Ciclo 1 – Encontro 3

ÁREAS E PERÍMETROS

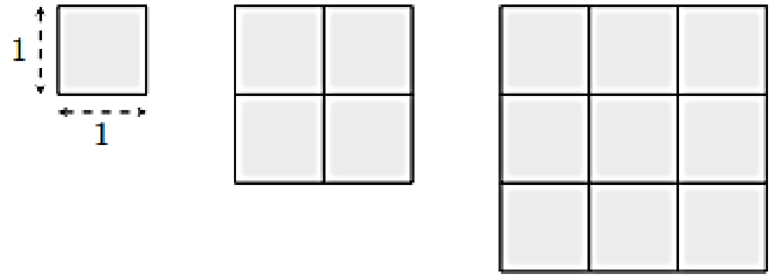
Nível 3
PO: Márcio Reis
11° Programa de Iniciação Científica Jr.

Áreas e Perímetros

- Seções 7.1 a 7.5 da Apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Geometria – Parte 1", F. Dutenhefner, L. Cadar (http://www.obmep.org.br/docs/Geometria.pdf)
- Seções 2.1 e 2.2 da Apostila Apostila 3 do PIC da OBMEP, "Teorema de Pitágoras e Áreas", E. Wagner (http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf).

O conceito de área

- Dada uma figura no plano, vamos definir a área desta figura como o resultado da comparação da figura dada com uma certa unidade de medida. No caso do conceito de área de figuras planas, a unidade de medida utilizada é um quadrado de lado 1 (uma unidade de comprimento). Assim um quadrado de lado 1 tem, por definição, uma unidade de área.

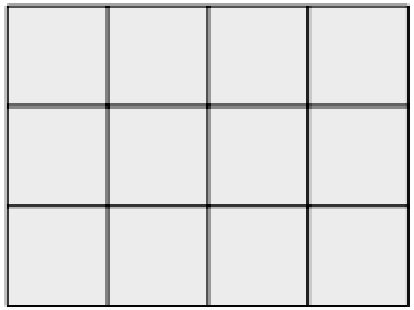


Área do quadrado

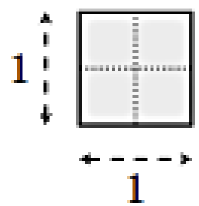
- Generalizando, se um quadrado tem lado n, em que n é um número inteiro positivo, então sua área é igual a n^2, pois dentro deste quadrado cabem exatamente n^2 quadrados de lado 1. Observe que neste cálculo utilizamos intuitivamente as seguintes propriedades do conceito de área:
  - Figuras iguais possuem a mesma área.
  - Se uma figura está dividida em duas figuras disjuntas, então a soma das áreas dessas duas figuras menores é igual à área da figura total.

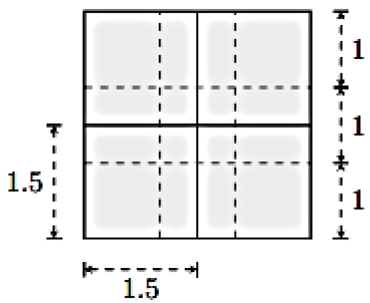
Área do retângulo

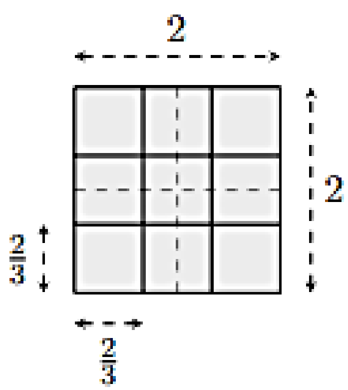
- O retângulo 1×n deve ter área n, pois ele é formado por n quadrados unitários. O retângulo 2×n é formado por dois retângulos 1×n. Assim sua área é 2n. Procedendo desta forma, podemos chegar na expressão ***nm*** para a área do retângulo n×m. Exemplificando, o retângulo 3×4 da figura a seguir tem área igual a ***3 · 4 = 12***, pois ele é formado por 12 quadrados unitários, ou por 3 retângulos 1×4 (três faixas horizontais).



Lados não inteiros





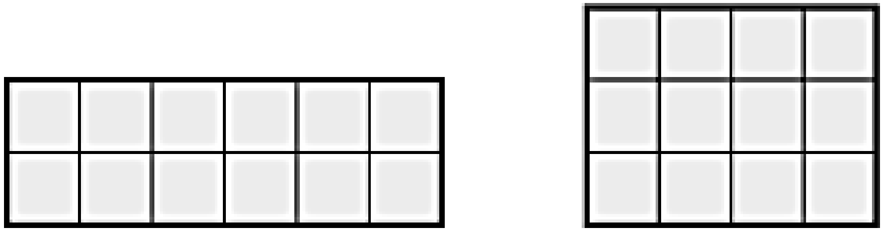


- O quadrado de lado $\frac{1}{2}$ tem área igual a $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.
- O quadrado de lado $\frac{3}{2}$ tem área igual a $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.
- O quadrado de lado $\frac{2}{3}$ tem área igual a $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

