Combinações

Exercício: Em um grupo de trinta estudantes, dois serão escolhidos para participar de uma competição matemática. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Solução: O primeiro participante pode ser escolhido de 30 maneiras. Independente da escolha do primeiro , o segundo pode ser escolhido de 29 maneira. Mas agora cada par foi contado 2 vezes. Logo, a resposta é $\frac{30 \times 29}{2} = 435$ maneiras.

Suponha agora que precisamos escolher um time não com duas pessoas, mas com k, e que o grupo consiste em n estudantes, não de 30. O número de maneiras que isto pode ser feito é chamado o número de combinações de k elementos escolhidos entre n elementos e é denotado por C_k^n

Propriedade 1: $C_{n-k}^n = C_k^n$

Demostração: Note que uma escolha de k participantes é equivalente a uma escolha de $n - k$ estudantes que não irão participar da competição. Logo, o número de maneiras de escolher k pessoas entre n é igual ao número de maneiras de escolher $n - k$ pessoas entre n; ou seja, $C_{n-k}^n = C_k^n$.

Propriedade 2: $C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n$

Demostração: Suponha que o grupo tem $n + 1$ estudantes. Considere um deles e denote-o por A. Vamos dividir o conjunto de todos os times possíveis em dois subconjuntos: os que contém A e os que não contém A. A cardinalidade de primeiro conjunto é C_{k-1}^n, já que precisamos completar o time com mais $k - 1$ estudantes escolhidos entre os n restantes. O número de times no segundo conjunto é igual a C_k^n. Agora precisamos escolher o time inteiro entre os n estudantes restantes. Portanto, $C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n$.

Exercício: De quantas maneiras podemos escolher um time de três estudantes em um grupo de 30?

Solução: O primeiro estudante pode ser escolhido de 30 maneiras, o segundo de 29 maneiras e o terceiro de 28 maneiras. Logo, temos $30 \times 29 \times 28$ maneiras. No entanto, cada time foi contado diversas vezes: o mesmo trio de estudantes pode ter sido escolhido de maneiras diferentes. Por exemplo, escolher o estudante A primeiro, depois o estudante B e, depois o estudante C é o mesmo que escolher C primeiro, depois A e depois B. Como o número de permutações de 3 elementos é 3!, cada time foi contado exatamente 6 vezes. Portanto $C_3^{30} = \frac{(30 \times 29 \times 28)}{3!}$

Da meesma forma podemos deduzir uma fórmula para calcular c_k^n, para n e K arbitrários.

$$C_k^n = \frac{(n-1)(n-2...(n-k+1))}{k!}.$$

Bolas e Divisórias

Exercício: Seis caixas estão numeradas de 1 a 6. De quantas maneiras podemos colocar 20 bolas idênticas nelas de modo que nenhuma delas fique vazia?

Solução: Vamos arrumar as bolas em uma fileira. Para determinar a distribuição das bolas nas caixas, precisamos dividir esta fileira em 6 grupos de bolas usando 5 divisórias: o primeiro grupo para a primeira caixa, o segundo grupo para a segunda caixa, etc. Logo, o número de maneiras de distribuir nossas bolas nas caixas é igual ao número de maneiras de colocar 5 divisórias entre as bolas na fileira. Qualquer divisória pode ser colocada em qualquer um dos 19 espaços entre as bolas (existem $19 = 20 - 1$ espaços entre 20 bolas) e duas divisórias não podem ficar no mesmo espaço (isto significaria que uma das caixas ficaria vazia). Portanto, o número de todas as partições possíveis é C_5^{19}

Exercício: Uma professora tem 3 bolas de gude para distribuir para 5 meninos (digamos, Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo). De quantos modos ela pode fazer essa distribuição:

(a) Supondo que ela dê bolas para 3 alunos distintos?

Solução: Neste caso, ela deve escolher 3 dentre os 5 meninos para receber as bolas, o que pode ser feito de $C_5^3 = 10$ modos.

