Ciclo 2 – Encontro 3

TEOREMA DE PITÁGORAS

Nível 3
PO: Márcio Reis
11° Programa de Iniciação Científica Jr.

Avisos!

Segunda tarefa de fórum: 15/08 a 20/08

Segunda avaliação online: 22/08 a 28/08

Próxima aula: Ciclo 3, Encontro 1
será, excepcionalmente,
na **segunda-feira**, dia **22/08**,
de **19:30** às **21:30**.

Teorema de Pitágoras

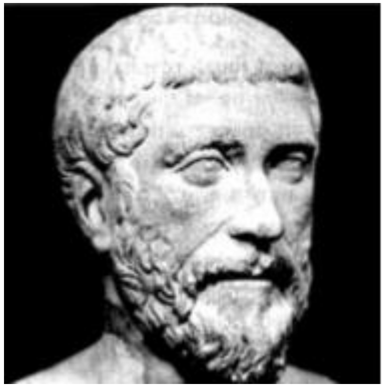
- Apostila 3: TEOREMA DE PITÁGORAS E ÁREAS, de W. Eduardo.

  Seções 1.1 a 1.5

- ENCONTROS DE GEOMETRIA, de F. Dutenhefner, L. Cadar.

  Seção 8.2

1.1 A história do Teorema de Pitágoras



Pitágoras (c.569 – c.480 a.C.)

Páginas 9 a 12.

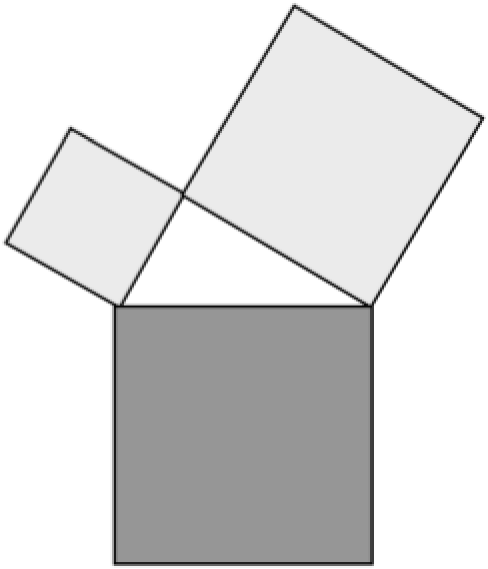
http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf

1.2 O Enunciado do Teorema de Pitágoras

"Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos."

Se a é a medida da hipotenusa e se b e c são as medidas dos catetos, o enunciado do Teorema de Pitágoras equivale a afirmar que $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$.

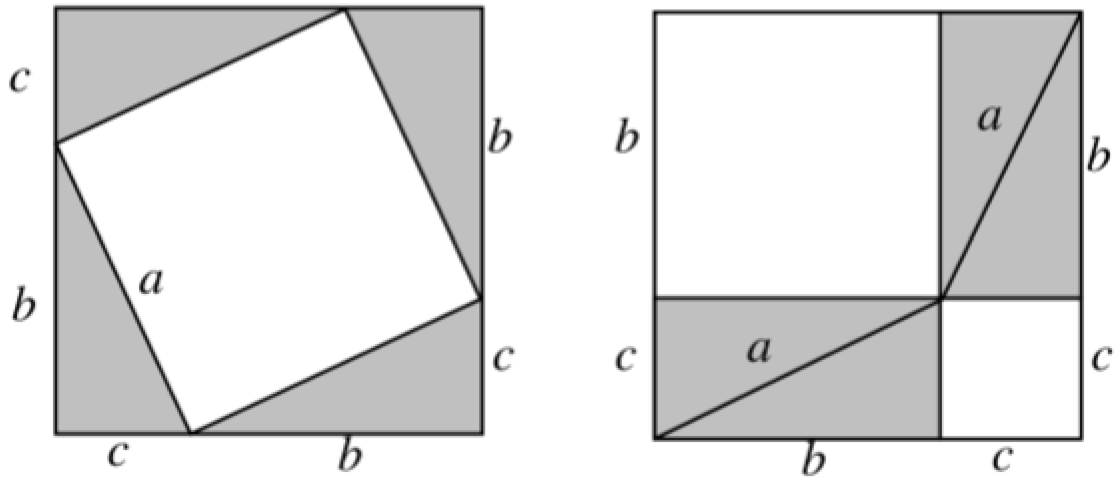
1.2 O Enunciado do Teorema de Pitágoras



Observando a figura ao lado, o Teorema de Pitágoras afirma que a área sombreada em tom mais claro é igual à área mais escura.

