Módulo de Princípios Básicos de Contagem

Permutação com repetição

Segundo ano

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Permutação com Repetição

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Quais são os anagramas que se pode formar com as letras da palavra CASA?

Exercício 2. Quantos são os anagramas que se pode formar com as letras da palavra CASA?

Exercício 3. Quantos são os anagramas que se pode formar com as letras da palavra ARARA?

Exercício 4. Com dois algarismos 1, dois algarismos 2 e três algarismos 3, quantos números de sete algarismos podem ser formados?

Exercício 5. Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra ARQUIMEDES que

a) começam e terminam com a letra E?

b) não possuem vogais nem consoantes consecutivas?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Quantos são os anagramas da palavra BANANADA que começam com consoante?

Exercício 7. Quantos são os anagramas que se pode formar com as letras da palavra BATATA nos quais

a) as vogais estejam sempre juntas?

b) vogais e consoantes estejam intercaladas?

c) a letra B esteja sempre entre as letras T? (não necessariamente consecutivas)

Exercício 8. De quantas maneiras podemos alinhar 8 moedas sobre uma mesa, sendo 4 de $R\$0,25$ e 4 de $R\$0,50$?

Exercício 9. Quinze pessoas, sendo 5 homens de alturas diferentes e 10 mulheres também de alturas diferentes, devem ser dispostas em fila, obedecendo ao critério: homens em ordem crescente de altura e mulheres em ordem decrescente de altura. De quantos modos diferentes essas 15 pessoas podem ser dispostas na fila?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 10. Uma partícula desloca-se sobre uma reta, percorrendo $1cm$ para a esquerda ou para a direita a cada movimento. Calcule de quantas maneiras diferentes a partícula pode realizar uma sequência de 10 movimentos terminados na posição de partida.

Exercício 11. De quantas maneiras diferentes um professor pode premiar cinco alunos com três bombons exatamente iguais? (um aluno pode receber mais de um bombom)

Exercício 12. Quantas soluções compostas apenas por números naturais possui a equação $x + y + z = 7$?

Exercício 13. Quantas soluções compostas apenas por números inteiros positivos possui a equação $x + y + z = 7$?

Exercício 14. Uma aranha tem uma meia e um sapato para cada um de seus oito pés. De quantas maneiras diferentes a aranha pode se calçar admitindo que a meia tem que ser colocada antes do sapato?

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1. AACS, AASC, ACAS, ACSA, ASAC, ASCA, CAAS, CASA, CSAA, SAAC, SACA, SCAA.

Comentário para professores:. Muitos dos problemas de contagem, em especial os de permutação, podem ser facilmente resolvidos através da listagem de todas as possibilidades. Seja através do diagrama da árvore ou através de uma listagem simples, como na solução do exercício anterior, é interessante que essa construção ocorra de forma organizada. No caso de anagramas, sugerimos que as palavras sejam listadas em ordem alfabética; no caso de números, em ordem crescente ou decrescente.

2. Se as duas letras A fossem distintas, digamos A_1 e A_2, teríamos $P_4 = 4!$ anagramas. Esses 24 anagramas podem ser agrupados em 12 pares que representam palavras iguais caso A_1 e A_2 sejam trocados por A. Por exemplo, A_1CA_2S e A_2CA_2S geram a mesma palavra $ACAS$. Sendo assim, Existem $P_4^2 = \dfrac{24}{2} = 12$ anagramas.

3. $P_5^{3,2} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$

4. $P_7^{2,2,3} = \dfrac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 210.$

5. a) $P_8 = 8! = 40.320.$

b) Como as vogais e consoantes não podem ser consecutivas, temos dois casos gerais: começando com vogal (VCVCVCVCVC) ou começando com consoante (CVCVCVCVCV). É fácil perceber que o número de anagramas é o mesmo para ambos os casos. Como todas as consoantes são diferentes e apenas a letra E está repetindo entre as vogais, temos que $2 \cdot P_5^2 \cdot P_5 = 2 \cdot 60 \cdot 120 = 14.400.$

2 Exercícios de Fixação

6. (Extraído da Vídeo Aula) Vamos dividir em dois casos:

i) começando com N: $P_7^4 = \dfrac{7!}{4!} = 210;$

ii) começando com B ou D: $2P_7^{4,2} = 2 \cdot \dfrac{7!}{4! \cdot 2!} = 210.$

Assim, o total de anagramas é $210 + 210 = 420.$

7. a) Se deve haver um bloco formado por três A's, temos então $P_4^2 = 12$ anagramas.

b) Podemos iniciar com vogal (VCVCVC) ou consoante (CVCVCV). Basta permutar, em ambos, apenas as consoantes, ou seja, $P_3^2 = 3$. Temos então $2 \cdot 3 = 6$ anagramas.

c) $\dfrac{P_6^{2,3}}{3} = \dfrac{6!}{2! \cdot 3! \cdot 3} = 20.$

8. É o mesmo que contar a quantidade de anagramas de uma palavra com oito letras, sendo quatro iguais e outras quatro iguais também, como por exemplo a palavra VCCVVVCC. Temos então uma permutação com repetição. Sendo assim, são $P_8^{4,4} = \dfrac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$ maneiras.

