RESOLUÇÃO

Exercício 1:O livro recebeu o código DAB depois de todos os demais livros, que receberam os códigos que:
i) iniciam com a letra A, a saber:
AAA, AAB, até AAZ, num total de 26 livros;
ABA, ABB, até ABZ, num total de 26 livros;
...
AZA, AZB, até AZZ, num total de 26 livros.
Até esse ponto foram codificados $26 \times 26 \times 26 = 676$ livros.

ii) iniciam com a letra B, isto é, $BAA, BAB, ..., BAZ$; BBA, BBB, BBZ ; ... e $BZA, BZB, ..., BZZ$, num total de $26 \times 26 = 676$.

iii) iniciam com a letra C, de forma análoga, num total de $26 \times 26 = 676$.

iv) iniciam, finalmente com a letra D, totalizando somente dois livros: DAA e DAB (o último).

Portanto, o número de livros é $3 \times 676 + 2 = 2030$.

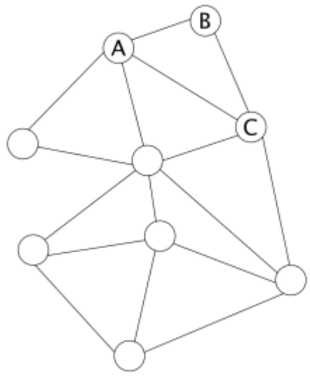
Exercício 2 Chamando cada participante pela primeira letra de seu nome, as possibilidades de escolha dos 2 premiados são: $AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE$, ou seja, há 10 possibilidades. As possibilidades de escolha das duas premiações são: Ouro Ouro, Ouro Prata, Ouro Bronze, Prata Ouro, Prata Prata, Prata Bronze, Bronze Ouro, Bronze Prata e Bronze Bronze, ou seja, há 9 possibilidades. Pelo Princípio Multiplicativo, as diferentes formas de premiação são $10 \times 9 = 90$.

Exercício 3 Como os números devem ser ímpares e como a soma dos algarismos das unidades e das dezenas deve ser igual a 16, os números devem terminar em 79 ou 97 (2 possibilidades). Na casa das dezenas de milhar temos 9 possibilidades, pois os números, tendo cinco algarismos, não podem ter 0 nesta casa. Para a casa das unidades de milhar temos 10 possibilidades (todos os algarismos de 0 a 9) e, para cada uma das escolhas anteriores, podemos escolher o algarismo das centenas de duas maneiras distintas, a fim de que a soma de todos os algarismos do número seja um múltiplo de 5. Logo, há $2 \times 9 \times 10 \times 2 = 360$ possibilidades.
Para ilustrar porque há duas e só duas maneiras de preencher a casa das centenas de modo que a soma dos algarismos seja um múltiplo de 5, vamos pensar com base na seguinte exemplo:

$$11a79$$

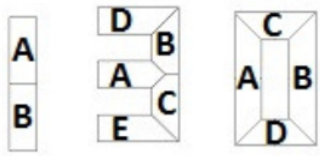
em que a indica um algarismo que está faltando para que a soma dos cinco algarismos seja um múltiplo de 5. Nessas condições, há duas possibilidades para preencher a casa vazia de 11_79, que são as seguintes: 11279 (observe que $1 + 1 + 2 + 7 + 9 = 20$ é múltiplo de 5) e 11779 (neste caso $1 + 1 + 7 + 7 + 9 = 25$ também é múltiplo de 5).
Este fenômeno é, de fato, geral, já que o resto da divisão de um número por 5 tem que ser igual a $0, 1, 2, 3,$ ou 4. Assim, dado qualquer número natural, somando a ele 0, ou 1, ou 2, ou 3 ou 4 sempre encontraremos um (e só um) múltiplo de 5. Uma vez determinado qual dos algarismos $0, 1, 2, 3$ ou 4 é o que produz o múltiplo de 5, basta somar 5 a ele para obter um novo algarismo $(5, 6, 7, 8$ ou $9)$ para que um novo número de cinco algarismos seja produzido, também com a propriedade de que a soma de seus algarismos seja múltiplo de 5.

Exercício 4 Começamos a colorir a figura pelo círculo marcado com a letra A.



Temos 3 opções de cores para A e, uma vez selecionada a cor de A, temos 2 possibilidades de cores para o círculo B. Para cada escolha de cores para A e B, a cor de C fica unicamente determinada pelas condições do problema. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades diferentes de colorir os círculos A, B e C. Agora notamos que, para qualquer escolha de cores para A, B e C, as cores dos círculos restantes ficam unicamente determinadas. Portanto, temos 6 maneiras diferentes de colorir os círculos da figura de acordo com as condições do enunciado.

Exercício 5



(A) O algarismo 1 é composto por dois polígonos, indicados na figura por A e B. Para pintar o polígono A, há 3 opções: branco, cinza e preto. Já para pintar o polígono B, há 2 opções, uma vez que sua cor não pode coincidir com aquela já usada para pintar A. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 1 pode ser pintado de $3 \times 2 = 6$ maneiras distintas.