Este fato não é evidente! Muito pelo contrário, é misterioso e intrigante. Para que possamos nos convencer da verdade dessa afirmação, precisamos de uma demonstração. Vamos ver algumas.

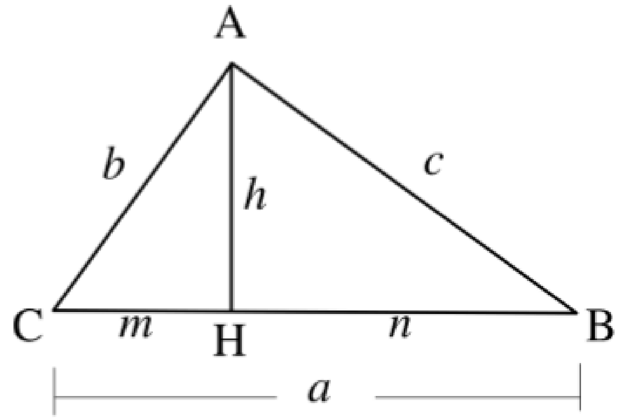
1.2 O Enunciado do Teorema de Pitágoras – Demonstração clássica



1) retiramos do quadrado de lado b + c quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado a.

2) retiramos também do quadrado de lado b + c os quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado b e um quadrado de lado c.

1.2 O Enunciado do Teorema de Pitágoras – Demonstração por semelhança de triâgulos

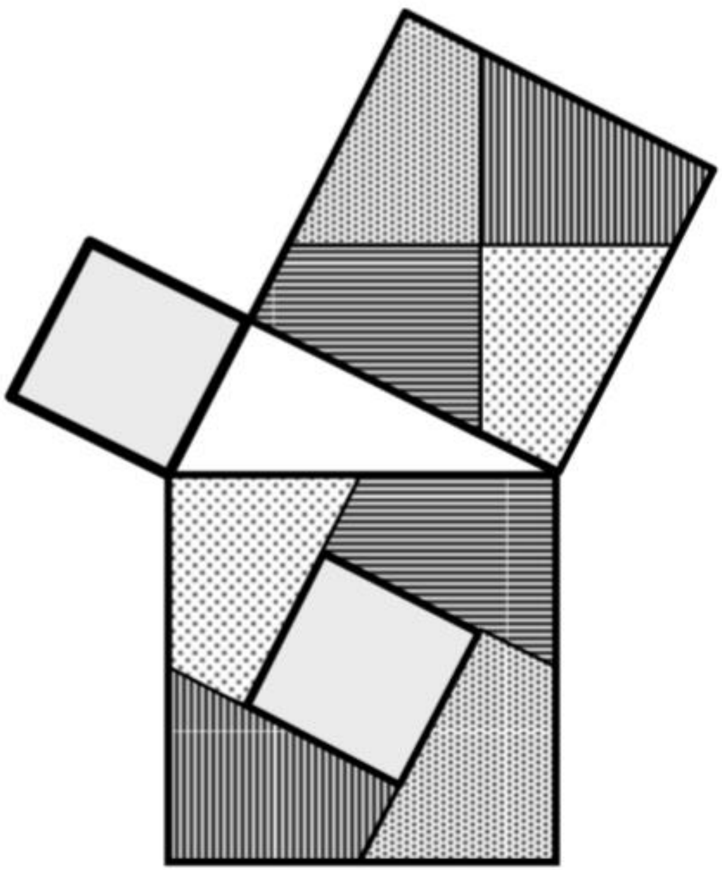


Da semelhança dos triângulos AHC e ABC temos $b^2 = am$ e, da semelhança dos triângulos AHB e ABC, temos $c^2 = an$. Somando essas duas relações membro a membro, encontramos:

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m + n) = a \cdot a = a^2.$$

11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

1.2 O Enunciado do Teorema de Pitágoras – Demonstração de Perigal



Perigal corta o quadrado construído sobre o maior cateto por duas retas passando pelo seu centro, uma paralela à hipotenusa do triângulo e outra perpendicular, dividindo esse quadrado em quatro partes congruentes. Essas quatro partes e mais o quadrado construído sobre o menor cateto, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa.