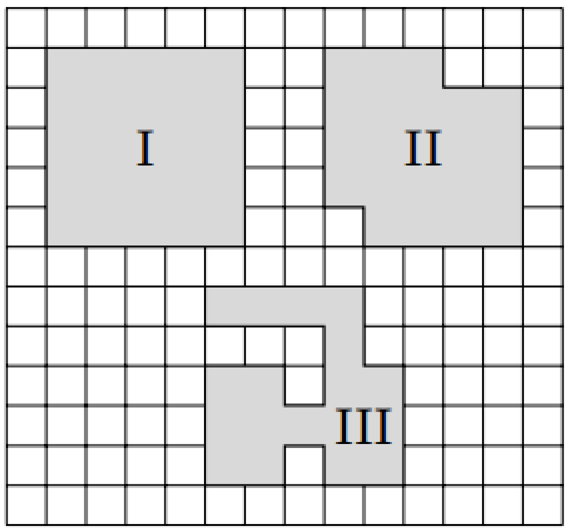
Generalizando: **n x m**
Portanto, tanto para quadrados quanto para retângulos a área é dada pelo "produto da base pela altura"

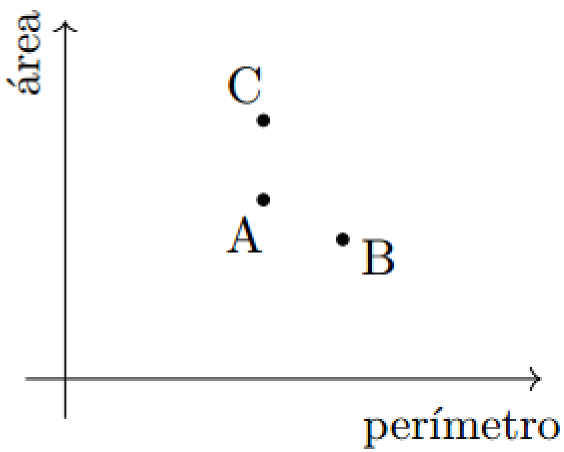
Perímetro de quadrados e retângulos

- A área mede a porção do plano que é ocupada pela figura e o **perímetro mede o comprimento do seu contorno**. Além disso, como exemplificado logo a seguir, existem retângulos de áreas iguais, mas com perímetros diferentes e, reciprocamente, existem retângulos com perímetros iguais, mas com áreas diferentes.



Exemplo 1



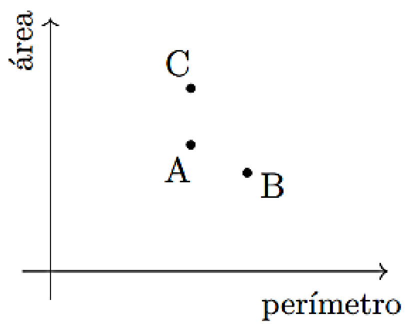


Para cada um destes polígonos foi assinalado, no plano cartesiano à direita, o ponto cujas coordenadas horizontal e vertical são, respectivamente, seu perímetro e sua área.

Exemplo 1 - resolução

Solução. Usando o lado ℓ de um dos quadradinhos do quadriculado como unidade de comprimento, a contagem direta na figura nos dá as áreas e perímetros dos polígonos, conforme a tabela abaixo.

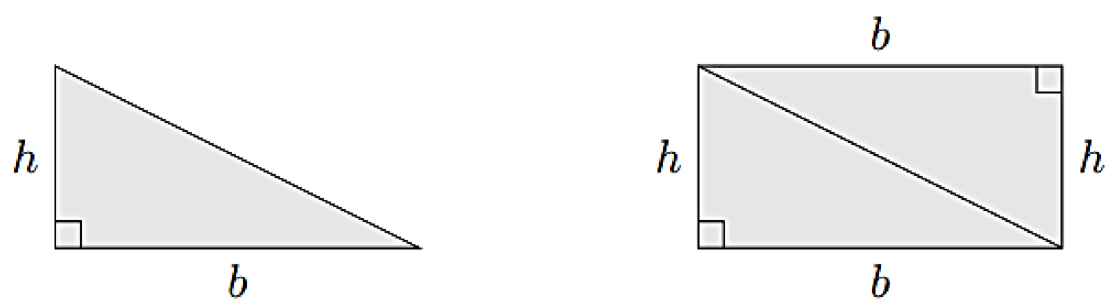
Polígono	Perímetro (em ℓ)	Área (em ℓ^2)
I	20	$5 \times 5 = 25$
II	20	$25 - 3 = 22$
III	30	$25 - 7 = 18$



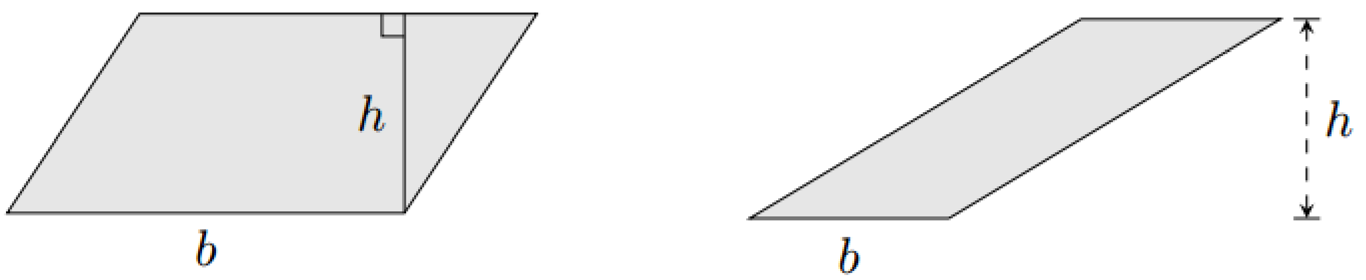
Deste modo, a correspondência que associa a cada polígono um par ordenado no plano cartesiano é I $\rightarrow$ $(20, 25)$, II $\rightarrow$ $(20, 22)$ e III $\rightarrow$ $(30, 18)$.

