Ciclo 1 – Encontro 1

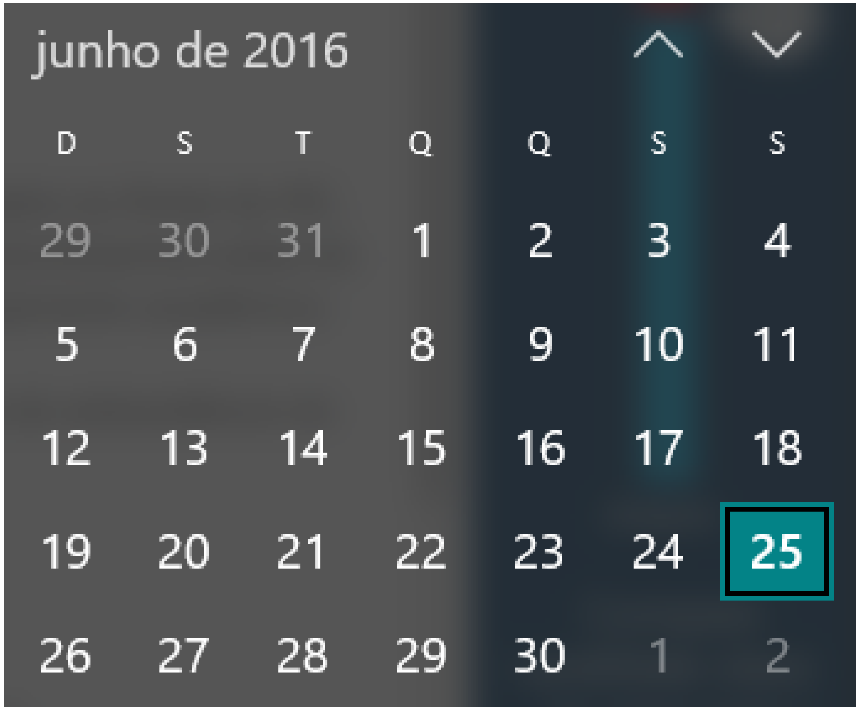
ALGORITMO DA DIVISÃO E PARIDADE

Nível 3
PO: Márcio Reis
11° Programa de Iniciação Científica Jr.

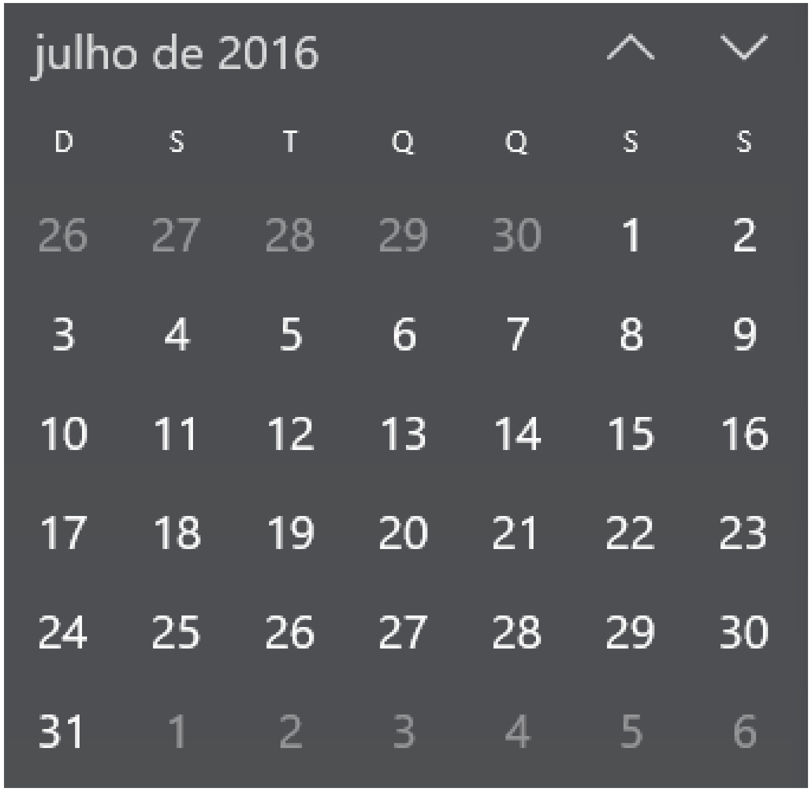
Apresentação

- Encontros semanais aos sábados, das 8h30 às 10h30, três vezes ao mês.
- Três encontros formam um ciclo: Aritmética, Contagem e Trigonometria.
- O Programa de Iniciação Científica Jr. será formado de seis ciclos.

