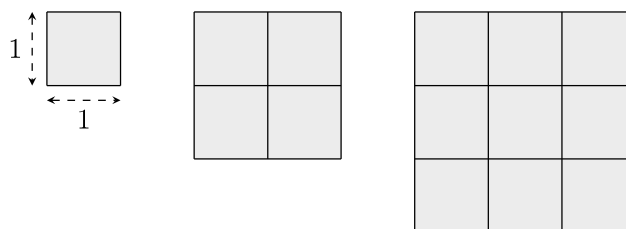


7.1 Área: conceito e áreas do quadrado e do retângulo

Dada uma figura no plano, vamos definir a área desta figura como o resultado da comparação da figura dada com uma certa unidade de medida. No caso do conceito de área de figuras planas, a unidade de medida utilizada é um quadrado de lado 1 (uma unidade de comprimento). Assim um quadrado de lado 1 tem, por definição, uma unidade de área.

É muito provável que você já tenha aprendido que a área de um quadrado de lado ℓ é igual a ℓ^2 e que a área de um retângulo de base b e altura h é igual ao produto bh da base pela altura. Nesta seção pretendemos dar sentido a estas expressões, mostrando como podem ser calculadas as áreas de quadrados e retângulos em que os lados são dados por números naturais e por números racionais.

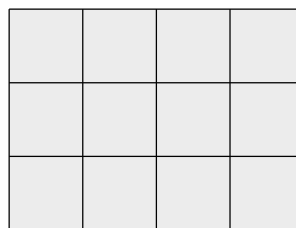
A figura a seguir mostra, respectivamente, quadrados de lado 1, lado 2 e lado 3. Por definição o quadrado de lado 1 tem uma unidade de área. Como o quadrado de lado 2 pode ser dividido em 4 quadrados de lado 1, dizemos que o quadrado de lado 2 tem área igual a 4. Do mesmo modo, como o quadrado de lado 3 pode ser dividido em 9 quadrados de lado 1, dizemos que o quadrado de lado 3 tem área igual a 9.



Generalizando, se um quadrado tem lado n , em que n é um número inteiro positivo, então sua área é igual a n^2 , pois dentro deste quadrado cabem exatamente n^2 quadrados de lado 1. Observe que neste cálculo utilizamos intuitivamente as seguintes propriedades do conceito de área:

- Figuras iguais possuem a mesma área.
- Se uma figura está dividida em duas figuras disjuntas, então a soma das áreas dessas duas figuras menores é igual à área da figura total.

Vejamos agora como calcular a área de um retângulo cujos lados são números inteiros. Por exemplo, o retângulo $1 \times n$ deve ter área n , pois ele é formado por n quadrados unitários. O retângulo $2 \times n$ é formado por dois retângulos $1 \times n$. Assim sua área é $2n$. Procedendo desta forma, podemos chegar na expressão nm para a área do retângulo $n \times m$. Exemplificando, o retângulo 3×4 da figura a seguir tem área igual a $3 \cdot 4 = 12$, pois ele é formado por 12 quadrados unitários, ou por 3 retângulos 1×4 (três faixas horizontais).

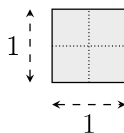


Antes de continuar vale a pena observar que a expressão n^2 para a área de um quadrado de lado n é um caso particular da expressão nm da área de um retângulo $n \times m$, pois, quando $n = m$, este retângulo também é um quadrado.

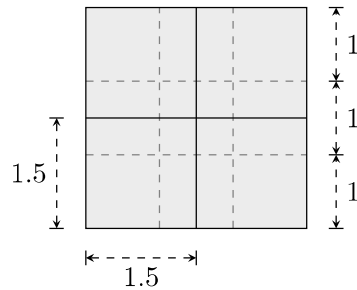
▲ 7.1 Área: conceito e áreas do quadrado e do retângulo

Até agora vimos que, através de uma simples contagem, é possível calcular as áreas de quadrados e retângulos cujos comprimentos dos lados são números inteiros. Mas e quando estes lados não são números inteiros, como calcular as áreas destas figuras? Bom, afirmamos que a expressão n^2 para a área de um quadrado de lado n e a expressão nm para a área de um retângulo de base n e altura m continuam válidas mesmo quando n e m não são números inteiros. Em vez de apresentar uma demonstração abstrata deste fato, vamos estudar como ele pode ser verificado em alguns exemplos.