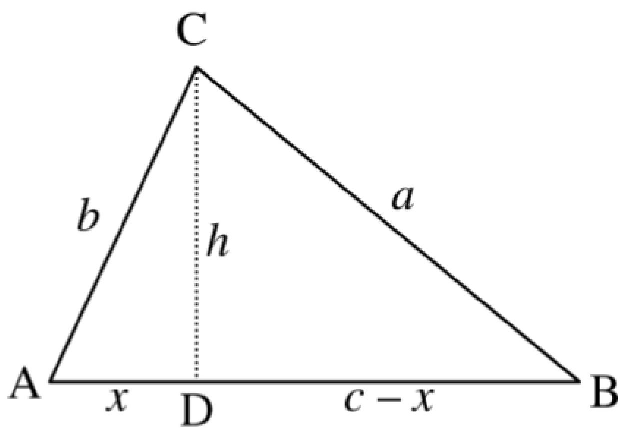
1.3 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

A pergunta agora é: se a, b e c são reais positivos com $a^2=b^2+c^2$ será o triângulo de lados a, b, e c retângulo? Intuitivamente, pensamos que sim. Mas, devemos demonstrar isto. Consideremos então um triângulo ABC com AB = c, BC = a e CA = b.

1.3 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

1º caso: $A < 90^{o}$

Imaginemos que $b \leq c$. Assim, o ponto D, projeção de C sobre AB, cai no interior do lado AB. Sejam $AD = x$ e $CD = h$.



1.3 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

Como o triângulo ADC é retângulo, temos $b^2 = h^2 + x^2$. Como o triângulo BDC é retângulo, temos:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

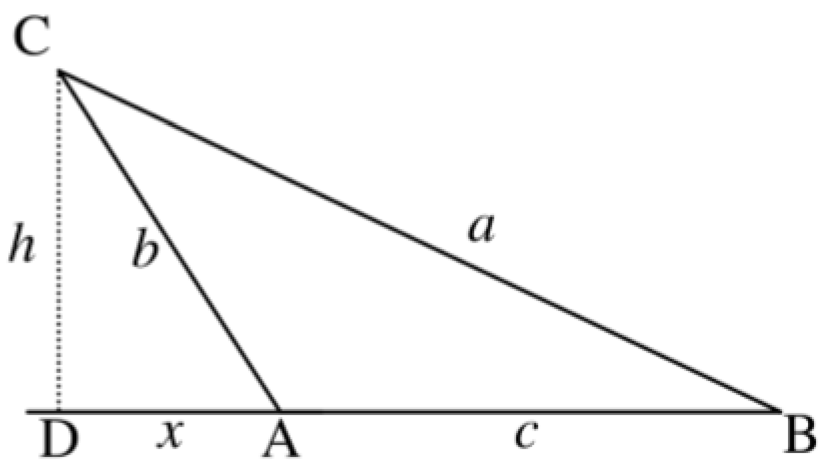
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

1.3 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

2º caso: $A > 90^\circ$

Agora, o ponto D cai fora do lado AB.



1.3 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

Os mesmos cálculos que fizemos no caso anterior nos levam a

$$a^2 \;=\; b^2 + c^2 + 2cx,$$

ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$, novamente contradizendo a condição inicial.

1.3 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

Demonstramos então que em um triângulo ABC, de lados a, b e c,

$$A < 90^{\text{o}} \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$A > 90^{\text{o}} \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

Assim, a condição $a^2 = b^2 + c^2$ implica necessariamente que $A = 90^{\text{o}}$.

1.4 Ternos Pitagóricos

Como encontrar triângulos retângulos cujos lados tenham medidas inteiras?

“Sendo a, b e c inteiros positivos com $b < c < a$ dizemos que (b,c,a) é um terno pitagórico se $a^2 = b^2 + c^2$. Assim, (3,4,5) e (5,12,13) são exemplos de ternos pitagóricos.”

Um terno pitagórico (b,c,a) é chamado primitivo, quando b e c são primos entre si, ou seja, quando mdc(b,c) = 1. Assim, (3,4,5) é um terno pitagórico primitivo. Naturalmente, qualquer terno da forma (3k,4k,5k) com k inteiro e maior que 1 é também pitagórico, mas não primitivo.

