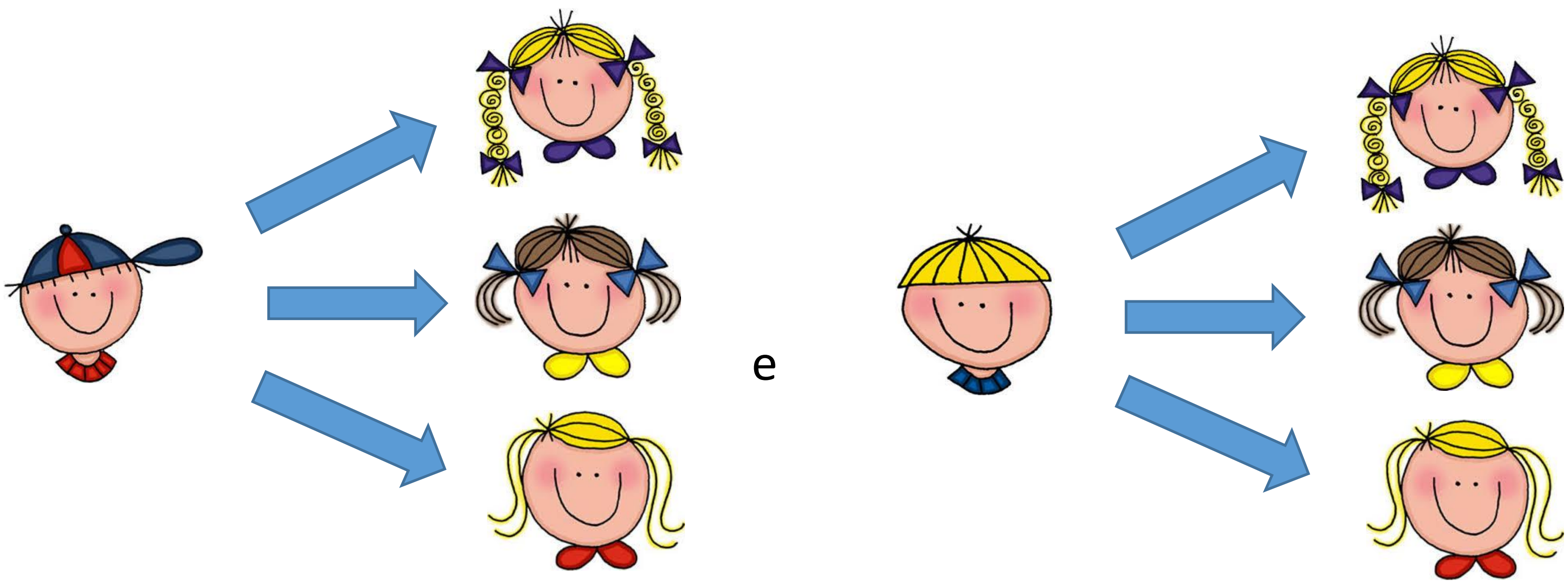
- Isto é, a cor de cima pode ser escolhida de 2 modos, a de baixo de 3 modos e podemos ordená-las de 2 formas, pelo princípio multiplicativo:

$$\mathbf{2 \times 3 \times 2 = 12}$$

2)

1ª decisão: escolher um menino(2 modos)

2ª decisão: escolher uma menina(3 modos)



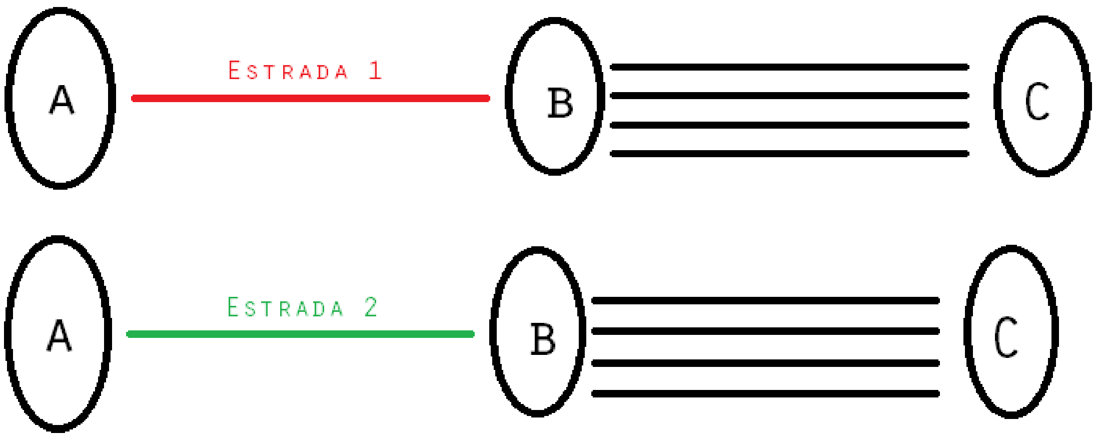
Pelo principio multiplicativo:

$$\mathbf{2 \times 3 = 6}$$

3)

A primeira decisão é escolher uma das estradas de A para B (6 modos)

Em seguida escolher de B para C (4 modos):



....

