1) A = 11 quadradinhos.
P = 20

Podemos acrescentar quadradinhos até formar um quadrado na figura completa sem alterar o perímetro. Neste caso A = 25 quadradinhos. Acrescentamos 14 quadradinhos.

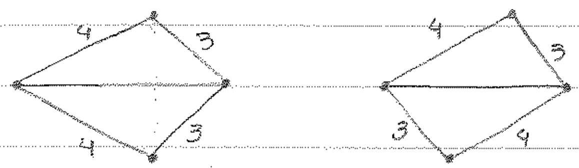
2) Letra e

3) a) I ⇒ 3 já que os comprimentos dos lados unidos são iguais e em cada Δ tem um lado livre com comp indicado por 4 e 6.

b) $P_I = 2.4 + 2.6 = 8 + 12 = 20$ cm

$P_{II} = \cancel{3} + 4 + 4 + 6 + 6 - \cancel{3} = 20$ cm

c) Menor perímetro: unindo os lados de tamanho 6 cm: $P = 2.4 + 2.3 = 8 + 6 = 14$ cm.



4) $A + B + C = 3 \times 4 + \frac{6 \times 4}{2} + \frac{(3+2)2}{2} =$

$= 12 + 12 + 5 = 29$

$D + E + F = \frac{(4+2)2}{2} + \frac{(5+2)3}{2} + \frac{2.5}{2} =$

$= 6 + \frac{21}{2} + 5 = 11 + \frac{21}{2} = 21,5$

(5) $A_{ABCD} = 40\ cm^2$

$A_{PQRS} = \frac{40}{2} = 20\ cm^2$

$A_{PQT} = \frac{20}{2} = 10\ cm^2$

(6) Em um quadrado ABCD há 5 quadrados sombreados.

$A_{ABCD} = 100 \Rightarrow A_{somb} = 20.$

(7) No quadrado ABCD há 18 quadradinhos.

$A_{quadradinho} = \frac{18 \cdot 18}{18} = 18.$

$A_{somb} = 18 \cdot 4 = 72.$

(8) $A_L = 6 \cdot \frac{20 \cdot 30}{2} = 600 \cdot 3 = 1800\ cm^2$

$A_{\omega} = 4 \cdot \frac{20 \cdot 50}{2} = 1000 \cdot 2 = 2000\ cm^2$

$A_T = 3800\ cm^2$

(9) $A_Q = 36 \Rightarrow \ell = 6.$ b)

$A_R = 6 \cdot 12 = 72\ cm^2$

$P_R = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 12 = 36\ cm$

a) $x \cdot 12 = 108 \Rightarrow x = 108 : 12 \Rightarrow x = 9\ cm$

$P = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 12 = 18 + 24 = 42\ cm.$

c) $(x+y)(x+y) = 108 \Rightarrow 6y \cdot 6y = 108 \Rightarrow y^2 = \frac{108}{36}^{\div 12}$

$2x + 2y = 3 \cdot 4y = 12y$

$x + y = 6y$

$\Rightarrow y^2 = \frac{9}{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}$ //

$x = 5y \Rightarrow x = 5\sqrt{3}$

$A_{\square} = (5\sqrt{3})^2 = 25 \cdot 3 = 75 \text{ cm}^2.$

10) $A_{\text{ret. menor}} = \dfrac{720}{9} = 80 \text{ cm}^2$

$X \cdot Y = 720$

$X = 5x = 4y \Rightarrow x = \dfrac{4}{5}y$

$Y = x + y \Rightarrow Y = \dfrac{4}{5}y + y = \dfrac{9}{5}y$

$X \cdot Y = 4y \cdot \dfrac{9}{5}y = 720 \Rightarrow 36y^2 = 720 \cdot 5 \quad :36$

$\Rightarrow y^2 = 20 \cdot 5 \Rightarrow y = 10 \text{ cm} \;// \Rightarrow x = 8 \text{ cm} \;//$

$P_{\text{ret. menor}} = 2x + 2y = 16 + 20 = 36 \text{ cm}.$

11) $A_{\text{painel}} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}^2$

$A_{ABEF} = \dfrac{(4+2)h}{2} = 3h$

$A_{CDEF} = \dfrac{(4+2)(4-h)}{2} = 3(4-h) = 12 - 3h$

$A_{\text{somb}} = A_{\text{painel}} - (A_{ABEF} + A_{CDEF}) =$

$= 16 - (\cancel{3h} + 12 - \cancel{3h}) = 4 \text{ cm}^2.$

12) PQ é perpendicular a AB.

Os triângulos APQ e BPQ têm a mesma área.