(b) Supondo que os contemplados possam ganhar mais de uma bola? (Por exemplo, Carlos pode receber todas as bolas.)

Solução: Listamos abaixo algumas possíveis escolhas dos contemplados:

Alfredo, Bernardo, Eduardo
Alfredo, Alfredo, Diogo
Alfredo, Diogo, Diogo
Carlos, Carlos, Carlos

Esses grupamentos são chamados de combinações completas (ou com repetição) dos 5 meninos tomados 3 a 3. Note que o que distingue as diferentes distribuições é o número de bolas que cada aluno recebe. Portanto, o número de possibilidades é igual ao número de listas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de números inteiros não negativos (representando o número de objetos dados a Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo, respectivamente) que satisfazem a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$.

Neste caso simples, podemos resolver o problema separando a contagem em casos. A primeira possibilidade é a de que haja três premiados, cada um ganhando uma bola. Como vimos acima, isto pode ser feito de $C_5^3 = 10$ modos. A segunda possibilidade é de que haja dois premiados, um ganhando 1 bola e outro 2 bolas. O primeiro menino pode ser escolhido de 5 modos, e o segundo, de 4; logo, há $4 \times 5 = 20$ maneiras de distribuir as bolas para dois dos meninos. Finalmente, as bolas podem ir todas para um só menino, que pode ser escolhido de 5 modos. Portanto, o número total de possibilidades é $10 + 20 + 5 = 35$.

No entanto, dividir a contagem em casos, como fizemos acima, não vai ser prático caso o número de bolas e meninos seja maior. Para contar de modo eficiente o número de distribuições, vamos recorrer a um truque, que nos permite transformar este problema em outro mais simples. Para formar as diferentes distribuições, colocamos as bolas em fila e as separamos em cinco lotes (correspondentes a cada um dos meninos), através de traços verticais. É claro que, neste caso, alguns desses lotes estarão vazios.

Vejamos alguns exemplos:

- 0||0|0| corresponde a dar 1 bola para Alfredo, para Carlos e para Diogo, enquanto Bernardo e Eduardo não ganham bolas.

- ||00||0 corresponde a dar 2 bolas para Carlos e 1 para Eduardo, enquanto Alfredo, Bernardo e Carlos não ganham bolas.

Note que há uma correspondência perfeita entre as possíveis distribuições e as listas formadas por 3 bolas e 4 traços. Mas estas últimas nós já sabemos contar! Basta escolher 3 das 7 posições para colocar as bolas, o que pode ser feito de $C_7^3 = 35$ maneiras, como encontramos acima.

Naturalmente, podemos aplicar esta solução para o problema geral de contar o número de maneiras de distribuir p objetos para n pessoas (ou seja, de calcular o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$, ou ainda, de calcular o número CR_n^p de combinações completas de n elementos tomados p a p). Temos p bolas, que devem ser separadas por $n - 1$ tracinhos. Ou seja, precisamos escolher p das $n + p - 1$ posições para as bolas. A resposta, portanto, é $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$.

Exercício: Uma indústria fabrica 5 tipos de balas, que são vendidas em caixas de 20 balas, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos diferentes de caixa podem ser fabricados?

Solução: Para formar uma caixa, devemos selecionar 20 dentre os 5 tipos, valendo repetição na escolha. Ou seja, devemos formar soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$, onde x_i é o número de balas do tipo i. A resposta é $CR_{20}^5 = C_{24}^{20} = 10626$

Exercício: De quantas maneiras pode-se enviar seis cartas urgentes por seis mensageiros se cada carta pode ser entregue a qualquer um dos mensageiros?

Solução: Observe que não existem quaisquer restrições sobre a quantidade de cartas que um dado mensageiro deverá levar. Então, assuma que x_i seja a quantidade de cartas que o mensageiro i irá levar, $i = 1, 2, ..., 6$. Portanto, o problema se resume a encontrar o número de soluções inteiras e positivas da equação $x_1 + ... + x_6 = 6$, ou seja,

$$C_{6+6-1}^{6-1} = C_{11}^{5} = 330$$