Assistir os vídeos:

Aula 1 –1ª Demonstração: uma demonstração sem contas
https://www.youtube.com/watch?v=-kQTgRuR0tg&feature=youtu.be&list=PLrVGp617x0hDq3GBNUeSLv6B-4fGHG4cJ

Aula 2 –2ª Demonstração: calculando área de duas maneiras diferentes
https://www.youtube.com/watch?v=GamAwajSDzk&feature=youtu.be&list=PLrVGp617x0hDq3GBNUeSLv6B-4fGHG4cJ

Aula 5 –Relações métricas simples
https://www.youtube.com/watch?v=tyF8315XlEg&feature=youtu.be&list=PLrVGp617x0hDq3GBNUeSLv6B-4fGHG4cJ

Aula 6 –Uma propriedade dos retângulos
https://www.youtube.com/watch?v=ylWhIyvdJvc&feature=youtu.be&list=PLrVGp617x0hDq3GBNUeSLv6B-4fGHG4cJ

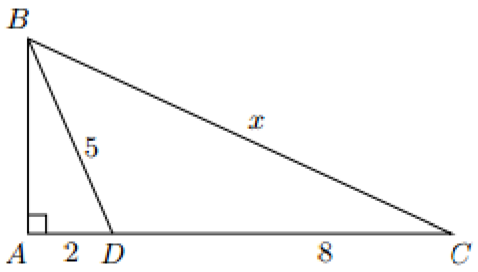
Aula 7 –A volta do Teorema de Pitágoras
https://www.youtube.com/watch?v=s3f9Rh0PFow&feature=youtu.be&list=PLrVGp617x0hDq3GBNUeSLv6B-4fGHG4cJ

Aula10 –Uma generalização do Teorema de Pitágoras e o Problema das Lúnulas de Hipócrates
https://www.youtube.com/watch?v=9xexSiQtWdg&feature=youtu.be&list=PLrVGp617x0hDq3GBNUeSLv6B-4fGHG4cJ

Exemplos:

Exemplo 1:

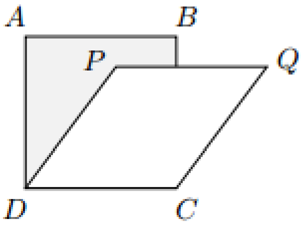
Na figura a seguir os pontos A, D e C estão alinhados. Determine o comprimento x da hipotenusa do triângulo retângulo ABC.



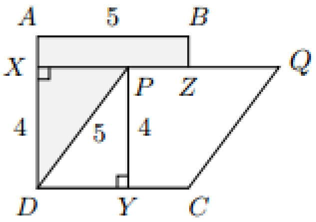
Solução. Vamos chamar de y o comprimento do segmento AB. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABD obtemos $5^2 = y^2 + 2^2$. Daí, $25 = y^2 + 4$ e portanto $y^2 = 25 - 4 = 21$. Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, obtemos $x^2 = y^2 + 10^2$. Logo $x^2 = 21 + 100 \Rightarrow x^2 = 121 \Rightarrow x = \sqrt{121} = 11$.

Exemplo 2:

Na figura plana a seguir, sobre o quadrado cinza $ABCD$ com 25 cm^2 de área foi desenhado um losango branco $PQCD$ com 20 cm^2 de área. Determine a área cinza do quadrado que não ficou encoberta pelo losango.



Solução. Prolongue o segmento PQ até ele intersectar o segmento AD no ponto X e seja Y o ponto do segmento DC tal que PY é uma altura do losango $PQCD$. Seja Z o ponto de interseção dos segmentos PQ e BC. Observe que a figura sombreada é formada pelo retângulo $ABZX$ e pelo triângulo retângulo DPX. Para calcular a área desta figura vamos somar as áreas deste retângulo e deste triângulo retângulo.



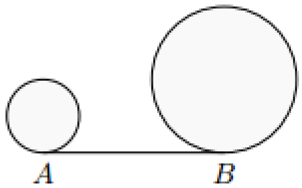
O losango tem base $\overline{DC} = 5$ cm, tem altura PY, e sua área é igual a 20 cm^2. Como a área de um losango é igual ao produto da base pela altura, temos que $\overline{DC} \times \overline{PY} = 20$. Daí $5 \times \overline{PY} = 20$ donde $\overline{PY} = 4$ cm. Como $\overline{XD} = \overline{PY} = 4$ cm, vemos que $\overline{XA} = 5 - 4 = 1$ cm.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo DPX de cateto $\overline{XD} = 4$ cm e de hipotenusa $\overline{DP} = 5$ cm, concluímos que $\overline{XP} = 3$ cm.