$h^2 = 9^2 + x^2$ e $h^2 = (8-x)^2 + 7^2$

$9^2 + x^2 = (8-x)^2 + 7^2$

$81 + \cancel{x^2} = 64 - 16x + \cancel{x^2} + 49$

$16x = 32 \Rightarrow x = 2$

$A_{trapézio} = \dfrac{(9+7)8}{2} = 64$ //

$A_3 = \dfrac{6 \cdot 7}{2} = 21$

$A_1 = \dfrac{2 \cdot 9}{2} = 9$

$A_1 + A_2 + A_2 + 21 = 64$

$9 + A_2 + A_2 + 21 = 64$

$2A_2 = 64 - 30 \Rightarrow A_2 = 17$

$A_1 + A_2 = 9 + 17 = 26$ //

(13) $A_T = 100\ m^2$ a)

$A_{triângulos} = 4 \cdot \dfrac{x \cdot (10-x)}{2}$

$x = 2 \Rightarrow A_{triângulos} = 2 \cdot 2 \cdot 8 = 32\ m^2$

$A_{grama} = 100 - 32 = 68\ m^2$ //

b) $A(x) = 100 - 2x(10-x)$
$A(x) = 100 - 20x + 2x^2$ //

c) grama $\Rightarrow$ R\$4,00 por m^2
pedra $\Rightarrow$ R\$3,00 por m^2

Custo dos canteiros: $\underbrace{C_{grama}}_{4\cdot(100-20x+2x^2)} + \underbrace{4 \cdot C_{pedra}}_{4 \cdot 3 \cdot \frac{x(10-x)}{2} = 6x(10-x)}$

$C(x) = 400 - 80x + 8x^2 + 60x - 6x^2$
$C(x) = 400 - 20x + 2x^2$

$C_{mín} = y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{(400 - \overbrace{4 \cdot 2 \cdot 400}^{3200})}{4 \cdot 2} =$

$= \dfrac{2800}{8} = 350 \Rightarrow$ R\$350,00 //

d) $C(x) = 358 \Rightarrow 400 - 20x + 2x^2 = 358$
$2x^2 - 20x + 42 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0$
$x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} = \dfrac{10 \pm 4}{2}$ $\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$x = 7 \Rightarrow A(x) = 100 - 20 \cdot 7 + 2 \cdot 49$

$A(x) = 100 - 140 + 98 = 58$

$x = 3 \Rightarrow A(3) = 100 - 20 \cdot 3 + 2 \cdot 9$

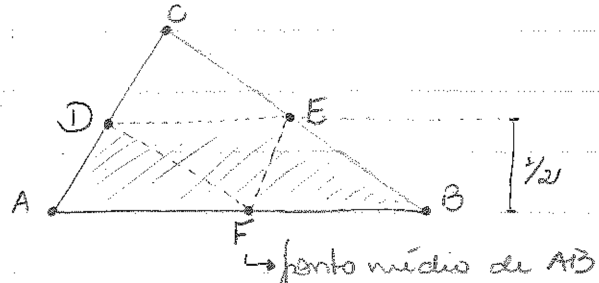
$A(3) = 100 - 60 + 18 = 58$

Maior área: $58\,m^2$.

14) a) $A_{triang} = A_{ret} = k$

$$\frac{AB \cdot 1}{2} = k = PQ \cdot 1 \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = 2$$

b) $x = 1/2 \Rightarrow$



Quando $x = 1/2$, D e E coincidem com os pontos médios dos segmentos AC e BC, respectivamente. Então considerando F o ponto médio do segmento AB e traçando o triângulo DEF, podemos dividir o triângulo ABC em 4 triângulos iguais, dos quais 3 formam o trapézio ABED. Assim:

$$A_{ABED} = \frac{3}{4} A_{ABC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{AB \cdot 1}{2} = \frac{3AB}{8}$$

$$\hookrightarrow = A_{PQNM} = PQ \cdot f(x) = \frac{AB}{2} \cdot f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} \cancel{AB} = \frac{\cancel{AB}}{2} \cdot f(1/2) \Rightarrow f(1/2) = \frac{3}{4}$$

c) $A_{trapézio} = (AB + DE)\dfrac{x}{2}$

ABC e DEC são triângulos semelhantes. Então:

$$\underbrace{\frac{1-x}{1}}_{\text{alturas}} = \underbrace{\frac{DE}{AB}}_{\text{bases}} \Rightarrow DE = (1-x)\,AB$$

$$A_{trapézio} = [AB + (1-x)AB]\,\frac{x}{2} = (2AB - xAB)\,\frac{x}{2} =$$

$$= AB \cdot x - \frac{AB}{2}x^2$$

$$A_{retângulo} = PQ \cdot f(x) = \frac{AB}{2} \cdot f(x)$$

$$A_{trap} = A_{ret} \Rightarrow \cancel{AB}\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = \cancel{AB} \cdot \frac{f(x)}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow f(x) = 2x - x^2$$

zeros: $2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

$x_v = 1 \Rightarrow y_v = 2 - 1 = 1$

16 b) Considerando o quadrado de base x. A área do triângulo cinza é $1/4$ da área deste quadrado. Ou seja, a área da região cinza é: $x^2/4$. Isto ocorre enquanto $0 < x < 2$.