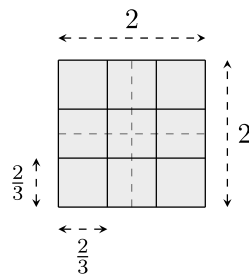
Por exemplo, na figura a seguir vemos que juntando 4 quadradinhos de lado $\frac{1}{2}$ obtemos um quadrado de lado 1 (nossa unidade de área). Isto significa que a área do quadradinho de lado $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado de lado 1. Como o quadrado de lado 1 tem área igual a 1, concluímos que a área do quadrado de lado $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.



Vejamos, agora, como podemos determinar a área do quadrado de lado $\frac{3}{2} = 1,5$. Na figura a seguir, vemos que juntando 4 quadradinhos de lado 1,5 obtemos um quadrado de lado 3. Isto nos diz que a área do quadrado de lado 1,5 é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado de lado 3. Como o quadrado de lado 3 tem área igual a $3^2 = 9$, concluímos que o quadrado de lado 1,5 tem área igual a $\frac{1}{4} \times 9 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.



Como último exemplo, vejamos como determinar a área do quadrado de lado $\frac{2}{3}$. Para obter este quadrado, podemos dividir cada lado de um quadrado de lado 2 em três partes, dividindo assim o quadrado de lado 2 em 9 quadrados de lado $\frac{2}{3}$ (veja a figura a seguir). Esta divisão nos mostra que a área do quadrado de lado $\frac{2}{3}$ é igual a $\frac{1}{9}$ da área do quadrado de lado 2. Como o quadrado de lado 2 tem área igual a 4, concluímos que o quadrado de lado $\frac{2}{3}$ tem área igual a $\frac{1}{9} \times 4 = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.



Resumindo os cálculos destes três exemplos:

- O quadrado de lado $\frac{1}{2}$ tem área igual a $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.
- O quadrado de lado $\frac{3}{2}$ tem área igual a $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

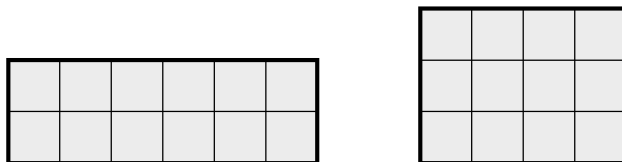
▲ 7.1 Área: conceito e áreas do quadrado e do retângulo

- O quadrado de lado $\frac{2}{3}$ tem área igual a $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

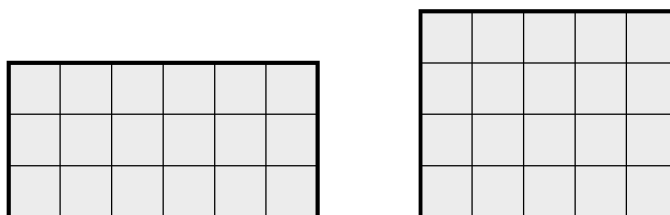
Generalizando, é possível demonstrar que a área do quadrado de lado x é igual a x^2 , para qualquer que seja o número x . E para retângulos também podemos demonstrar que para quaisquer x e y , a área do retângulo de base x e altura y é igual a xy . Portanto, tanto para quadrados quanto para retângulos a área é dada pelo “produto da base pela altura”.

Antes de apresentar exemplos, lembre-se de que o perímetro de um quadrilátero é a soma dos comprimentos dos seus quatro lados. Deste modo, se um retângulo tem lados x e y , então o seu perímetro é igual a $2x + 2y$, enquanto que a sua área é xy . Pelas próprias definições vemos que área e perímetro são grandezas de natureza diferentes e que não podem ser confundidas. A área mede a porção do plano que é ocupada pela figura e o perímetro mede o comprimento do seu contorno. Além disso, como exemplificado logo a seguir, existem retângulos de áreas iguais, mas com perímetros diferentes e, reciprocamente, existem retângulos com perímetros iguais, mas com áreas diferentes.