Área do triângulo retângulo

Um triângulo retângulo de base b e de altura h é a metade de um retângulo de base b e de altura h. Como a área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura, segue que a área de um triângulo retângulo é igual a metade da base vezes a altura, ou seja, a área do triângulo retângulo de base b e altura h é dada pela expressão $\dfrac{bh}{2}$.



Área do paralelogramo



“Base vezes altura”

Área do paralelogramo

Figura 1

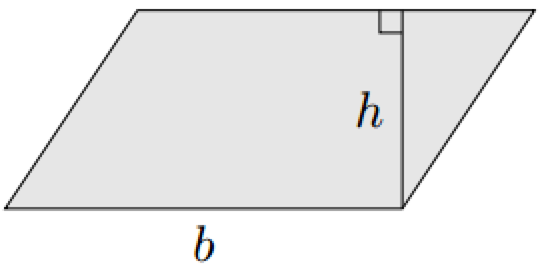


Figura 2

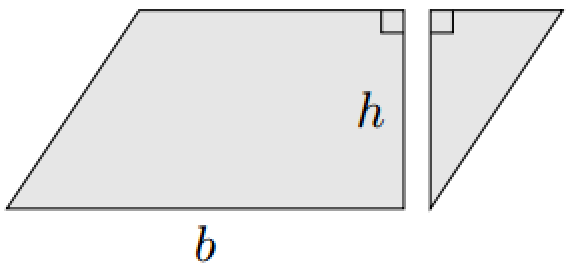


Figura 3

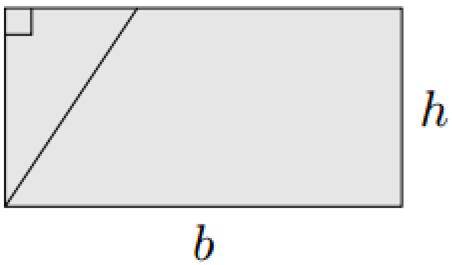
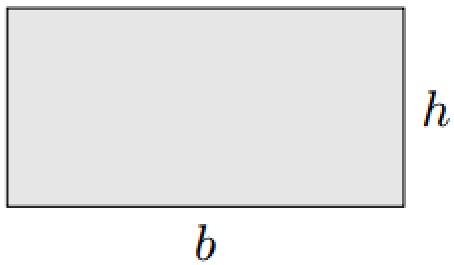
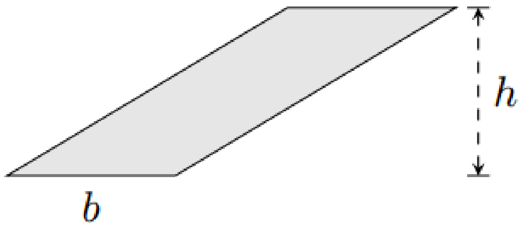
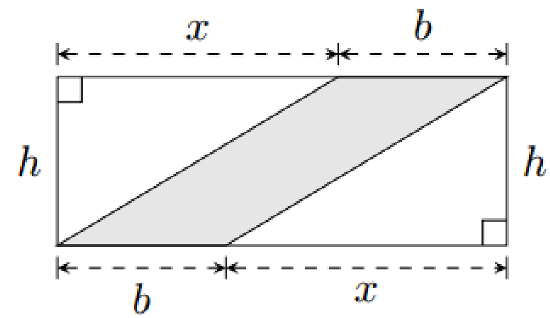


Figura 4



Área do paralelogramo



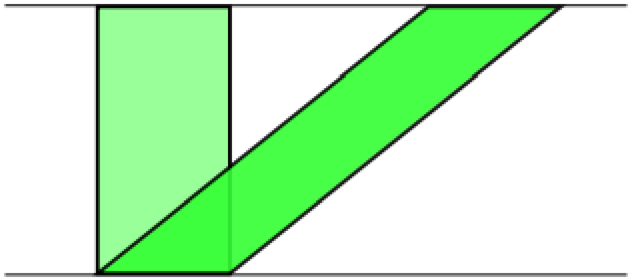


Portanto, para obter a área do paralelogramo, podemos subtrair da área do retângulo de base $b+x$ e altura h as áreas dos dois triângulos retângulos de base x e altura h. Logo a área do paralelogramo é dada por

$$(b+x)h - \frac{xh}{2} - \frac{xh}{2} = bh + xh - \frac{xh}{2} - \frac{xh}{2} = bh.$$

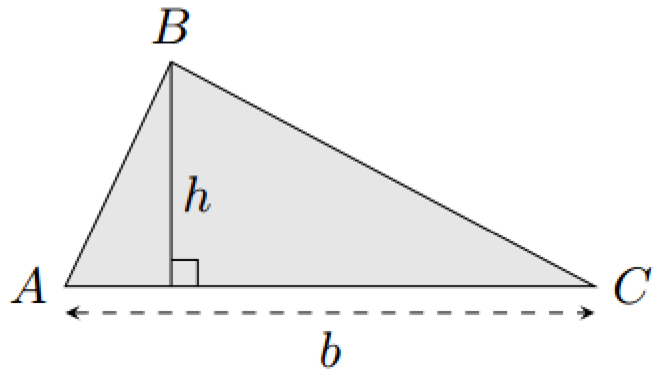
Área do paralelogramo

Como a área de um paralelogramo é o produto da base vezes a altura, todos os paralelogramos de mesma base e mesma altura possuem áreas iguais. A figura a seguir ilustra, então, um retângulo e um paralelogramo com áreas iguais.