Apresentação



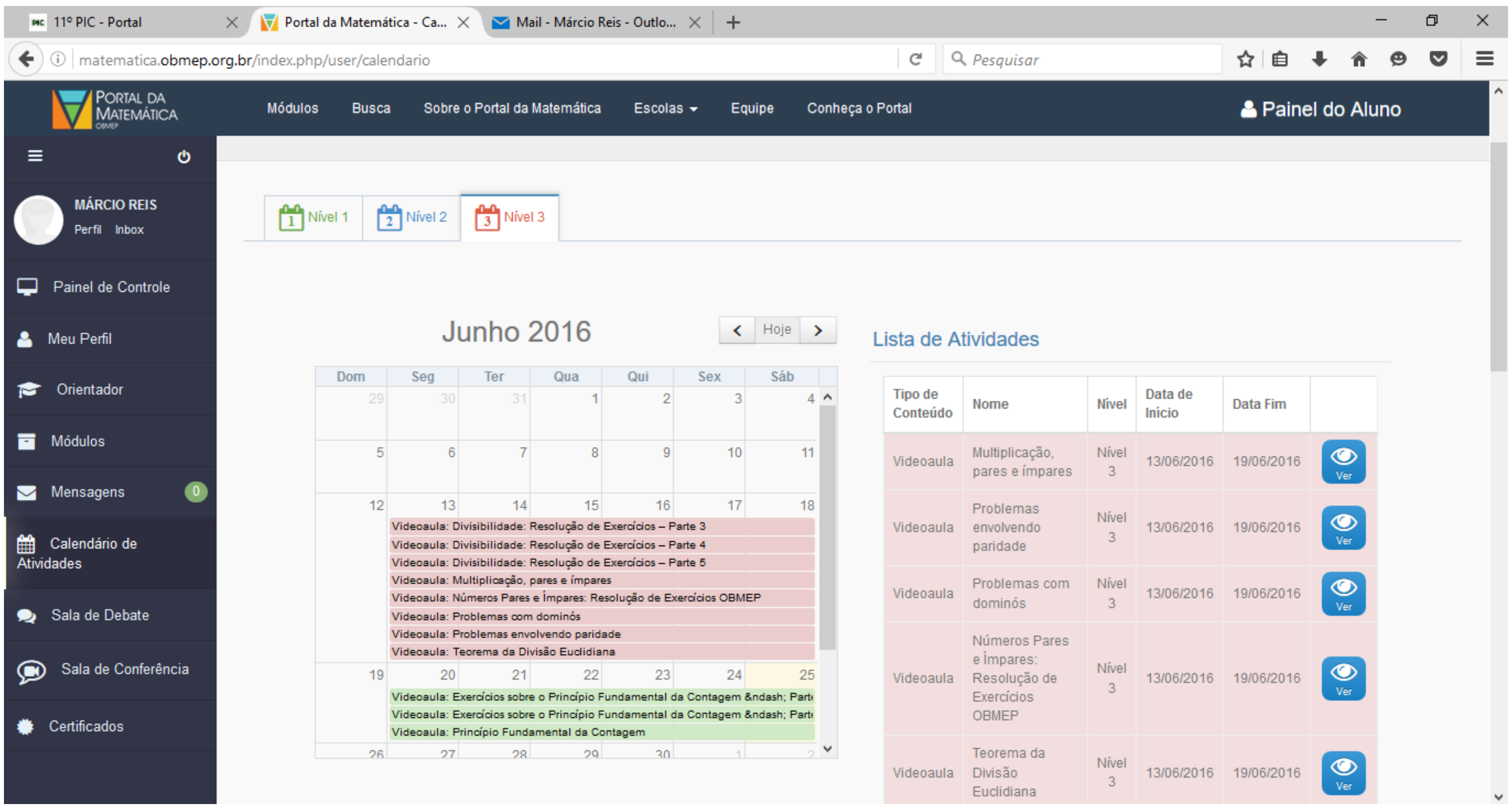
Apresentação



Apresentação

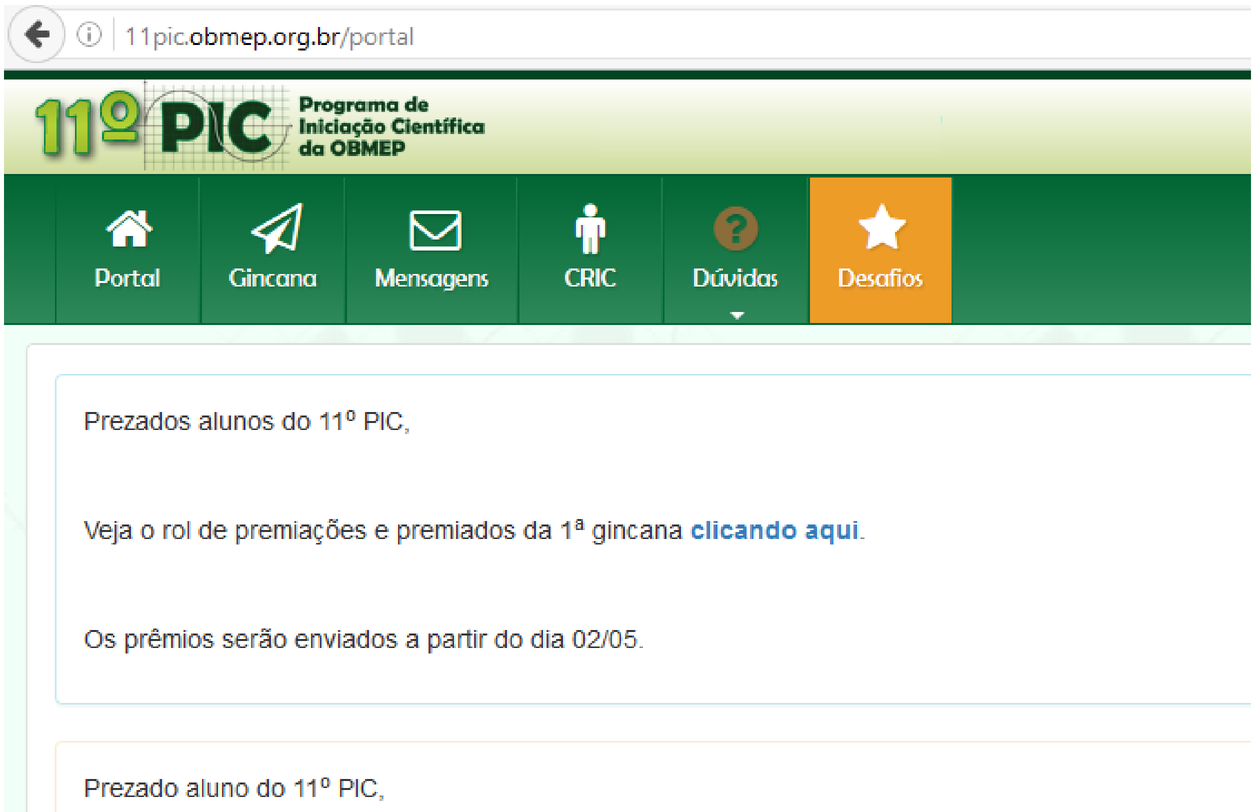
- 25/06: Ciclo 1 – Encontro 1 – Aritmética
- 02/07: Ciclo 1 – Encontro 2 – Contagem
- 09/07: Ciclo 1 – Encontro 3 – Geometria
- 16/07: Ciclo 2 – Encontro 1 – Aritmética
- 23/07: Férias escolares
- 30/07: Férias escolares
- 06/08: Ciclo 2 – Encontro 2 - Contagem

