# Módulo de Princípios Básicos de Contagem

## Princípio fundamental da contagem

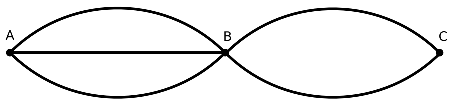
### Segundo ano

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

**Princípio Fundamental de Contagem**

# 1 Exercícios Introdutórios

**Exercício 1.** Considere três cidades $A$, $B$ e $C$, de forma tal que existem três estradas ligando $A$ à $B$ e dois caminhos ligando $B$ à $C$.




a) De quantas formas diferentes podemos ir de $A$ até $C$, passando por $B$?

b) De quantas formas diferentes podemos ir de $A$ até $C$, passando por $B$, e voltar para $A$ novamente, passando por $B$?

c) De quantas formas diferentes podemos ir de $A$ até $C$, passando por $B$, e depois voltar para $A$ sem repetir estradas e novamente passando por $B$?

**Exercício 2.** Um construtor dispõe de quatro cores (verde, amarelo, cinza e bege) para pintar cinco casas dispostas lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com apenas uma cor e que duas casas consecutivas não possuam a mesma cor. Por exemplo, duas possibilidades diferentes de pinturas estão indicadas abaixo:

Primeira: verde, amarelo, bege, verde, cinza;
Segunda: verde, cinza, verde, bege, cinza.
Quantas são as possibilidades?

**Exercício 3.** Em um computador digital, um bit é um dos algarismos 0 ou 1 e uma palavra é uma sucessão de bits. Por exemplo, todas as possíveis palavras de dois bits são: 00, 01, 10, 11. Qual é o número de palavras distintas de 32 bits?

**Exercício 4.** De quantas formas se pode dispor quatro pessoas em fila indiana?

**Exercício 5.** Quantos são os números de 3 algarismos distintos?

**Exercício 6.** Quantos são os números de 4 algarismos formados apenas por algarismos pares?

**Exercício 7.** Em uma competição de atletismo, participam 8 corredores. De quantas maneiras diferentes pode ser composto o pódium com os três primeiros colocados?

**Exercício 8.** De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 6 cadeiras alinhadas?

**Exercício 9.** Uma prova possui dez questões do tipo múltipla escolha, com cinco alternativas cada. De quantas maneiras diferentes é possível responder esta prova, marcando todas as dez respostas?

**Exercício 10.** As placas de veículos são compostas por 3 letras e 4 algarismos. Qual é o total de placas diferentes que podem existir?

# 2 Exercícios de Fixação

**Exercício 11.** Dispondo dos algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, pode-se formar quantos números

a) de quatro algarismos?

b) de quatro algarismos distintos?

c) ímpares de três algarismos distintos?

**Exercício 12.** Dispondo dos algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, quantos números pares de quatro algarismos distintos podem ser formados?

**Exercício 13.** Um automóvel comporta dois passageiros nos bancos da frente e três no banco traseiro. Qualquer uma das 7 pessoas, dentre elas Pedro que tem 5 anos de idade e portanto não pode sentar na parte da frente do carro, pode ser escolhida para entrar no automóvel. Calcule o número de maneiras distintas de lotar este automóvel.

**Exercício 14.** As letras em código Morse são formadas por sequências de traços $(-)$ e pontos $(\cdot)$, sendo permitida repetições. Por exemplo $(-)(-)(-)(\cdot)$. Quantas letras podem ser representadas usando:

a) exatamente 3 símbolos?

b) usando no máximo 8 símbolos?

**Exercício 15.** Vai ser formada uma fila com 6 pessoas, dentre as quais Pedro e Ana. De quantas maneiras esta fila poderá ser formada se:

a) Ana deve ser a primeira da fila?

b) Ana ou Pedro devem ser o primeiro da fila?

c) Ana e Pedro não devem ficar juntos na fila?