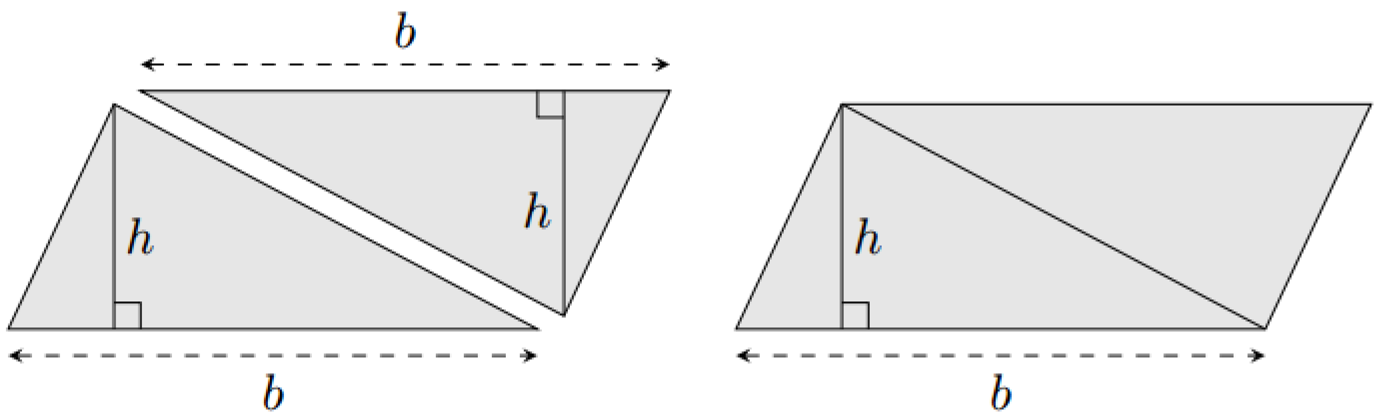


Área de um triângulo qualquer

Considere um triângulo qualquer ABC. Seja b o comprimento do seu lado AC. A **altura** do triângulo em relação a **base** AC é o segmento que passa pelo vértice B e é perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AC}$. Seja h o comprimento desta altura.



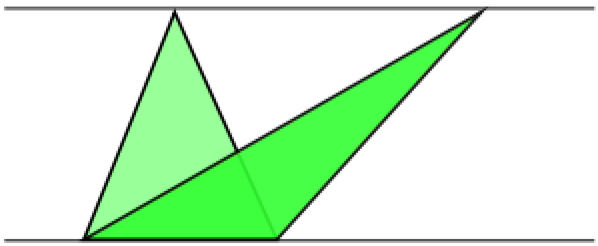
Área de um triângulo qualquer



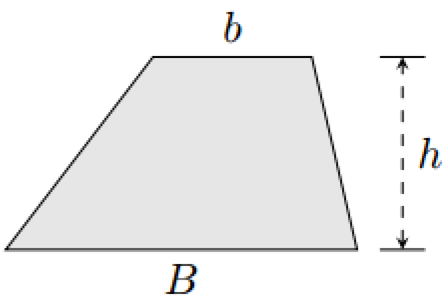
$$S = \frac{base \times altura}{2}$$

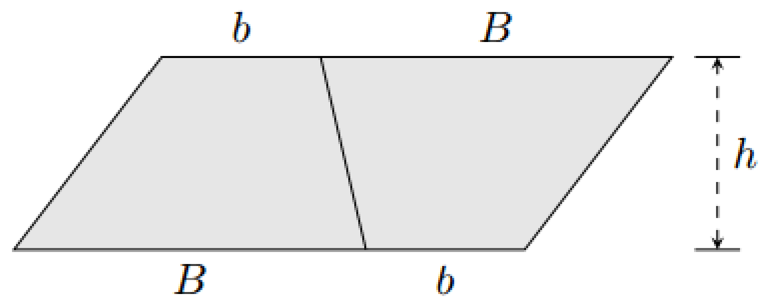
Área de um triângulo qualquer

Da expressão da área de um triângulo segue que se dois triângulos possuem a mesma base e a mesma altura, então eles possuem a mesma área. Na figura a seguir, se as retas são paralelas, vemos triângulos diferentes, mas com áreas iguais.