Apresentação



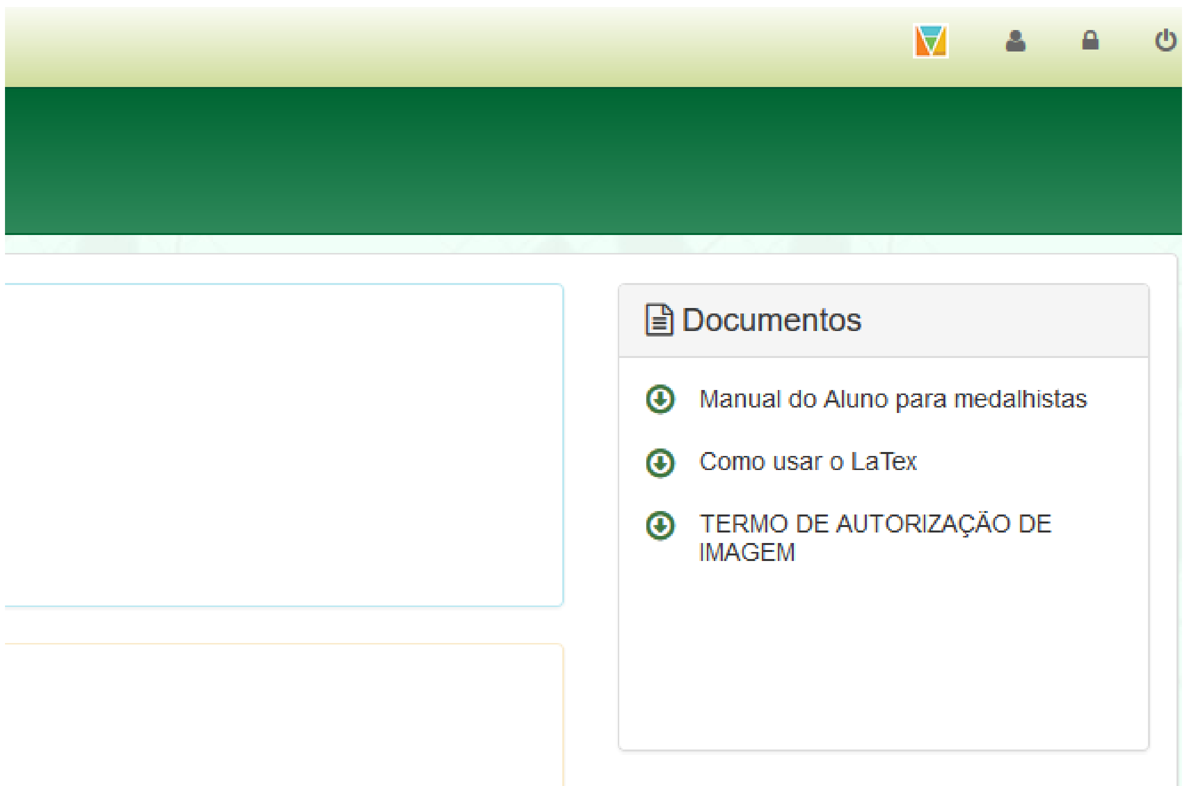
11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Apresentação



11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Apresentação



Apresentação

11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Apresentação

11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Algoritmo da Divisão e Paridade

- Apostila 1: INICIAÇÃO A ARITMÉTICA, de Abramo Hefez.

  Capítulo 3: Os Inteiros e suas Propriedades

  Seções 3.1 a 3.5:

  Os Inteiros;

  Múltiplos Inteiros de um Número;

  Divisores;

  Algoritmo da Divisão;

  Par ou Ímpar?

Algoritmo da Divisão e Paridade

- ***Os inteiros***
  - **b - a**, $b \geq a$.
  - E se $b<a$?
  - ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...
  - Números negativos e positivos
  - Números simétricos: 1 e -1, 2 e -2, 3 e -3, a e –a
    - $\mathbf{-(-a) = a}$
    - $\mathbf{b - a = b + (-a)}$
    - $\mathbf{(-a) \times b = a \times (-b) = -(a \times b)}$
  - Se $a<b$ e $c>0$, então $c \times a < c \times b$

Algoritmo da Divisão e Paridade

- ***Múltiplos e inteiros de um número***

$$a\mathbb{Z} = \{a \times d; d \in \mathbb{Z}\}$$

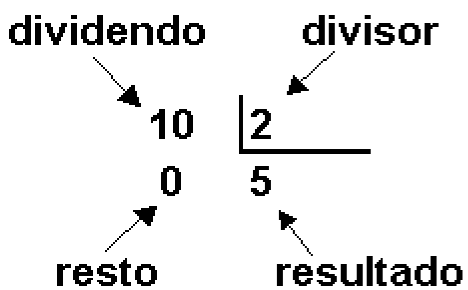
  - ***0*** é múltiplo de ***a***.
  - Se ***m*** é múltiplo de ***a***, então ***–m*** é múltiplo de ***a***.
  - Um múltiplo de um múltiplo de ***a*** é um múltiplo de ***a***.
  - Se ***m e m'*** são múltiplos de ***a***, então ***m+m'*** e ***m-m'*** também são múltiplos de ***a***.
  - Se ***m e m'*** são múltiplos de ***a***, então ***e x m + f x m'*** é um múltiplo de ***a***, quaisquer que sejam os inteiros ***e*** e ***f***.
  - Se ***m+m'*** ou ***m-m'*** é múltiplo de ***a*** e ***m*** é múltiplo de ***a***, então ***m'*** é múltiplo de ***a***.