Quando $2 < x < 4$, temos a área da região cinza sendo a área de um retângulo (com base $4-x$) mais a área de um triângulo idêntico ao do caso anterior. A área do retângulo é: $(4-x)(x-2) = -x^2 + 6x - 8$

Assim temos:

$$\frac{(4-x)^2}{4} - x^2 + 6x - 8 =$$

$$= \frac{16 - 8x + x^2}{4} - x^2 + 6x - 8 =$$

$$= 4 - 2x + \frac{x^2}{4} - x^2 + 6x - 8 = -\frac{3}{4}x^2 + 4x - 4$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2/4, & se\ 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{4}x^2 + 4x - 4, & se\ 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

a) $x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1^2}{4} = \frac{1}{4}$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = \underbrace{A_{ret}}_{4} + \underbrace{A_{triân}}_{1 \cdot 1/4 = 1/4}$

base: $4-3=1$ e altura: $2-(4-3)=1$

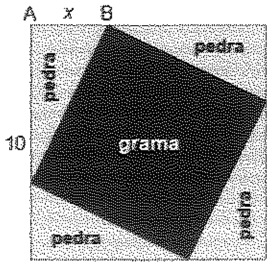
$f(3) = 1 \cdot 1 + \frac{1}{4} = \frac{4+1}{4} = \underbrace{\frac{5}{4}}_{1,25}$

c) $f(4) = -3 \cdot \frac{\cancel{16}^{4}}{\cancel{4}} + 16 - 4 = -12 + 16 - 4 = 0$

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-3/4)} = \frac{4}{3/2} = \underbrace{\frac{8}{3}}_{2,67}$

$y_v = -\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{64}^{16}}{\cancel{9}_{3}} + \overbrace{4 \cdot \frac{8}{3}}^{32} - 4 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{16-12}{3} = \underbrace{\frac{4}{3}}_{1,33}$

(c) Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?
(d) Se o prefeito tem apenas R$ 358,00 para gastar com os cinco canteiros, qual é a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?



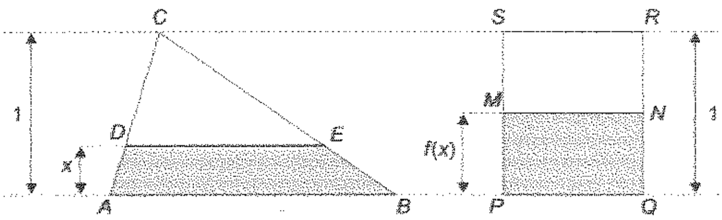
Problema 14

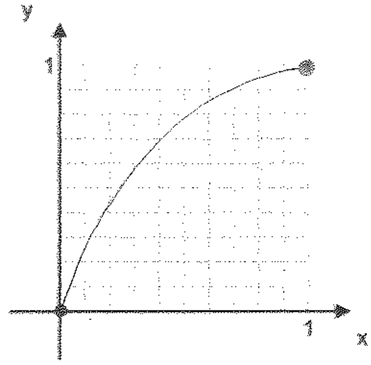
Na figura, o triângulo ABC e o retângulo PQRS têm a mesma área e a mesma altura 1. Para cada valor de x entre 0 e 1 desenha-se o trapézio ABED de altura x e depois o retângulo PQNM de área igual à do trapézio, como na figura. Seja f a função que associa a cada x a altura do retângulo PQNM.

(a) Qual é a razão entre AB e PQ?

(b) Qual é o valor de $f(\frac{1}{2})$?

(c) Ache a expressão de $f(x)$ e desenhe o gráfico de f no plano cartesiano abaixo.





Problema 15

Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida 2 são posicionados como mostra a figura 1. A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas figuras 2 e 3, x indica a distância entre os vértices A e B dos dois triângulos.

Para cada x no intervalo [0,4], seja $f(x)$ a área da região comum aos dois triângulos (em cinza nas figuras).

(a) Calcule $f(1)$ e $f(3)$.

(b) Encontre as expressões de f nos intervalos [0,2] e [2,4] e esboce o seu gráfico no plano cartesiano abaixo.

(c) Qual é a área máxima da região comum aos dois triângulos?

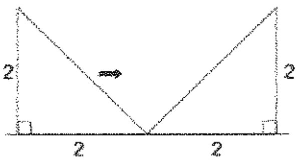


Figura 1

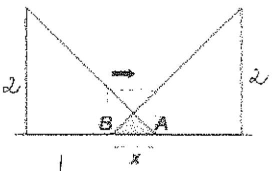


Figura 2

$x = 1$

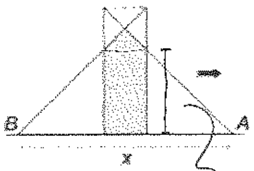


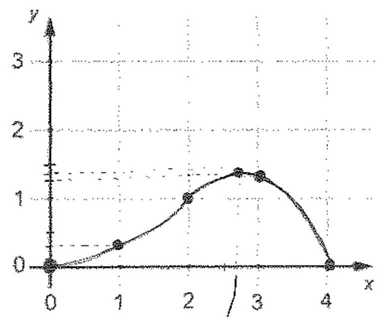
Figura 3

$4 - x$

$2 - (4 - x)$

$2 - 4 + x$

$x - 2$



$x_v \cong 2,67$