1.4 Ternos Pitagóricos – Uma fórmula

Sendo m e n inteiros positivos com $m > n$ considere:

$$b = m^2 - n^2, \quad c = 2mn, \quad a = m^2 + n^2.$$

Veja que (b, c, a) é um terno pitagórico pois:

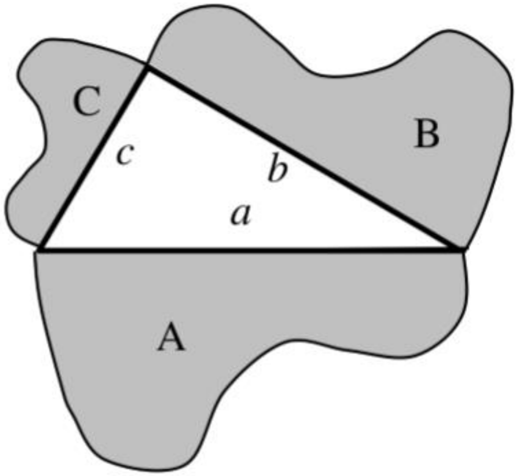
$$b^2 + c^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + n^4 + 2m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2 = a^2.$$

1.4 Ternos Pitagóricos – Uma fórmula

Assim, para qualquer escolha de números inteiros *m* e *n*, o terno (b,c,a) é pitagórico. Por exemplo, para m = 7 e n = 4 encontramos o terno pitagórico (33,56,65). Observe que, se nesta fórmula você atribuir para m e n valores ambos pares ou ambos ímpares, você encontrará um terno pitagórico não primitivo, pois todos os termos do terno serão pares. Se a sua escolha de m e n conduzir a valores de b e c que sejam primos entre si, você encontrará um terno pitagórico primitivo. Esta fórmula é atribuída a Platão (séc.4 a.C.), mas existem outras que você verá nos exercícios.

1.5 Generalizando o Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras afirma que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Agora, imaginemos figuras semelhantes quaisquer, construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.



1.5 Generalizando o Teorema de Pitágoras

Sejam então A, B e C as áreas de figuras semelhantes, construídas sobre a hipotenusa a e sobre os catetos b e c de um triângulo retângulo, como mostra a figura acima. Sabemos que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Então,

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad ou \quad \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$$

1.5 Generalizando o Teorema de Pitágoras

$$\frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \quad ou \quad \frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2}.$$

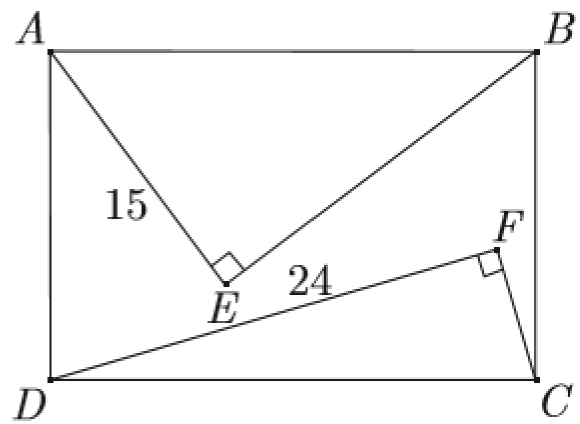
Portanto,

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}.$$

Pela propriedade das proporções, como $a^2 = b^2 + c^2$, concluímos que $A = B+C$. Isto quer dizer que, se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos. Esta é uma generalização do teorema de Pitágoras.

Exercício 1

Medida do cateto – Na figura dada, $ABCD$ é um retângulo e $\triangle ABE$ e $\triangle CDF$ são triângulos retângulos. A área do triângulo $\triangle ABE$ é 150 cm^2 e os segmentos AE e DF medem, respectivamente, 15 e 24 cm. Qual é o comprimento do segmento CF?



Exercício 1 - Solução

Medida do cateto – O segmento CF, cujo comprimento queremos calcular, é um cateto do triângulo retângulo $\triangle CDF$. O Teorema de Pitágoras, aplicado a esse triângulo, diz que $(CD)^2 = (CF)^2 + (FD)^2 = (CF)^2 + 24^2$ e, daí, tiramos $(CF)^2 = (CD)^2 - 24^2$. Ou seja, para encontrar CF basta conhecer CD. Como os lados opostos de um retângulo (e, mais geralmente, de um paralelogramo) são iguais, temos $CD = AB$. Nosso objetivo, então, passa a ser o cálculo de AB. Para isso, olhemos para o triângulo $\triangle ABE$. Sua área é