9. (Extraído da Vídeo Aula) Se são quinze pessoas, teremos quinze lugares na fila. Como existe uma sequência fixa de posicionamente entre os homens, ou seja, primeiro deve estar o menor, depois o segundo menor e assim por diante, precisamos apenas escolher as cinco posições, dentre as quinze, para os homens. O mesmo acontece para as mulheres. Sendo assim, resolver esse problema é o mesmo que contar a quantidade de anagramas de uma palavra com cinco letras iguais e outras dez letras iguais (permutação com repetição). Temos então $P_{15}^{10,5} = \dfrac{15!}{10! \cdot 5!} = 3.003.$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

10. (UFRJ - Extraído da Vídeo Aula) Para que a partícula volte à posição inicial, o número de movimentos para a direita e para a esquerda devem ser iguais a 5, independentemente da ordem, ou seja, resolver esse problema é o mesmo que contar a quantidade de anagramas com as letras da palavra DEDDEEEDDE. Assim temos que o total de maneiras diferentes é $P_{10}^{5,5} = 252.$

11. Vamos pensar em uma sequência de quatro letras iguais com espaços antes, depois e entre as letras (_A_A_A_A_). Esses cinco espaços representam as cinco crianças, ou seja, o primeiro espaço representa Ana, o segundo, Bruna, o terceiro, Carla, o quarto, Daniela e o quinto, Esmeralda. Agora, podemos preencher esses espaços com os bombons (podendo ser mais de um bombom por espaço), por exemplo AABABAB, significa que Ana e Bruna não receberam bombons e as demais receberam um bombom cada; outro exemplo seria BAABBAA, onde Ana recebeu um bombom, Carla, dois e as demais, nenhum. Assim, para resolvermos o problema, basta calcularmos o total de anagramas da palavra AAAABBB, ou seja, $P_7^{4,3} = \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$ maneiras de premiar os alunos.

12. Vamos analisar a sequência ($\bullet\bullet + \bullet + \bullet\bullet\bullet\bullet$). Basta pensar que o número de pontos antes do primeiro sinal de mais é o valor de x; entre os sinais de mais, o valor de y; e, depois do segundo sinal, de z. Perceba que, para este exemplo, temos $x = 2$, $y = 1$ e $z = 4$, o que nos dá soma 7 e, portanto, é uma solução da equação $x + y + z = 7$. Assim, para encontrarmos o número de soluções naturais, basta permutarmos 7 pontos e 2 sinais de mais entre si, ou seja, $P_9^{2,7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$.

13. Como não existe zero na solução, usaremos o artifício de substituição de incógnitas, ou seja, faremos $x = a + 1$, $y = b+1$ e $z = c+1$, transformando a equação $x+y+z = 7$ em $a+b+c = 4$, sendo a, b, c números naturais. Seguindo a ideia da solução do exercício anterior, temos que permutar 2 sinais de mais e 4 pontos, ou seja, $P_6^{2,4} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$, que é o total de soluções inteiras e positivas para x, y e z.

14. (Extraído da AMC) Representemos os sapatos pelos símbolos s_i, com $1 \leq i \leq 8$, e as meias com m_i, também com $1 \leq i \leq 8$. Uma sequência desses símbolos em linha produz uma ordem na forma como a aranha deve se calçar. Queremos então determinar todos os anagramas de uma palavra formada por todos esses símbolos em que m_i, com $1 \leq i \leq 8$, sempre esteja à esquerda de s_i. Das 16! permutações desses símbolos, em exatamente metade delas m_1 está à esquerda de s_1 e na outra metade ele está à direita. Analisando então os 16!/2 anagramas em que m_1 está à esquerda de s_1, temos que em metade deles m_2 está à esquerda de s_2 e na outra metade à direita. Assim, em 16!/4 anagramas, as meias m_1 e m_2 são calçadas antes dos sapatos s_1 e s_2. Repetindo o argumento, podemos concluir que em $\frac{16!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot} = \frac{16!}{2^8}$ anagramas, a aranha calça as meias antes dos sapatos correspondentes.

PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
contato@cursoarquimedes.com