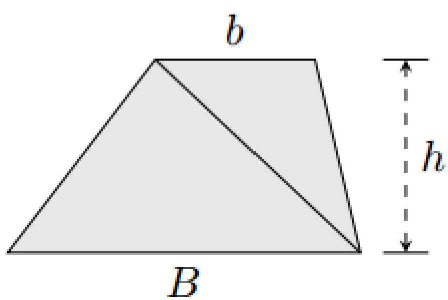


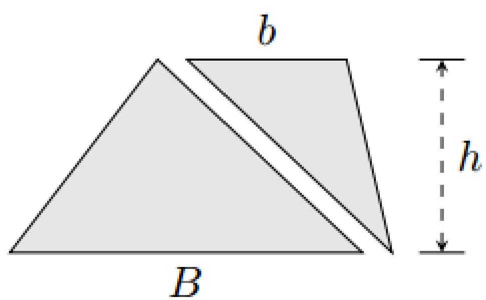
Área do trapézio





$$\frac{(b+B)h}{2}$$

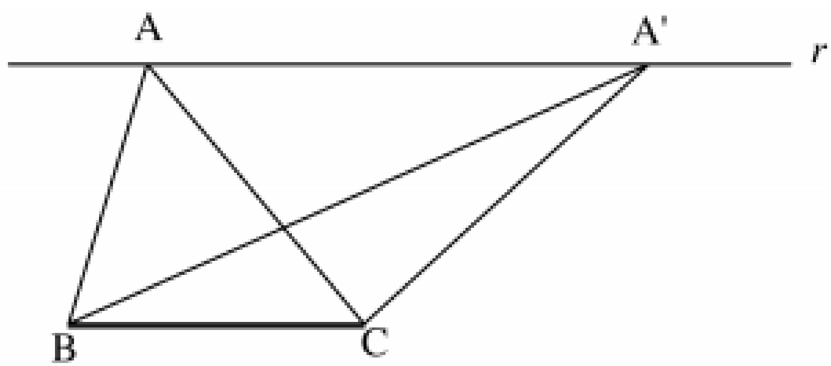




$$\frac{bh}{2}+\frac{Bh}{2}=\frac{(b+B)h}{2}$$

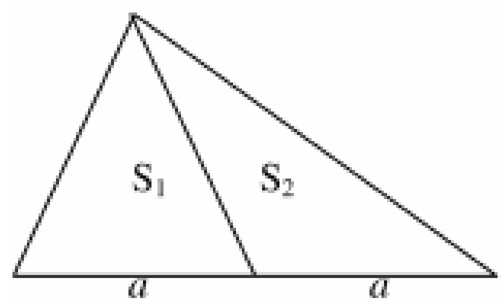
Propriedades importantes

- 1) A área de um triângulo não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base.



Propriedades importantes

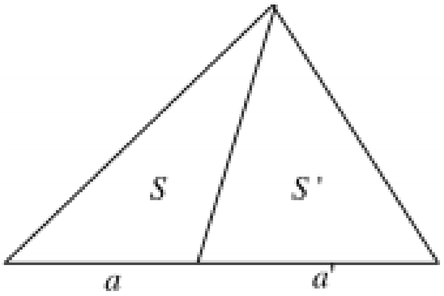
- 2) Em um triângulo, uma mediana divide sua área em partes iguais.



$$S_1 = S_2$$

Propriedades importantes

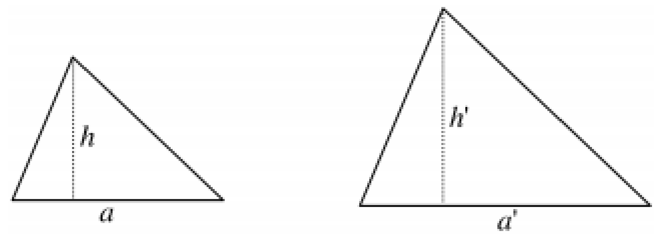
- 3) Se dois triângulos têm mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. A afirmação tem comprovação imediata a partir da fórmula que calcula a área do triângulo.

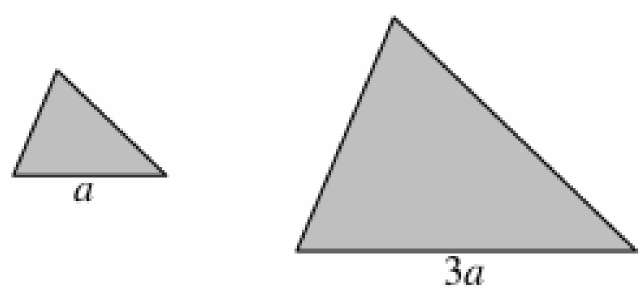


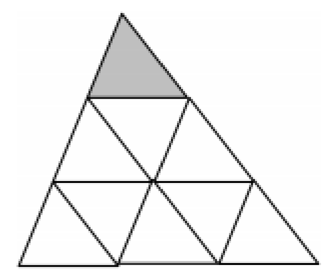
$$\frac{S}{S'} = \frac{a}{a'}$$

Propriedades importantes

- 4) A razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. .