$$\frac{1}{2}(AE \times BE) = \frac{1}{2}(15 \times BE) = 150,$$

donde tiramos $BE = 20$. O Teorema de Pitágoras aplicado a esse triângulo nos dá $(AB)^2 = (AE)^2 + (BE)^2 = 15^2 + 20^2 = 625 = 25^2$, donde $AB = 25$. Logo, $CD = AB = 25$ e, de acordo com nossa observação anterior, obtemos

$$(CF)^2 = (CD)^2 - 24^2 = 25^2 - 24^2 = (25 + 24)(25 - 24) = 49.$$

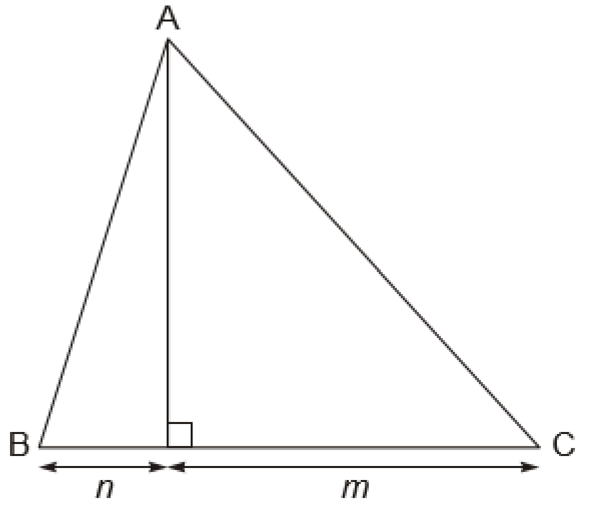
Assim, $CF = 7$.

Observe que a solução independe da medida dos lados AD e BE.

Exercício 2

No triângulo *ABC*, o comprimento dos lados *AB*, *BC* e *CA*, nessa ordem, são números inteiros e consecutivos. A altura relativa a *BC* divide este lado em dois segmentos de comprimentos *m* e *n*, como indicado.

Quanto vale $m - n$?



(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 6

Exercício 2 - Solução

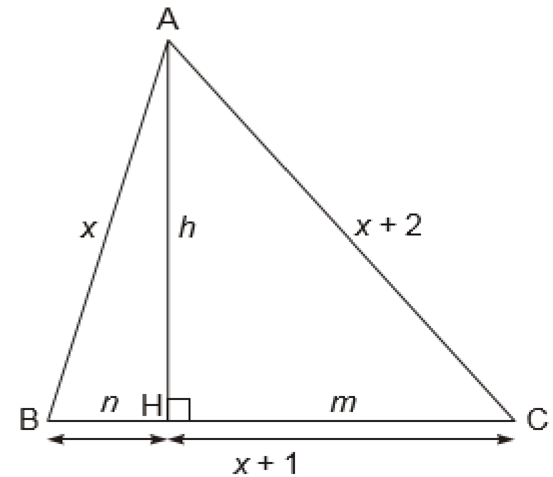
(alternativa D)

Colocando $AB = x$ temos $BC = x + 1$ e $AC = x + 2$. Seja $AH = h$ a altura relativa a BC. Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos ABH e AHC obtemos $n^2 + h^2 = x^2$ e $(x + 2)^2 = m^2 + h^2$. Segue que $h^2 = x^2 - n^2$ e $h^2 = (x + 2)^2 - m^2$, donde $(x + 2)^2 - m^2 = x^2 - n^2$, ou seja, $(x + 2)^2 - x^2 = m^2 - n^2$.

Usando a identidade $a^2 - b^2 = (a - b)\,(a - b)$ obtemos então

$$(x + 2 - x)\,(x + 2 + x) = (m - n)\,(m + n)$$

Como $m + n = x + 1$ segue que $2(2x + 2) = (m - n)\,(m + n)$, segue que, donde $4(x + 1) = (m - n)\,(x + 1)$. Como $x + 1 \neq 0$ podemos dividir ambos os membros desta última expressão por $x + 1$ e obtemos finalmente $m - n = 4$.

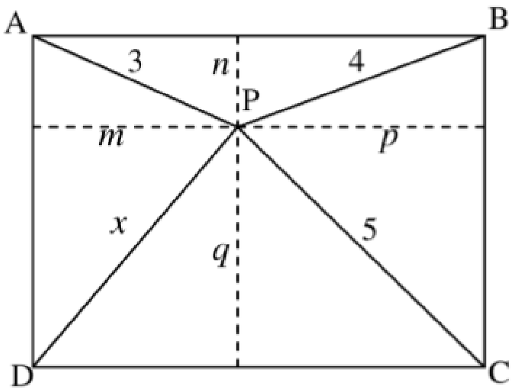


Exercício 3

O ponto P é interior ao retângulo $ABCD$ e tal que $PA = 3$, $PB = 4$ e $PC = 5$. Calcule PD.