- A figura a seguir ilustra dois retângulos de mesma área, mas de perímetros diferentes. O retângulo 2×6 tem perímetro 16 enquanto que o retângulo 3×4 tem perímetro 14, apesar de estes dois retângulos possuírem áreas iguais a 12.



- Por outro lado, a figura a seguir ilustra dois retângulos com mesmo perímetro, mas de áreas diferentes. O retângulo 3×6 tem área 18 enquanto o retângulo 4×5 tem área 20, apesar de estes dois retângulos possuírem perímetros iguais a 18.



No [vídeo 51](#) da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube pode ser encontrada uma explicação bastante detalhada para as expressões das áreas de um quadrado, de um retângulo e de um losango.

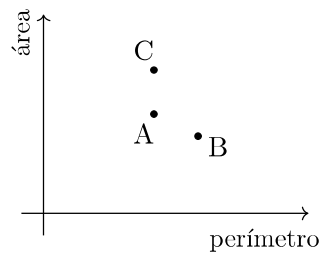
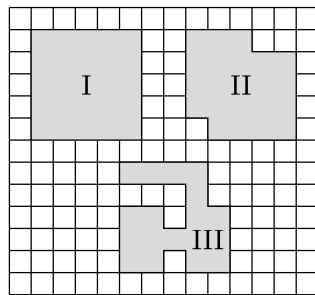
No Portal da Matemática, 9º Ano do Ensino Fundamental, módulo de Áreas de Figuras Planas, no vídeo [Parte I: retângulos](#) também pode ser encontrada uma explicação para a expressão da área de um quadrado e de um retângulo com lados inteiros, racionais e incomensuráveis.

O estudo dos próximos exemplos pode ajudar no entendimento dos conceitos de área e perímetro.

Exemplo 1: (OBMEP 2007 – N2Q15 – 1ª fase) A figura mostra três polígonos desenhados em uma folha quadriculada. Para cada um destes polígonos foi assinalado, no plano cartesiano à direita, o ponto cujas coordenadas horizontal e vertical são, respectivamente, seu perímetro e sua área.

▲ 7.1 Área: conceito e áreas do quadrado e do retângulo

89



Qual é a correspondência correta entre os polígonos e os pontos?

- (a) I \rightarrow C, II \rightarrow B, III \rightarrow A
- (b) I \rightarrow B, II \rightarrow A, III \rightarrow C
- (c) I \rightarrow A, II \rightarrow C, III \rightarrow B
- (d) I \rightarrow A, II \rightarrow B, III \rightarrow C
- (e) I \rightarrow C, II \rightarrow A, III \rightarrow B

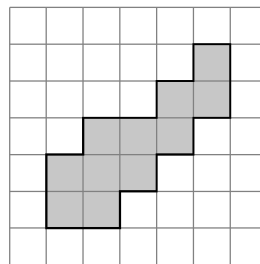
Solução. Usando o lado ℓ de um dos quadradinhos do quadriculado como unidade de comprimento, a contagem direta na figura nos dá as áreas e perímetros dos polígonos, conforme a tabela abaixo.

Polígono	Perímetro (em ℓ)	Área (em ℓ^2)
I	20	$5 \times 5 = 25$
II	20	$25 - 3 = 22$
III	30	$25 - 7 = 18$

Deste modo, a correspondência que associa a cada polígono um par ordenado no plano cartesiano é I \rightarrow (20, 25), II \rightarrow (20, 22) e III \rightarrow (30, 18). Os pontos correspondentes a I e II têm a mesma abscissa (perímetro)

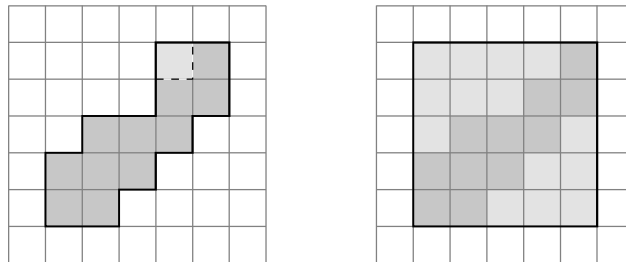
logo estão na mesma reta vertical no plano cartesiano; como o ponto correspondente a I tem ordenada (área) maior, ele é o que está mais acima. Logo $I \rightarrow C$ e $II \rightarrow A$. Resta $III \rightarrow B$.