Assim, até a estrada 6 teremos pelo principio multiplicativo:

6 x 4 = 24 possibilidades

4) Note que no primeiro algarismo (dezena) pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual a zero.

O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos , pois não pode ser igual ao primeiro algarismo, pois pede que sejam **distintos**.

1ºalgarismo	**2ºalgarismo**
1,2,3,4,5,6,7,8,9	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
9 modos	10 modos – 1 que está na dezena

Isto é:

9 x 9 = 81 números

5) Observe que para um número ser par deve ser terminado em 0, 2, 4, 6, 8, logo temos 5 modos para a casa da unidade.

Temos dois casos a considerar:

<u>1ºcaso</u>: Se for terminado em zero.

1ºalgarismo	**2ºalgarismo**
$\underbrace{\boxed{1,2,3,4,5,6,7,8,9}}_{\text{9 modos}}$	$\underbrace{\boxed{0}}_{\text{1 modo}}$

Isto é:

$$\mathbf{9 \times 1 = 9}$$

<u>2ºcaso</u>: Se não for terminado em zero.

Escolha um número de sua preferencia para fixar no 2º algarismo (Ex:4).

Observe que teremos apenas 8 modos para o 1ºalgarismo, pois não poderá ser zero e nem o número que foi escolhido para o 2º algarismo.

1ºalgarismo	**2ºalgarismo**
1,2,3,5,6,7,8,9	Ex: 4
8 modos	4 modos(2,4,6,8)

Isto é:

$$\mathbf{8 \times 4 = 32}$$

Portanto pelo princípio aditivo o total será :

$$\mathbf{9 + 32 = 41}$$

6) Podemos selecionar de três maneiras:

1ª **Álgebra** e **Geometria**

$$\underline{5} \times \underline{10} = \mathbf{50}\text{ escolhas}$$

2ª **Álgebra** e **Combinatória**

$$\underline{5} \times \underline{7} = \mathbf{35}\text{ escolhas}$$

3ª **Geometria** e **Combinatória**

$$\underline{10} \times \underline{7} = \mathbf{70}\text{ escolhas}$$

Pelo princípio aditivo temos:

Total de escolhas :

$$\mathbf{50 + 35 + 70 = 155} \text{ escolhas}$$

7)

a) 4 alunos(Alice, Bernardo, Carolina e Daniel)

Líder	Vice-líder
Alice	Bernardo
Alice	Carolina
Alice	Daniel
Bernardo	Alice
Bernardo	Carolina
Bernardo	Daniel
Carolina	Alice
Carolina	Bernardo
Carolina	Daniel
Daniel	Alice
Daniel	Bernardo
Daniel	Carolina

b) Pelo princípio multiplicativo temos:

D1 = Líder,

que temos **p = 4** modos

D2 = vice-líder

que temos **q = 3** modos

Assim o número total de maneiras é

$$\mathbf{p \,.\, q = 4 \times 3 = 12}$$

8) 5 jogadores:

Capitão	Vice-capitão
Jogador 1	Jogador 2
Jogador 1	Jogador 3
Jogador 1	Jogador 4
Jogador 1	Jogador 5
Jogador 2	Jogador 1
Jogador 2	Jogador 3
Jogador 2	Jogador 4
Jogador 2	Jogador 5
Jogador 3	Jogador 1
Jogador 3	Jogador 2

Capitão	Vice-capitão
Jogador 3	Jogador 4
Jogador 3	Jogador 5
Jogador 4	Jogador 1
Jogador 4	Jogador 2
Jogador 4	Jogador 3
Jogador 4	Jogador 5
Jogador 5	Jogador 1
Jogador 5	Jogador 2
Jogador 5	Jogador 3
Jogador 5	Jogador 4

b) Pelo princípio multiplicativo temos:

D1 = Capitão,

que temos **p = 5** modos

D2 = vice-capitão

que temos **q = 4** modos

Assim o número total de maneiras é

$$\mathbf{p \cdot q = 5 \times 4 = 20}$$

9) **A, B, C, D, E, F**

a)

_____ · _____

6 modos   5 modos $= \mathbf{6 \times 5 = 30}$

b)

$$\underbrace{\underset{\text{1 modo}}{\underline{\;A\;}} \cdot \underset{\text{5 modos}}{\underline{\quad}}}_{1 \times 5 = 5} \qquad \underbrace{\underset{\text{5 modos}}{\underline{\quad}} \cdot \underset{\text{1 modo}}{\underline{\;A\;}}}_{5 \times 1 = 5}$$