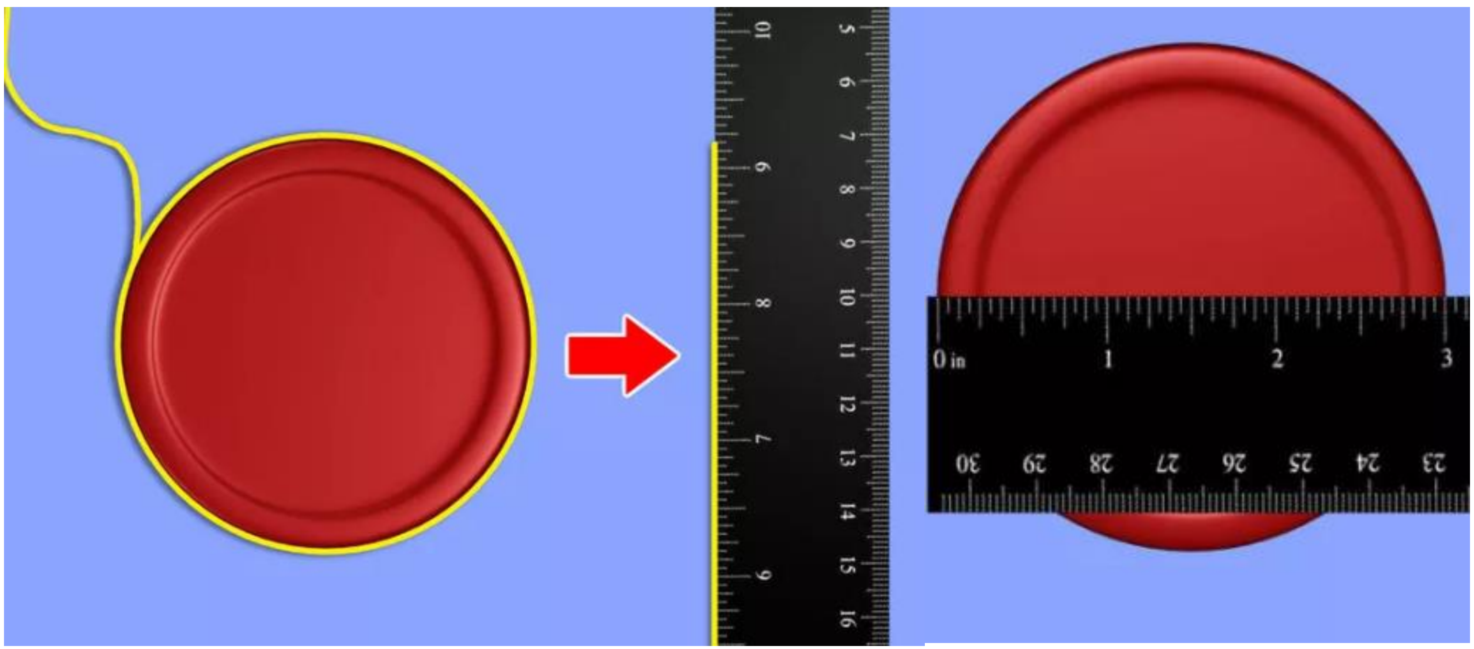


O número Pi

O número π é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Esta razão dá sempre o mesmo valor, ou seja, independe da circunferência, porque duas circunferências quaisquer são semelhantes. Todas as circunferências são semelhantes entre si. Se C é o comprimento da circunferência de raio R, então por definição:

$$\frac{C}{2R} = \pi$$

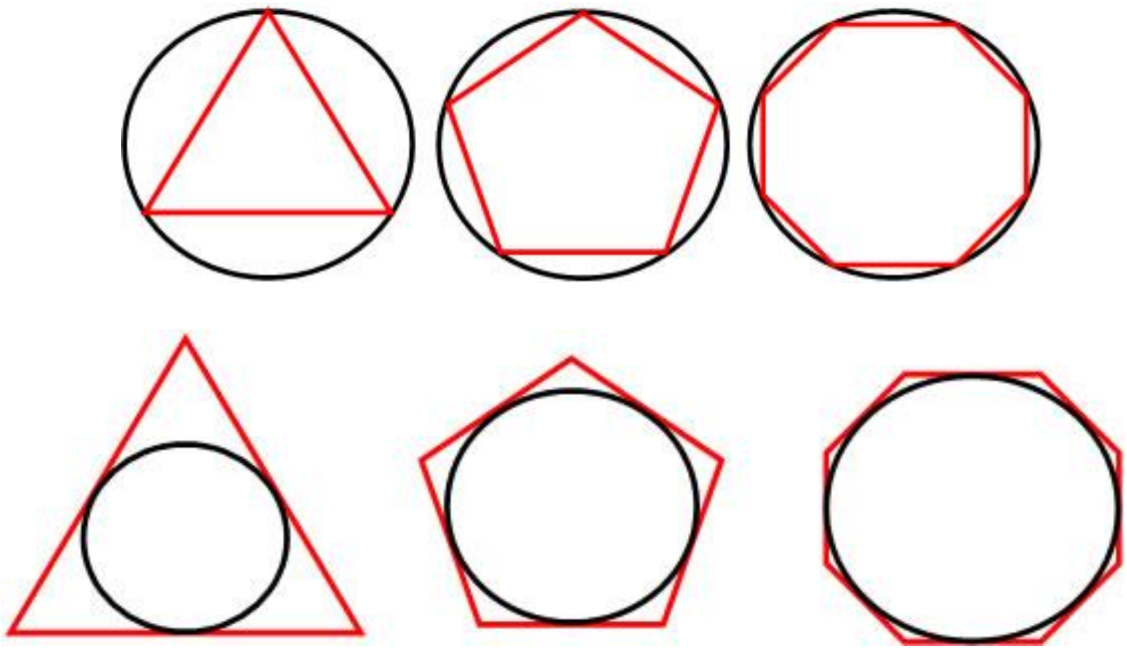
O número Pi



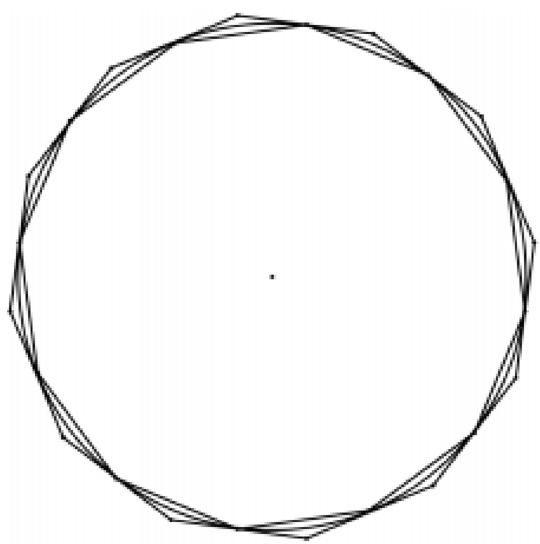
O número Pi

O comprimento da circunferência é, por definição, o número real cujas aproximações por falta são os perímetros dos polígonos regulares inscritos e cujas aproximações por excesso são os perímetros dos polígonos regulares circunscritos.