Algoritmo da Divisão e Paridade

- ***Divisores***
  - ***d*** é um divisor de ***a*** se ***a = d x c***.
  - Quando ***a é múltiplo de d*** dizemos também que ***a é divisível por d*** ou que ***d divide a***;
  - Se d divide a, $d \mid a$
  - Se d não divide a, $d \nmid a$

Algoritmo da Divisão e Paridade

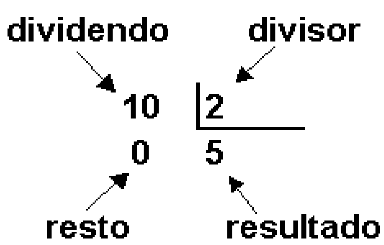
- ***Algoritmo da divisão***
  - Dividir um número por outro e obter um resto pequeno
  - Divisão euclidiana



  - 10 = 5 x 2 + 0
  - dividendo = quociente x divisor + resto
  - b = a x q + r

Algoritmo da Divisão e Paridade

- ***Paridade***



- $10 = 5 \times 2 + 0$
- $20 = 10 \times 2 + 0$
- $8 = 4 \times 2 + 0$
- $b = a \times 2 + 0$

- $11 = 5 \times 2 + 1$
- $21 = 10 \times 2 + 1$
- $9 = 4 \times 2 + 1$
- $b = a \times 2 + 1$

- $b = 2a + 0 \rightarrow b = 2a$

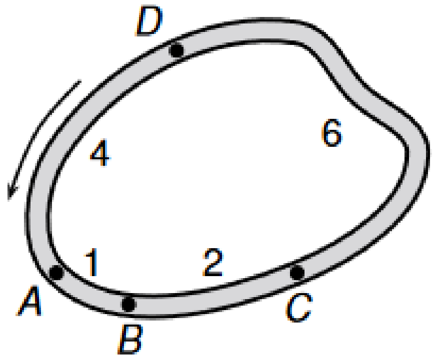
  é par

- $b = 2a + 1$

  é ímpar

Exercício 1

A figura representa o traçado de uma pista de corrida. Os postos *A*, *B*, *C* e *D* são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha.
Por exemplo, uma corrida de 17 km pode ser realizada com partida em *D* e chegada em *A*.



(a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?

(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

Exercício 1 - Solução

a) Uma volta completa em torno da pista tem a extensão de $1+2+6+4=13$ km. Por isso, para percorrer 14 km precisamos dar uma volta completa e percorrer mais 1 km. A única forma de percorrer 1 km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar 1 volta completa e terminar em B.

b) Como $100 = 7 \times 13 + 9$, uma corrida de 100 km corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais 9 km. A única forma de percorrer 9 km, respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.

Exercício 1 - Solução

c) b = a x q + r

dividendo (comprimento da corrida)	13 (divisor)
resto ("o que falta")	quociente (número de voltas completas)

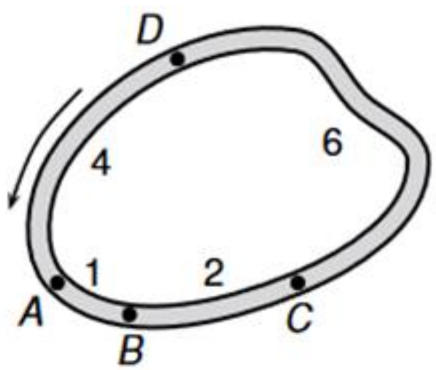
$$b = a \times 13 + r \rightarrow b = 13a + r$$

Restos possíveis: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12.

- 20 = 13 x 1 + 7
- 45 = 13 x 3 + 6
- 9 = 13 x 0 + 9

Exercício 1 - Solução

Extensão em km	*Posto de partida*	*Posto de chegada*
1	A	B
2	B	C
3	A	C
4	D	A
5	D	B
6	C	D
7	D	C
8	B	D
9	A	D
10	C	A
11	C	B
12	B	A
13	Qualquer um	O mesmo de partida



Exercício 1 - Solução

1ª possibilidade: a extensão é múltiplo de 13: nesse caso escolhemos um posto qualquer e a corrida começa e termina no nesse posto, dando um número inteiro de voltas completas na pista. Por exemplo se a extensão da corrida é $208 = 13 \times 16$ km, basta dar 16 voltas completas na pista.