# 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**Exercício 16.** João escreveu todos os números de 4 dígitos contendo cada um dos algarismos de 1 até 4 exatamente uma vez. Em quantos desses números a soma dos dois últimos dígitos é maior que a soma dos dois primeiros?

a) 8.

b) 12.

c) 4.

d) 16.

e) 2.

**Exercício 17.** Quantos são os números ímpares, de cinco algarismos, nos quais a soma dos algarismos das unidades e das dezenas é 16 e a soma de todos os algarismos é um múltiplo de 5?

a) 90.

b) 180.

c) 216.

d) 360.

e) 532.

**Exercício 18.** Ana quer fazer duas aulas de natação por semana, uma de manhã e a outra à tarde. A escola de natação tem aulas de segunda a sábado às $9h$, $10h$ e $11h$ e de segunda a sexta às $17h$ e $18h$. De quantas maneiras distintas Ana pode escolher o seu horário semanal, de modo que ela não tenha suas aulas no mesmo dia nem em dias consecutivos?

a) 96.

b) 102.

c) 126.

d) 144.

e) 180.

**Exercício 19.** Bitonho está jogando em seu computador o Super Paciência, cujo objetivo é preencher um tabuleiro $2\times2014$ com algarismos 0's e 1's de modo que dois números vizinhos iguais em uma mesma linha impedem que se preencha também com números iguais as casas correspondentes da outra linha. Por exemplo, no desenho abaixo, os valores de $A$ e $B$ não podem ser iguais.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | ... | 1 | 1 | ... |
| 1 | 1 | 0 | ... | A | B | ... |

Determine o número de possíveis preenchimentos distintos de tal tabuleiro seguindo as regras do Super Paciência.

**Respostas e Soluções**

# 1 Exercícios Introdutórios

**1.** (Extraído da Vídeo Aula)

a) Pelo Princípio Fundamental de Contagem (PFC), são $3 \cdot 2 = 6$ possibilidades.

b) Como, para ir são 6 possibilidades, para voltar também são 6. Pelo PFC, $6 \cdot 6 = 36$possibilidades.

c) Como, para ir são 6 possibilidades, mas apenas uma delas foi escolhida, para não repetir estradas na volta, resta 1 possiblidade de $C$ para $B$ e 2 de $B$ para $A$. Temos então $6 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ possibilidades.

**2.** (Extraído da Vídeo Aula) Iniciando a pintura pela primeira casa, que pode ser pintada com qualquer uma das quatro cores, seguindo para sua vizinha, que não poderá ser pintada apenas com a cor utilizada na primeira, e seguindo o mesmo raciocínio até a última casa, temos $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$ possibilidades.

**3.** (Extraído da Vídeo Aula) Como cada bit equivale a uma letra, temos $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{32\ vezes} = 2^{32}$ palavras.

**4.** (Extraído da Vídeo Aula) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

**5.** Como o algarismo da centena não pode ser 0, o total de possibilidades é $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

**6.** Como existem 5 algarismos pares e o algarismo da unidade do milhar não pode ser 0, o total de possibilidades é $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$.

**7.** Para ocupar o primeiro lugar do pódium, são 8 possibilidades; para o segundo lugar, sobram apenas 7; e, para o terceiro, apenas 6. Assim, temos o total de possibilidades expresso por $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

**8.** A primeira pessoa tem 6 possibilidades; a segunda, 5; e a terceira, 4. Assim, pelo PFC, são $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ possibilidades.

**9.** Como são 5 possibilidades para cada questão, o total de maneiras é $5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5 = 5^{10}$.

**10.** Como são 26 letras e 10 algarismos, o total de placas é $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175.760.000$.

# 2 Exercícios de Fixação

**11.** (Extraído da Vídeo Aula)

a) Como não podemos contar com o 0 no início (unidade do milhar), pelo PFC, temos $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 3584$ números.

b) $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1470$ números.

c) Para enfrentarmos as adversidades logo no início, seguiremos a sequência (unidade, centena, dezena): $4 \cdot 6 \cdot 6 = 144$ números.