Pelo princípio aditivo:

5 + 5 = 10

c) **A, B, C, D, E, F**

Consoantes **Vogais**

$$\underbrace{\underline{\ 4\ } \quad . \quad \underline{\ 2\ }}_{4 \times 2 = 8 \text{ modos}}$$

10) 11 jogadores

a) Pelo princípio multiplicativo temos:

D1 = Capitão,

que temos **p = 11** modos

D2 = Vice-capitão

que temos **q = 10** modos

Assim o número total de maneiras é

$$p \cdot q = 11 \times 10 = 110$$

b) Neste caso seria muito trabalhoso listar, logo a melhor maneira é utilizar o princípio multiplicativo.

11)

a) Literatura Poesia

$\underline{\;10\;} \cdot \underline{\;9\;} = 90$

b) Literatura Poesia

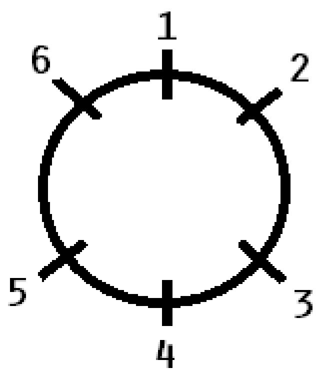
$\underline{\;10\;} \cdot \underline{\;10\;} = 100$

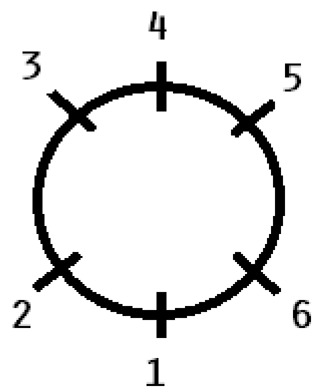
12) Funcionários: Sara, Iná, Ester, Ema, Ana, Inácio

a) $\underline{\ 6\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 6! = 720$

b) Observe que as posições abaixo embora sejam diferentes em linha, são iguais em circulo.

123456 **456123**





Portanto temos as mesmas posições que em linhas, porém sem estas repetições, o que nos resulta em:

$$\frac{6!}{6} = \frac{6.5.4.3.2.1}{6} = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

c) **Presidente** **Vice-presidente** **Suplente**

$$\underline{\ 6\ } \ . \ \underline{\ 5\ } \ . \ \underline{\ 4\ } = 120$$

13)

a) Porta voz Diretor de Artes Assessor técnico

$$\underline{10} \;.\; \underline{9} \;.\; \underline{8} \;=\; 720$$

b) Leandro, Renato e Marcelo

Porta voz Diretor de Artes Assessor técnico

$$\underline{3} \;.\; \underline{2} \;.\; \underline{1} \;=\; 6$$

c) Pelo item a) podemos observar que a comissão com cargos específicos pode ser formada de 720 maneiras. E pelo item b) vemos que três pessoas podem formar 6 comissões diferentes, isto é:

$$\frac{10 \;.\; 9 \;.\; 8}{6} = 120$$

14) **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

Observe que para um número ser par deve ser terminado em 0, 2, 4, 6 logo temos 4 modos para a casa da unidade.

Temos dois casos a considerar:

1ºcaso: Se for terminado em zero.

Observe que na primeira casa podemos colocar (1,2,3,4,5,6,7), na segunda casa não podemos colocar o zero que está na ultima casa e nem o número que colocarmos na primeira casa, análogo a terceira casa, isto é,

$$\underset{\text{7modos}}{\_\_\_\_} \;.\; \underset{\text{6modos}}{\_\_\_\_} \;.\; \underset{\text{5modos}}{\_\_\_\_} \;.\; \underset{\text{1modo}}{\underline{\;0\;}}$$

$= \mathbf{7 . 6 . 5 . 1 = 210}$ modos

<u>2ºcaso</u>: Se não for terminado em zero.
Observe que teremos 3 modos para a última casa(2, 4 e 6), escolhendo um destes nos restarão 6 números para a primeira casa, pois não podemos colocar o zero na primeira casa, e na segunda casa não podemos colocar o número que está na primeira, nem o que está na última, mas podemos colocar o zero, logo são 6 modos, análogo a terceira casa, isto é,

$$\underset{6\text{modos}}{\underline{\quad\quad}} \;.\; \underset{6\text{modos}}{\underline{\quad\quad}} \;.\; \underset{5\text{modos}}{\underline{\quad\quad}} \;.\; \underset{3\text{modos}}{\underline{\quad\quad}}$$

= **6 . 6 . 5 . 3 = 540**modos