Exercício 3 - Solução

Traçando por P paralelas aos lados do retângulo, temos a situação da figura abaixo.



Usaremos o Teorema de Pitágoras quatro vezes.

$$m^2 + n^2 = 9 \qquad p + q = 25$$

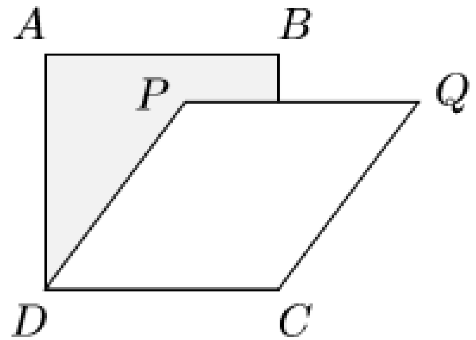
Somando,

$$m^2 + q^2 + n^2 + p^2 = 34 \qquad x^2 + 16 = 34 \qquad x = 3\sqrt{2}.$$

11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

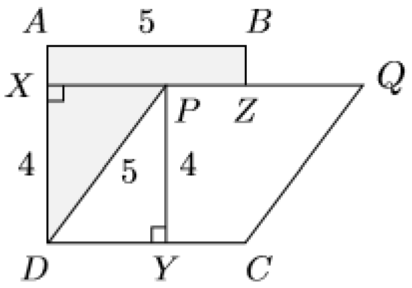
Exercício 4

Na figura plana a seguir, sobre o quadrado cinza $ABCD$ com $25\ \text{cm}^2$ de área foi desenhado um losango branco $PQCD$ com $20\ \text{cm}^2$ de área. Determine a área cinza do quadrado que não ficou encoberta pelo losango.



Exercício 4 - Solução

Solução. Prolongue o segmento PQ até ele intersectar o segmento AD no ponto X e seja Y o ponto do segmento DC tal que PY é uma altura do losango $PQCD$. Seja Z o ponto de interseção dos segmentos PQ e BC. Observe que a figura sombreada é formada pelo retângulo $ABZX$ e pelo triângulo retângulo DPX. Para calcular a área desta figura vamos somar as áreas deste retângulo e deste triângulo retângulo.



Exercício 4 - Solução

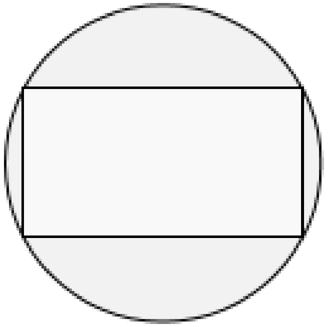
O losango tem base $\overline{DC} = 5$ cm, tem altura PY, e sua área é igual a 20 cm^2. Como a área de um losango é igual ao produto da base pela altura, temos que $\overline{DC} \times \overline{PY} = 20$. Daí $5 \times \overline{PY} = 20$ donde $\overline{PY} = 4$ cm. Como $\overline{XD} = \overline{PY} = 4$ cm, vemos que $\overline{XA} = 5 - 4 = 1$ cm.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo DPX de cateto $\overline{XD} = 4$ cm e de hipotenusa $\overline{DP} = 5$ cm, concluímos que $\overline{XP} = 3$ cm.

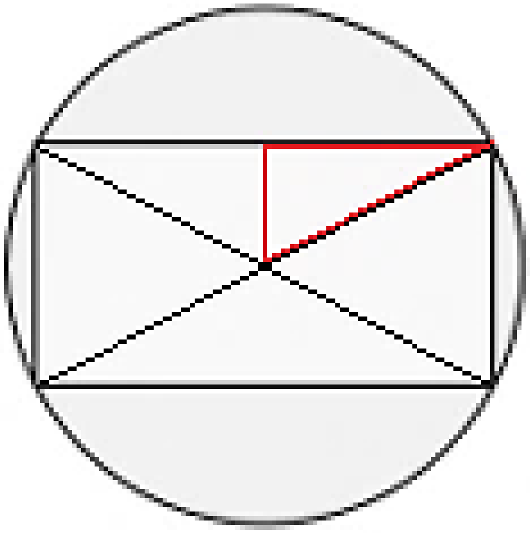
Daí o retângulo $ABZX$ tem base $\overline{XZ} = 5$ cm e tem altura $\overline{XA} = 1$ cm. A área desse retângulo é então igual a $5 \times 1 = 5$ cm^2. Já o triângulo retângulo DPX tem base $\overline{XP} = 3$ cm e tem altura $\overline{XD} = 4$ cm. Sua área é então igual a $\dfrac{3 \times 4}{2} = 6$ cm^2. Finalmente, a área desejada da região cinza é igual a $5 + 6 = 11$ cm^2.