(B) Iniciamos observando que há 3 opções para pintar o polígono A. Uma vez que A foi pintado, há duas opções para pintar o polígono B e, como o polígono C é vizinho de A e B, só há uma cor possível para C. A cor do polígono D não deve coincidir com a cor de B, logo para cada cor escolhida para B, há 2 opções para a cor de D. Analogamente, há 2 opções para a cor de E. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 = 24$ maneiras distintas para pintar o algarismo 3.

(C) Vamos distinguir dois casos.

$*$ As cores de A e B coincidem: neste caso há 3 opções de cores para A e B, e restam 2 opções de cores para C e 2 para D. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de $3 \times 2 \times 2 = 12$ maneiras distintas.

$*$ As cores de A e B são diferentes: neste caso, há 3 opções de cores para pintar A e, para cada uma dessas, há 2 opções para pintar B, restando apenas 1 opção para C e também para D. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ maneiras distintas.

Segue do Princípio Aditivo que o algarismo 0 pode ser pintado de $12+6=18$ maneiras distintas.

(D) Basta pintar os algarismos $2, 0, 1$ e 3; o 2 pode ser pintado de $3 \times 2 \times 2 = 12$ maneiras diferentes e o número de maneiras de pintar os outros algarismos já foi calculado nos itens anteriores. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $12 \times 6 \times 24 \times 18 = 31104$ maneiras distintas de pintar o número 2013.

Exercício 6

a) Cristina pode preencher cada uma das três linhas do cartão de 6 maneiras diferentes; logo o número de maneiras de preencher o cartão é $6 \times 6 \times 6 = 216$.

b) Se os ratinhos escolhem casinhas diferentes, então o primeiro tem 6 escolhas possíveis, o segundo tem 5 escolhas possíveis e o terceiro tem 4 escolhas. Assim, o número de maneiras que Cristina pode preencher o cartão é $6 \times 5 \times 4 = 120$.

c) Os ratinhos podem se esconder nas casinhas de três maneiras diferentes:
$*$ os três ratinhos na mesma casinha; temos aqui 6 possibilidades, uma para cada casinha;
$*$ os três ratinhos em três casinhas diferentes; temos aqui 120 possibilidades (item b);
$*$ dois em uma mesma casinha e o terceiro em outra casinha, que é o que queremos calcular.
Assim, para achar o número procurado, basta subtrair do número total de preenchimentos possíveis as possibilidades para os outros dois casos; o resultado é então $216 - 6 - 120 = 90$.

Exercício 8 Vamos denotar as peças, da esquerda para a direita e de cima para baixo, de H, U, Z e R. A peça H só pode ser colocada de duas maneiras diferentes em um quadrado, a peça U de quatro maneiras diferentes, a peça Z de duas maneiras diferentes e a peça R de quatro maneiras diferentes. Uma vez fixada a posição em que as peças vão entrar nos quadrados, elas podem ser distribuídas de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras diferentes. Logo o número de maneiras diferentes de colocar as peças nos quadrados é $2 \times 4 \times 2 \times 4 \times 24 = 1536$.

Exercício 9 Manuela pode começar pintando uma das 4 paredes de azul. Depois disso, sobram 2 escolhas de cor para a parede oposta (verde ou branco). Para acabar, ela pode pintar uma das paredes ainda não pintadas com uma das 2 cores não usadas, e então pintar a última parede com a cor que falta. O número de maneiras diferentes de efetuar esse procedimento é $4 \times 2 \times 2 = 16$.

Exercício 10 Os casais 1 e 2 podem se sentar de duas maneiras distintas:

$$\underbrace{\text{casal 1}}_{\text{esquerda}}\ \underbrace{\text{casal 2}}_{\text{direita}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\text{casal 2}}_{\text{esquerda}}\ \underbrace{\text{casal 1}}_{\text{direita}}$$

No primeiro caso, as quatro pessoas podem se sentar em 4 ordens:

No segundo caso, obtemos da mesma maneira outras 4 ordens. Logo os casais podem se sentar

$$\underbrace{\text{casal 1}}_{\text{esquerda}}\ \underbrace{\text{casal 2}}_{\text{direita}} \begin{cases} \underbrace{\text{homem 1, mulher 1}}_{\text{casal 1}},\ \underbrace{\text{homem 2, mulher 2}}_{\text{casal 1}} \\ \underbrace{\text{homem 1, mulher 1}}_{\text{casal 1}},\ \underbrace{\text{mulher 2, homem 2}}_{\text{casal 1}} \\ \underbrace{\text{mulher 1, homem 1}}_{\text{casal 1}},\ \underbrace{\text{homem 2, mulher 2}}_{\text{casal 1}} \\ \underbrace{\text{mulher 1, homem 1}}_{\text{casal 1}},\ \underbrace{\text{mulher 2, homem 2}}_{\text{casal 1}} \end{cases}$$

no banco de $4 + 4 = 8$ maneiras distintas.