2ª possibilidade: a extensão não é múltiplo de 13: nesse caso, o resto da divisão da extensão da corrida por 13 é um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Para cada um desses restos, a tabela acima fornece o posto de partida e o de chegada da corrida.Vejamos alguns casos:

- se o resto é 5, iniciamos a corrida no posto D e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem $109 = 8 \times 13 + 5$ km, ela deve começar em D, dar 8 voltas completas até retornar a D e percorrer uma vez o trecho de D até B.
- se o resto é 11, iniciamos a corrida no posto C e terminamos em B após um certo número de voltas completas na pista. Por exemplo, se a corrida tem $245 = 18 \times 13 + 11$ km, ela deve começar em C, dar 18 voltas completas até retornar a C e percorrer uma vez trecho de C até B.

Exercício 2

Fernando e Isaura inventaram um jogo diferente, cujas regras são as seguintes:

1. eles começam uma partida com 128 palitos cada um;
2. em cada jogada, eles tiram par ou ímpar; se sai par, Fernando dá metade dos palitos que tem para Isaura e, se sai ímpar, Isaura dá a metade dos palitos que tem para Fernando.
3. eles repetem o procedimento da regra 2 até que um deles fique com um número ímpar de palitos, quando a partida acaba. Ganha quem ficar com maior número de palitos.

Veja o que acontece em uma partida onde a seqüência das três primeiras jogadas é **par**, **ímpar**, **par**:

Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura	
128	128	**par** → 1ª jogada	64	192	**ímpar** → 2ª jogada	160	96	**par** → 3ª jogada	80	176	...

(a) Complete o esquema com o número de palitos de Fernando e Isaura, de acordo com as jogadas indicadas.

Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura	
128	128	**ímpar** → 1ª jogada			**ímpar** → 2ª jogada			**par** → 3ª jogada			...

(b) Uma partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos. Na última jogada saiu par ou ímpar?

(c) Qual foi a seqüência de pares e ímpares da partida que acabou quando Fernando ficou com 101 palitos?

(d) Mostre que qualquer partida acaba com exatamente sete jogadas.

11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Exercício 2 - Solução

(a)

Fernando	Isaura
128	128

$\xrightarrow[\text{1ª jogada}]{\text{ímpar}}$

Fernando	Isaura
192	64

$\xrightarrow[\text{2ª jogada}]{\text{ímpar}}$

Fernando	Isaura
224	32

$\xrightarrow[\text{3ª jogada}]{\text{par}}$

Fernando	Isaura
112	144

...

Exercício 2 - Solução

(b) *1ª solução*: Após qualquer jogada, o perdedor não pode ter mais que 127 palitos; de fato, se isso ocorresse, antes dessa jogada ele teria pelo menos $2 \times 128 = 256$ palitos, o que não pode acontecer. O ganhador terá então no mínimo $256 - 127 = 129$ palitos; logo, o ganhador da jogada anterior é aquele que tem mais palitos.

2ª solução: Suponhamos que em um dado momento Fernando tem x palitos e Isaura tem y palitos; notamos que como $x + y = 256$, que é um número par, então x e y são ambos pares ou ambos ímpares. Se o jogo ainda não acabou, então x e y são pares, e depois da jogada seguinte podem acontecer as seguintes situações:

- saiu **par**: nesse caso Fernando fica com $\frac{x}{2}$ palitos e Isaura com $y + \frac{x}{2}$ palitos, ou seja, Isaura fica com mais palitos do que Fernando;
- saiu **ímpar**: nesse caso Fernando fica com $x + \frac{y}{2}$ palitos e Isaura com $\frac{y}{2}$ palitos, ou seja, Fernando fica com mais palitos do que Isaura.

Isso mostra que basta saber quem tem o maior número de palitos para determinar o resultado da última jogada: se Isaura tiver mais, o resultado foi par e se Fernando tiver mais, o resultado foi ímpar. No nosso caso, a partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos e Isaura com $256 - 101 = 155$ palitos. Logo o resultado da última jogada foi **par**.