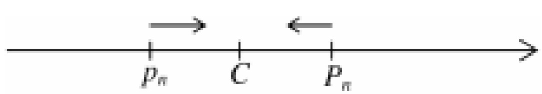
O número Pi



O número Pi



$$p_n < C < P_n.$$



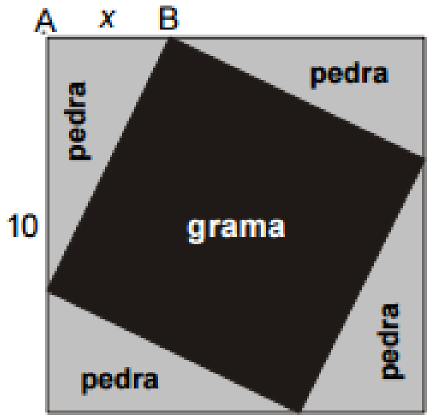
n	$\frac{p_n}{2R}$	$\frac{P_n}{2R}$
6	3,00000	3,46411
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188
384	3,14156	3,14167

Exercício 1

Um prefeito quer construir uma praça quadrada de 10 m de lado, que terá quatro canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento do segmento *AB* está indicado por *x* na figura.

A) Calcule a área do canteiro de grama para $x = 2$.

B) Escreva a expressão da área do canteiro de grama em função de x.



Exercício 1 - Solução

A) Cada canteiro triangular é um triângulo retângulo de catetos x e $10-x$; quando $x=2$, estes catetos valem 2 e 8. Logo a área de cada canteiro é $\frac{2\times 8}{2}=8\text{ m}^2$. Como a área total da praça é 100 m^2 segue que a área do canteiro central é $100-4\times 8=68\text{ m}^2$.

B) Cada canteiro triangular é um triângulo retângulo de catetos x e $10-x$, tendo assim área de $\frac{1}{2}x(10-x)\text{ m}^2$. Como a área total da praça é 100 m^2, segue que a área do canteiro central é

$$100-4\cdot\frac{1}{2}x(10-x)=2x^2-20x+100\text{ m}^2$$

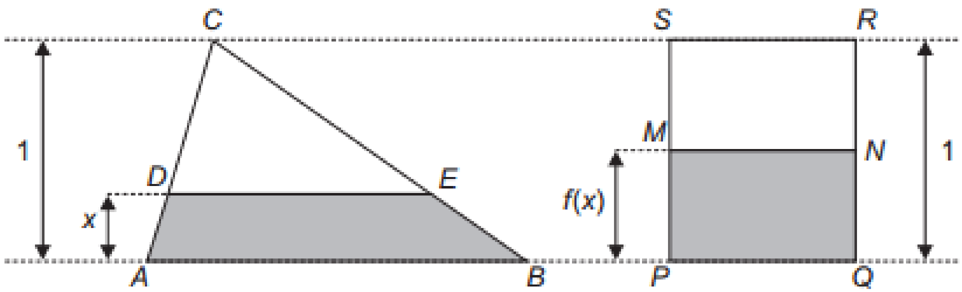
Pode-se também notar que o lado L do canteiro de grama é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos x e $10-x$. A área deste canteiro é L^2. Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$L^2=x^2+(10-x)^2=x^2+100-20x+x^2=2x^2-20x+100$$

como antes.

Exercício 2

Na figura, o triângulo ABC e o retângulo $PQRS$ têm a mesma área e a mesma altura 1. Para cada valor de x entre 0 e 1 desenha-se o trapézio $ABED$ de altura x e depois o retângulo $PQNM$ de área igual à do trapézio, como na figura. Seja f a função que associa a cada x a altura do retângulo $PQNM$.

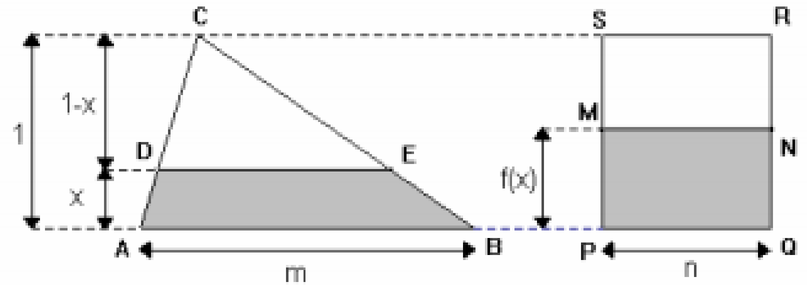


(a) Qual é a razão entre AB e PQ?

(b) Qual é o valor de $f\left(\frac{1}{2}\right)$?

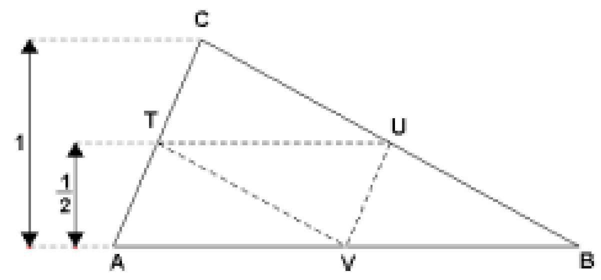
Exercício 2 - Solução

a) Sejam m e n, respectivamente, as medidas das bases do triângulo ABC e do retângulo $PQRS$, como na figura. Como a altura destas figuras é 1, segue que $\text{área}(ABC) = \frac{m}{2}$ e $\text{área}(PQRS) = n$. Da igualdade destas áreas segue $\frac{m}{2} = n$, donde $\frac{m}{n} = 2$.



b) Quando $x = \frac{1}{2}$ os pontos D e E coincidem com os pontos médios T e U dos lados AC e BC, respectivamente. Se V é o ponto médio do lado AB, podemos decompor o triângulo ABC em quatro triângulos congruentes, como na figura. Assim

$$\text{área}(ABUT) = \frac{3}{4}\text{área}(ABC) = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{2} = \frac{3m}{8},$$



e então

$$f\left(\frac{1}{2}\right)n = \frac{3m}{8} = \frac{3 \cdot (2n)}{8} = \frac{3n}{4}$$

donde $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Exercício 3

Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida 2 são posicionados como mostra a figura 1. A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas figuras 2 e 3, x indica a distância entre os vértices A e B dos dois triângulos.