**12.** (Extraído da Vídeo Aula) Vamos dividir o problema em dois casos para que não haja conflito:

i) Números terminados com 0: começando pela unidade, temos $1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ números;

ii) Números terminados em 2, 4 ou 6: (unidade, unidade do milhar, centena, dezena) $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 = 540$ números.

Por i e ii, temos que o total de números é $210 + 540 = 750$.

**13.** (Extraído de Exercícios Resolvidos) Dividindo em dois casos, temos:

i) Com Pedro: como Pedro pode ocupar qualquer um dos três locais do banco traseiro, temos $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1080$;

ii) Sem Pedro: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$.
Portanto o total de maneiras diferentes é $1080 + 720 = 1800$.

**14.** (Extraído de Exercícios Resolvidos)

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

b) Como existem $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^k$ sequências possíveis com exatamente $k$ símbolos, o total de sequências pode ser calculado somando-se as quantidades para cada tamanho possível: $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^8 = \dfrac{2(1-2^8)}{1-2} = 510$.

**15.** a) Se Ana deve ser a primeira, sobram cinco pessoas para cinco lugares, ou seja, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ possibilidades.

b) Como em primeiro deve ficar Ana ou Pedro, temos $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 240$ possibilidades.

c) O total de possibilidades, sem restrições, é $6! = 720$. Mas, deste total, subtrairemos as possibilidades nas quais Ana e Pedro ficam juntos. Assim, temos $720 - 2 \cdot 5! = 480$ possibilidades.

# 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**16.** (OBM 2013) Qualquer que seja o número, a soma dos algarismos é 10. A soma dos dois últimos é maior que a soma dos dois primeiros quando esta for maior que 5. Assim, os possíveis números de dois dígitos que ocorrem como dois últimos dígitos são $24, 34, 42, 43$. Além disso, escolhido os dois últimos dígitos, temos duas maneiras de posicionar os outros dois. Portanto, a resposta é $2 \times 4 = 8$ Resposta A.

**17.** (OBMEP 2014) Como os números devem ser ímpares e como a soma dos algarismos das unidades e das dezenas deve ser igual a 16, os números devem terminar em 79 ou 97 (duas possibilidades). Na casa das dezenas de milhar temos 9 possibilidades, pois os números, tendo cinco algarismos, não podem ter 0 nesta casa. Para a casa das unidades de milhar temos 10 possibilidades (todos os algarismos de 0 a 9) e, para cada uma das escolhas anteriores, podemos escolher o algarismo das centenas de duas maneiras distintas, a fim de que a soma de todos os algarismos do número seja um múltiplo de 5. Logo, há $2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 2 = 360$ possibilidades. Resposta D.

**18.** (OBMEP 2013) Dividindo os possíveis horários em dois casos, temos:

i) Com aula aos sábados: escolhendo aula sábado, são 3 possibilidades; sua aula à tarde, são 2 possibilidades de horário e 4 possibilidades de dias. Temos então $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ possibilidades;

ii) Sem aula aos sábados: são 6 possibilidades de dias não consecutivos, sendo um pela manhã outro pela tarde (2 possibilidades). O horário pela manhã tem 3 possibilidades e pela tarde, 2 possibilidades, chegando a um total de $6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot = 72$ possibilidades para este caso.

Assim, o total de possibilidades é $24 + 72 = 96$. Resposta A.

Determine o número de possíveis preenchimentos distintos de tal tabuleiro seguindo as regras do Super Paciência.

**19.** (Extraído da OBM) Existem 4 tipos possíveis de colunas e as regras do Super Paciência se resumem a não preenchermos uma certa coluna com a mesma configuração da coluna imediatamente anterior. Assim, uma vez que Bitonho escolheu os números de uma determinada coluna, ele possui 3 opções de preenchimento para a próxima. No início, podemos escolher livremente como preencher a primeira coluna mais à esquerda e isso pode ser feito de 4 formas. Em seguida, ao preenchermos as próximas colunas à direita, teremos 3 opções. Portanto, o total de preenchimentos é:

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 4 \cdot 3^{2013}$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com