Exercício 2 - Solução

(c) Aplicamos o raciocínio do item (b) para recuperar as jogadas uma a uma em ordem inversa, do seguinte modo:

Fernando	Isaura
101	155

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2 \times 101 = 202$ palitos e Isaura tinha $256 - 202 = 54$ palitos;

Fernando	Isaura
202	54

Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2 \times 54 = 108$ palitos e Fernando tinha $256 - 108 = 148$ palitos;

Fernando	Isaura
148	108

Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2 \times 108 = 216$ palitos e Isaura tinha $256 - 216 = 40$ palitos;

Fernando	Isaura
40	216

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2 \times 40 = 80$ palitos e Fernando tinha $256 - 80 = 176$ palitos;

Fernando	Isaura
80	176

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2 \times 80 = 160$ palitos e Fernando tinha $256 - 160 = 96$ palitos;

Fernando	Isaura
160	96

Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2 \times 96 = 192$ palitos e Fernando tinha $256 - 192 = 64$ palitos;

Fernando	Isaura
64	192

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2 \times 64 = 128$ palitos e Isaura tinha $256 - 128 = 128$ palitos. Essa é a situação inicial do jogo.

Logo a seqüência de jogadas dessa partida foi **par**, **ímpar**, **par**, **par**, **ímpar**, **ímpar**, **par**.

Exercício 2 - Solução

(d) Vamos aproveitar o trabalho do item anterior e fazer o seguinte diagrama do número de palitos de Fernando e Isaura, jogada a jogada:

Fernando	$128 = 2^7 \times 1$	$64 = 2^6 \times 1$	$160 = 2^5 \times 5$	$80 = 2^4 \times 5$	$40 = 2^3 \times 5$	$148 = 2^2 \times 37$	$202 = 2^1 \times 101$	$101 = 2^0 \times 101$
Isaura	$128 = 2^7 \times 1$	$192 = 2^6 \times 3$	$96 = 2^5 \times 3$	$176 = 2^4 \times 11$	$216 = 2^3 \times 27$	$108 = 2^2 \times 27$	$54 = 2^1 \times 27$	$155 = 2^0 \times 155$

Esse diagrama e outros exemplos semelhantes sugerem que, em um momento qualquer de uma partida, o número de palitos de Fernando e o número de palitos de Isaura se escrevem, respectivamente, como $2^n a$ e $2^n b$, onde a e b são inteiros ímpares. Além disso, se o jogo não acabou, então depois da próxima jogada eles terão $2^{n-1}a'$ e $2^{n-1}b'$ palitos, respectivamente, onde a' e b' também são inteiros ímpares.

Vamos mostrar que essas afirmativas são verdadeiras. Suponhamos que em alguma etapa de uma partida os dois jogadores têm, respectivamente, $2^n a$ e $2^n b$ palitos, onde a e b são inteiros ímpares, e que o jogo não acabou, ou seja, que $n \geq 1$. Se a próxima jogada sair par, então Fernando ficará com $\frac{2^n a}{2} = 2^{n-1}a$ palitos e Isaura ficará com $2^{n-1}a + 2^n b = 2^{n-1}(a + 2b)$ palitos. Como a é ímpar então $b' = a + 2b$ também é ímpar. Desse modo, após essa jogada, Fernando e Isaura ficarão com $2^{n-1}a$ e $2^{n-1}b'$ palitos, onde a e b' são ímpares. Um argumento idêntico leva à mesma conclusão no caso em que a próxima jogada sair ímpar, e acabamos de provar nossa afirmativa.

O jogo começa com ambos os jogadores com $128 = 2^7 \times 1$ palitos, ou seja, com $n = 7$. Como uma partida acaba quando $n = 0$ e n decresce de uma unidade a cada jogada, segue imediatamente que qualquer partida acaba depois da sétima jogada.

Exercício 3

Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \to 22 \to 11 \to 12 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem *comprimento* 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma *sequência ímpar*.

a) Escreva a sequência que começa com 37.

b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.

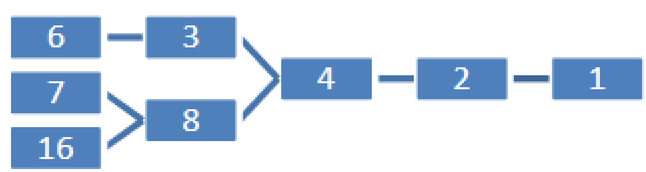
c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

Exercício 3 - Solução

a) A sequência é $37 \to 38 \to 19 \to 20 \to 10 \to 5 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$.