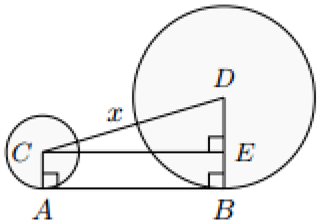
Daí o retângulo $ABZX$ tem base $\overline{XZ} = 5$ cm e tem altura $\overline{XA} = 1$ cm. A área desse retângulo é então igual a $5 \times 1 = 5 \text{ cm}^2$. Já o triângulo retângulo DPX tem base $\overline{XP} = 3$ cm e tem altura $\overline{XD} = 4$ cm. Sua área é então igual a $\dfrac{3 \times 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$. Finalmente, a área desejada da região cinza é igual a $5 + 6 = 11 \text{ cm}^2$.

Exemplo 3:

Na figura a seguir, AB é um segmento tangente às circunferências de raios 2 cm e 5 cm. Se o comprimento do segmento AB é igual a 10 cm, determine a distância entre os centros das circunferências.



Solução. Sejam C e D os centros das circunferências. Desenhe os segmentos CA e DB e desenhe o segmento CE paralelo a AB, como na figura a seguir.



Nesta figura temos que $\overline{CA} = 2\ cm$ e $\overline{DB} = 5$ cm, pois estes dois segmentos são raios das circunferências. Além disso, $\overline{CE} = \overline{AB} = 10$ cm e $\overline{EB} = \overline{CA} = 2$ cm, pois $ABEC$ é um retângulo. Daí $\overline{DE} = \overline{DB} - \overline{EB} = 5 - 2 = 3$ cm. Se $x = \overline{CD}$, pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo retângulo CDE, obtemos

$$x^2 = 10^2 + 3^2 \ \Rightarrow\ x^2 = 109 \ \Rightarrow x = \sqrt{109} \text{ cm.}$$

Exercícios

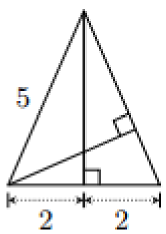
1) Calcule o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 10 cm.

2) Calcule o comprimento da diagonal de um retângulo 6x8.

3) Um retângulo tem base de 9 cm e tem diagonal de 15cm. Determine a altura deste retângulo.

4) Um quadrado tem diagonal com 8 cm de comprimento. Qual é a área deste quadrado?

5) Para o triângulo isósceles de lados 5, 5 e 4:

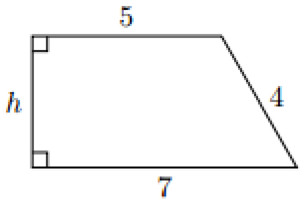


a) Determine a altura relativa à base de comprimento 4.

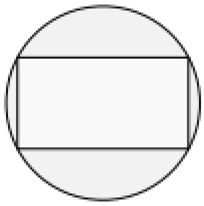
b) Determine a área do triângulo.

c) Utilizando o fato de que a área de um triângulo é a metade da base vezes a altura, determine a altura relativa a base de comprimento 5.

6) Determine a altura e a área do trapézio da figura a seguir:

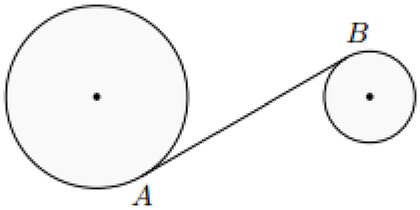


7) Na figura a seguir um retângulo 15x8 está inscrito em uma circunferência. Determine o raio desta circunferência.



8) Um triângulo ABC está inscrito em uma circunferência com 5 cm de raio de modo que o lado AB é um diâmetro. Se AC=8 cm, determine o comprimento do lado BC.

9) Na figura a seguir, uma circunferência tem raio 4 e a outra tem raio 2. Se a distância entre os centros é igual a 12, determine o comprimento do segmento AB, tangente comum às duas circunferências.



10) Na figura a seguir, a circunferência de centro em A tem raio 3 e a circunferência de centro em D tem raio 5. Se uma circunferência é tangente a outra e se BC é um segmento tangente a estas duas circunferências, determine os comprimentos dos segmentos AD e BC.