Exemplo 2: Qual é a área da figura a seguir, usando como unidade a área de um quadradinho? Qual é o perímetro da figura? Quantos quadradinhos podem ser acrescentados à figura de modo a obter o máximo de área sem alterar o perímetro?



Solução. Contando diretamente os segmentos que compõem o contorno da figura vemos que ela tem perímetro igual a 20. Analisando, agora, a figura a seguir à esquerda vemos que se acrescentamos um quadradinho colado na figura, aumentamos a sua área em uma unidade, mas não alteramos o seu perímetro, pois só trocamos de lugar dois segmentos (pontilhados) que já faziam parte do contorno da figura. Podemos ir acrescentando estes quadradinhos até formar um quadrado de lado 5. Portanto, podemos acrescentar mais 14 quadradinhos na figura dada sem alterar o seu perímetro, como está indicado na figura a seguir à direita.

▲ 7.1 Área: conceito e áreas do quadrado e do retângulo



Exemplo 3: (OBMEP 2006 – N1Q1 – 2ª fase) Miguilim brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem 3 cm, 4 cm e 6 cm. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triângulo com um lado do outro, sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo vemos duas das figuras que ele fez.

- (A) Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas Figuras I e II?
- (B) Calcule os perímetros das Figuras I e II.
- (C) Qual o menor perímetro de uma figura que Miguilim pode formar? Desenhe duas figuras que ele pode formar com este perímetro.

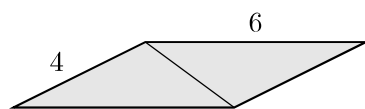


Figura I

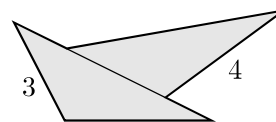
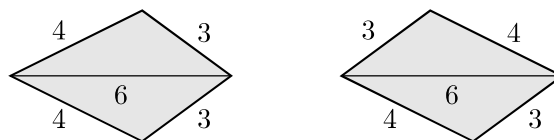


Figura II

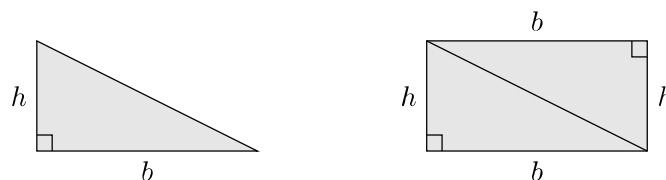
Solução.

- (A) Na Figura I, verificamos que as medidas de dois lados que não foram unidos são 4 cm e 6 cm. Como os dois lados unidos são do mesmo tamanho, eles não podem medir nem 4 cm nem 6 cm, logo medem 3 cm. Na Figura II, o triângulo que está mais acima tem um lado livre de 4 cm e claramente o lado que foi unido ao triângulo de baixo é menor do que o lado livre não identificado. Portanto, o lado do triângulo superior que foi unido ao de baixo mede 3 cm. No triângulo de baixo, claramente o maior lado foi unido ao lado do triângulo de cima. Este lado mede 6 cm.
- (B) Os lados de medida 3 cm não fazem parte do perímetro da Figura I. Logo o perímetro da Figura I é igual a $2 \cdot (4 + 6) = 20$ cm. O lado de 3 cm de um triângulo e o pedaço de 3 cm do lado maior do outro triângulo não fazem parte do perímetro da Figura II. Logo, o perímetro da Figura II é igual a $6 + 4 + 3 + 4 + (6 - 3) = 20$ cm.
- (C) O perímetro de uma figura obtida quando se unem lados dos dois triângulos é igual à soma dos perímetros dos dois triângulos menos duas vezes o comprimento do menor dos lados que foram unidos. Assim, o perímetro da figura é o menor possível quando unirmos os dois lados de 6 cm; neste caso o perímetro é igual a $2 \cdot (3 + 4 + 6) - 2 \cdot 6 = 14$ cm. As duas figuras abaixo têm perímetro mínimo.