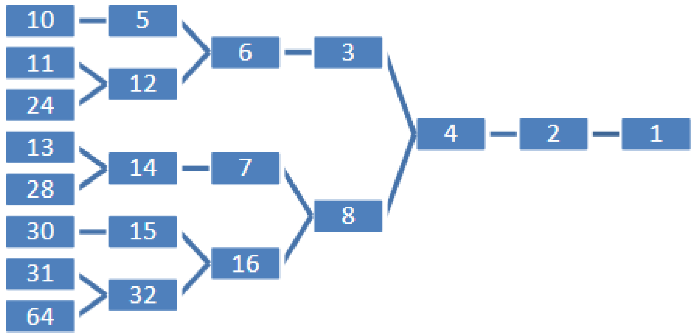
b) A única sequência de comprimento 3 é $4 \to 2 \to 1$. As sequências de comprimento 4 são $3 \to 4 \to 2 \to 1$ e $8 \to 4 \to 2 \to 1$; elas são obtidas a partir de $4 \to 2 \to 1$, a primeira acrescentando $4 - 1 = 3$ no início da sequência e a segunda acrescentando $2 \times 4 = 8$ no início da sequência. Do mesmo modo, a sequência ímpar $3 \to 4 \to 2 \to 1$ dá origem à sequência par $6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$ e a sequência par $8 \to 4 \to 2 \to 1$ dá origem à sequência ímpar $7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ e à sequência par $16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$. Temos assim as três únicas sequências de comprimento 5, sendo duas delas pares e uma ímpar. O raciocínio pode ser representado pelo esquema abaixo.



11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Exercício 3 - Solução

c) *1ª solução:* Repetindo o esquema do item anterior, temos:



e assim temos 3 sequências pares e 2 ímpares de comprimento 6 e 5 sequências pares e 3 ímpares de comprimento 7.

2ª solução: Observamos que a sequência ímpar de comprimento cinco vai gerar 1 sequência par de comprimento seis; já as 2 sequências pares de comprimento cinco vão gerar 2 sequências pares de comprimento seis e 2 sequências ímpares de comprimento seis. Assim, temos 2 sequências ímpares de comprimento seis e $1+2=3$ sequências pares de comprimento seis, num total de $2+3=5$ sequências de comprimento 6. O mesmo argumento mostra que há 8 sequências de comprimento sete, sendo três ímpares e cinco pares..

Exercício 3 - Solução

Observação: A repetição desse argumento para valores sucessivos do comprimento mostra que, a partir do comprimento 3, o número de sequências ímpares é 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,..., o número de sequências pares é 2, 3, 5, 8, 13,... e o número total de sequências é 3, 5, 8, 13, 21, ... Cada termo dessas sequências de valores, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores; vemos assim que essas sequências, com a eventual omissão de termos iniciais, são a sequência 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,..., conhecida como *sequência de Fibonacci*.

comprimento	**5**	**6**	**7**	**...**	**15**	**16**
Ímpares	1	2	3	...	144	233
pares	2	$2+1=3$	$3+2=5$	...	233	$233+144=377$
total	$1+2=3$	$2+3=5$	$3+5=8$	...	$144+233=377$	$233+377=610$

Exercício 3 - Solução

d) *1ª solução:* As 144 sequências ímpares de comprimento quinze vão gerar 144 sequências pares de comprimento dezesseis; já as 233 sequências pares de comprimento quinze vão gerar 233 sequências pares de comprimento dezesseis e 233 sequências ímpares de comprimento dezesseis. Assim, temos 233 sequências ímpares de comprimento dezesseis e $377 = 233 + 144$ sequências pares de comprimento dezesseis, num total de $233 + 377 = 610$ sequências.

2ª solução: A parte da sequência de Fibonacci que nos interessa é 1, 2, 3, 5, 8,....., 144, 233, 377, 610,... . O número de sequências ímpares de comprimento 15 (resp. 16) é o 15º (resp. 16º) termo dessa sequência, que é 144 (resp. 233); o número de sequências pares de comprimento 15 (resp.16) é o 16º (resp. 17º) termo, que é 233 (resp. 377) e o número total é o 17º (resp. 18º) termo, que é 377 (resp. 610).

Estudar para o próximo encontro!

- Texto "O Princípio Fundamental da Contagem", de Fabrício Siqueira Benevides, disponível em *http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/crfd0k3f2sggg.pdf*