Exercício 5

Na figura a seguir um retângulo 15×8 está inscrito em uma circunferência. Determine o raio desta circunferência.



Exercício 5 - solução

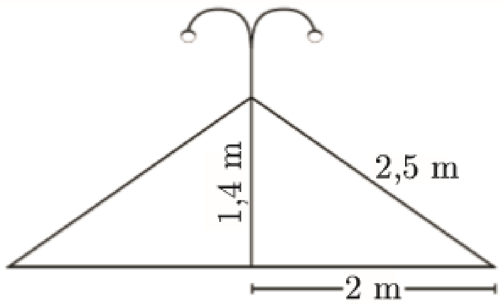


Raio = hipotenusa

$h^2 = c1^2 + c2^2$
$h^2 = (15/2)^2 + (8/2)^2$
$h^2 = 225/4 + 64/4$
$h^2 = 289/4$
$h = 17/2$

Exercício 6

Poste elétrico – Uma companhia de eletricidade instalou um poste num terreno plano. Para fixar bem o poste, foram presos cabos no poste, a uma altura de 1,4 metros do solo e a 2 metros de distância do poste, sendo que um dos cabos mede 2,5 metros, conforme a figura.



Um professor de Matemática, após analisar estas medidas, afirmou que o poste não está perpendicular ao solo. Você acha que o professor está certo? Justifique sua resposta.

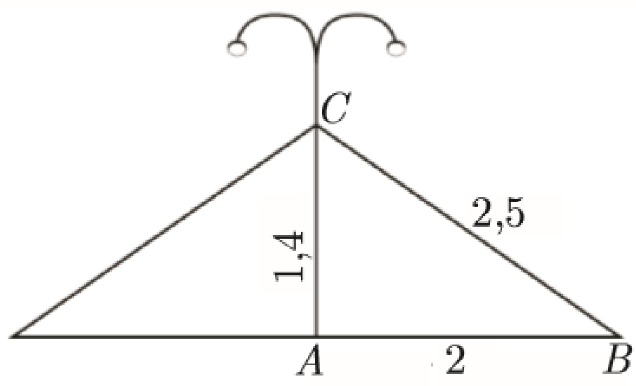
Exercício 6 - solução

Teorema de Pitágoras. *Num triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, vale a relação* $a^2 = b^2 + c^2$.

Agora resolvemos a questão.

Para que o poste fique perpendicular ao solo, o ângulo em A deve ser reto e, portanto, o triângulo $\triangle ABC$ deve ser retângulo (ver figura). Nesse caso, os dados do problema dão que a hipotenusa mede 2,5 m e os catetos 1,4 m e 2 m. Assim, pelo Teorema de Pitágoras teríamos $(2{,}5)^2 = (1{,}4)^2 + 2^2$.

Exercício 6 - solução



Entretanto, $(1{,}4)^2 + 2^2 = 1{,}96 + 4 = 5{,}96$ e $(2{,}5)^2 = 6{,}25$. Logo, essas medidas não satisfazem o Teorema de Pitágoras e, portanto, o triângulo $\triangle ABC$ não é retângulo. Assim, o ângulo em A não é reto e, consequentemente, o poste não está perpendicular ao solo. Concluímos que o professor está certo.

Estudar para o próximo encontro!

Próximo encontro: 22/08 (segunda-feira)

6º Ano do Ensino Fundamental: Módulo: Divisibilidade
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=23
Vídeoaulas: “Múltiplos e Divisores”, “Propriedades de MDC”, “Mínimo Múltiplo Comum”, “Propriedades de MMC” e “Exercícios de MMC”.

Tópicos Adicionais: Módulo: Números Naturais – Representação, Operações e Divisibilidade
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=52
Vídeoaulas: “Números primos – Teorema Fundamental da Aritmética”.