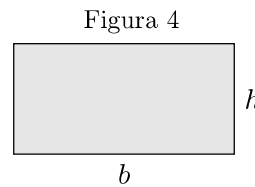
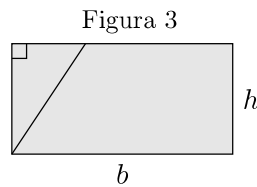
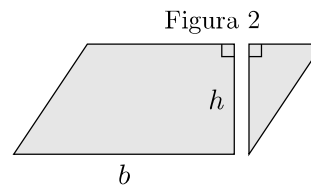
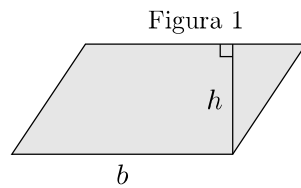
7.2 A área de um triângulo retângulo

Um triângulo retângulo de base b e de altura h é a metade de um retângulo de base b e de altura h . Como a área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura, segue que a área de um triângulo retângulo é igual a metade da base vezes a altura, ou seja, a área do triângulo retângulo de base b e altura h é dada pela expressão $\frac{bh}{2}$.

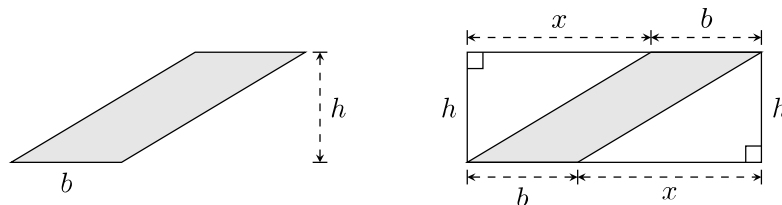


7.3 A área do paralelogramo

Sabemos que um paralelogramo é um quadrilátero com pares de lados opostos paralelos e de mesmo comprimento. A distância h entre dois lados opostos de um paralelogramo é chamada de **altura** em relação a estes lados, enquanto que estes dois lados são chamados de **bases** do paralelogramo. Quando um segmento h perpendicular a uma base do paralelogramo intersecta a base oposta, a sequência de figuras a seguir ilustra como, nestes casos, um paralelogramo de base b e altura h pode ser transformado, sem alterar a sua área, em um retângulo também de base b e altura h . Como a área do retângulo é bh , vemos que a área do paralelogramo também é dada por esta expressão.



Agora, de modo geral, considere um paralelogramo qualquer de base b e de altura h . Adicionando ao paralelogramo dois triângulos retângulos iguais, como indicado na figura a seguir, formamos um retângulo de base $b + x$ e de altura h .



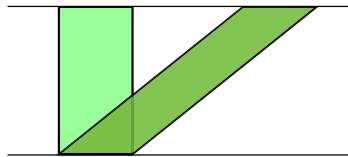
Portanto, para obter a área do paralelogramo, podemos subtrair da área do retângulo de base $b + x$ e altura h as áreas dos dois triângulos retângulos de base x e altura h . Logo a área do paralelogramo é dada por

$$(b + x)h - \frac{xh}{2} - \frac{xh}{2} = bh + xh - \frac{xh}{2} - \frac{xh}{2} = bh.$$

Assim, para quaisquer paralelogramos e retângulos, suas áreas são calculadas pela mesma expressão “base vezes altura”.

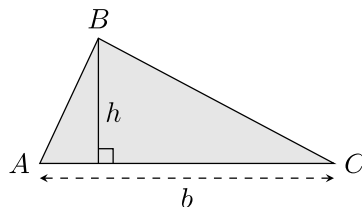
▲ 7.4 A área de um triângulo qualquer

Como a área de um paralelogramo é o produto da base vezes a altura, todos os paralelogramos de mesma base e mesma altura possuem áreas iguais. A figura a seguir ilustra, então, um retângulo e um paralelogramo com áreas iguais.

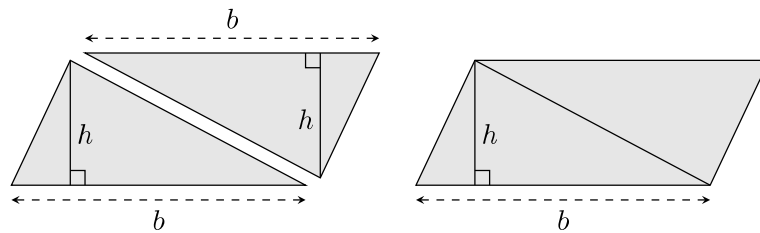


7.4 A área de um triângulo qualquer

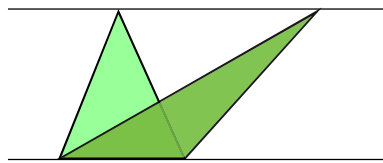
Considere um triângulo qualquer ABC . Seja b o comprimento do seu lado AC . A **altura** do triângulo em relação a **base** AC é o segmento que passa pelo vértice B e é perpendicular a reta \overleftrightarrow{AC} . Seja h o comprimento desta altura.



Nas figuras a seguir vemos que com duas cópias de um triângulo de base b e altura h podemos montar um paralelogramo de base b e altura h (veja o exercício 1 da seção 6.2). Assim o paralelogramo tem o dobro da área do triângulo. Como a área do paralelogramo é “base vezes altura”, a área do triângulo deve ser “base vezes altura dividido por dois”, uma vez que o triângulo tem metade da área do paralelogramo. Deste modo, a área do triângulo de base b e altura h é $\frac{b \cdot h}{2}$.



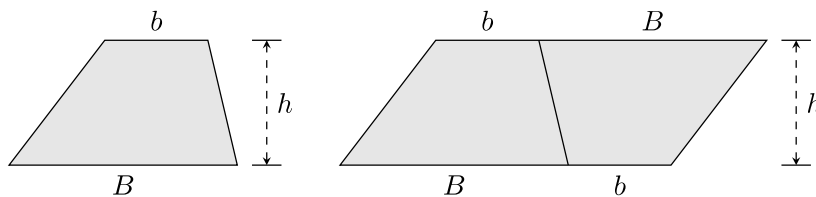
Da expressão da área de um triângulo segue que se dois triângulos possuem a mesma base e a mesma altura, então eles possuem a mesma área. Na figura a seguir, se as retas são paralelas, vemos triângulos diferentes, mas com áreas iguais.



7.5 A área do trapézio

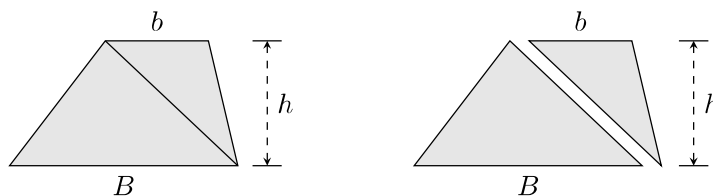
Considere um trapézio de lados paralelos de comprimentos b e B . Estes lados são chamados de **bases** do trapézio e um segmento perpendicular a estas bases é chamado de **altura** do trapézio. Seguindo os esquemas abaixo, vemos que com duas cópias do trapézio de bases b e B e de altura h pode-se construir um paralelogramo de base $b + B$ e de altura h . Por isto, a área do trapézio de bases b e B e altura h é a metade da área do paralelogramo de base $b + B$ e altura h . Logo a área deste trapézio é dada por $\frac{(b + B)h}{2}$.

▲ 7.6 Exemplos resolvidos



De outro modo, a área de um trapézio de bases b e B e de altura h também pode ser calculada da seguinte maneira. Traçando uma diagonal do trapézio, como está indicado na figura a seguir, vemos que é possível dividir o trapézio em dois triângulos: um de base b e de altura h e o outro de base B e de altura h . Somando as áreas destes triângulos obtemos a área do trapézio:

$$\frac{bh}{2} + \frac{Bh}{2} = \frac{(b + B)h}{2}$$



7.6 Exemplos resolvidos

Nesta seção vamos utilizar os conceitos introduzidos nas seções anteriores para resolver alguns problemas de cálculo de áreas e perímetros. Esperamos que estes exemplos, e a maneira como as soluções estão redigidas, ajudem os alunos a resolverem e a escreverem as soluções dos exercícios apresentados nas próximas seções.