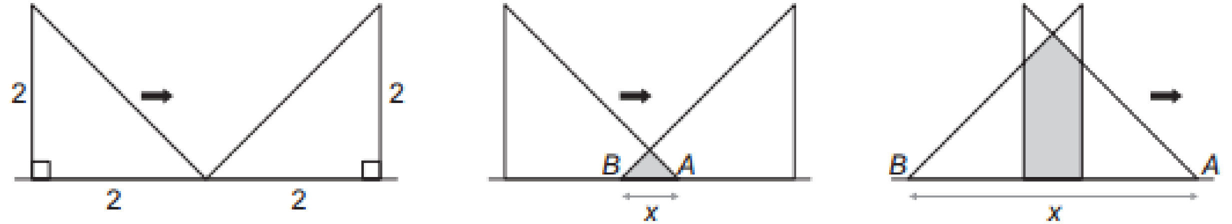


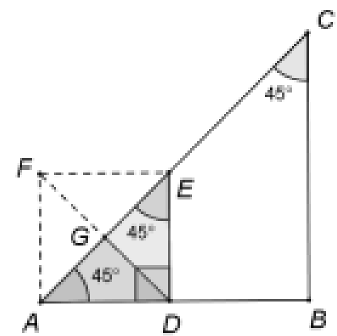
Figura 1 **Figura 2** **Figura 3**

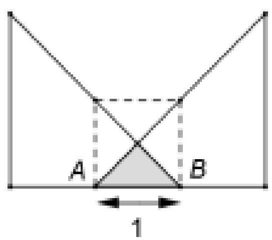
Para cada x no intervalo [0,4], seja $f(x)$ a área da região comum aos dois triângulos (em cinza nas figuras).

Calcule $f(1)$ e $f(3)$.

Exercício 3 - Solução

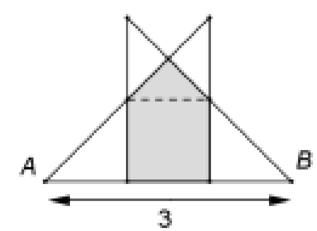
O argumento geral para a resolução desta questão está ilustrado ao lado. O triângulo *ABC* é um dos triângulos resultantes do corte do quadrado, e *D* é um ponto qualquer no lado *AB*. Fazendo *DE* perpendicular a *AB*, o triângulo *ADE* também é retângulo de lados iguais, e sua área é igual a metade da área do quadrado *ADEF*; a área do triângulo *ADG* é então igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado *ADEF*.





Quando $x=1$, a figura formada pela formado pela sobreposição dos triângulos maiores é um triângulo menor, indicado em cinza na figura à esquerda. A observação acima mostra que sua área é a quarta parte da área de um quadrado de lado 1, isto é, $f(1)=\frac{1}{4}$.

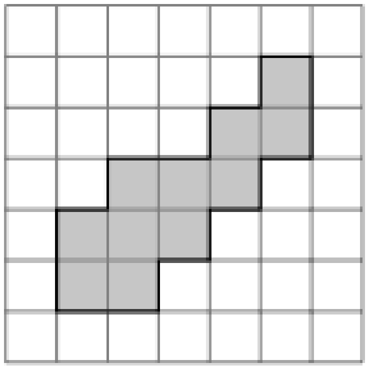
Quando $x=3$, a figura formada pela sobreposição dos dois triângulos é um pentágono, como na figura à direita. Como os triângulos têm catetos de medida 2 e $AB=3$, vemos que os catetos se sobrepõem em um segmento de medida 1. Logo o pentágono é a união de um quadrado de lado 1 e um triângulo idêntico ao que consideramos no início desta questão. Logo $f(3)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$.



11º PIC Programa de Iniciação Científica da OBMEP

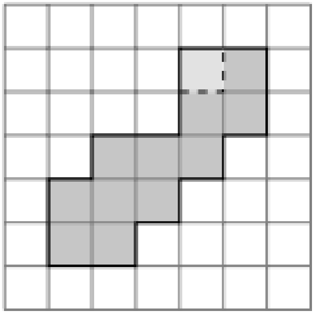
Exercício 4

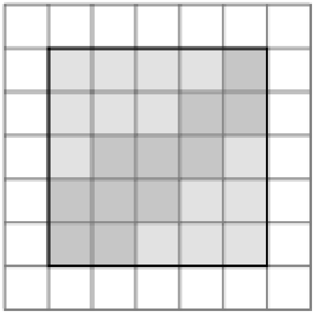
Qual é a área da figura a seguir, usando como unidade a área de um quadrinho? Qual é o perímetro da figura? Quantos quadrinhos podem ser acrescentados à figura de modo a obter o máximo de área sem alterar o perímetro?



Exercício 4 - Solução

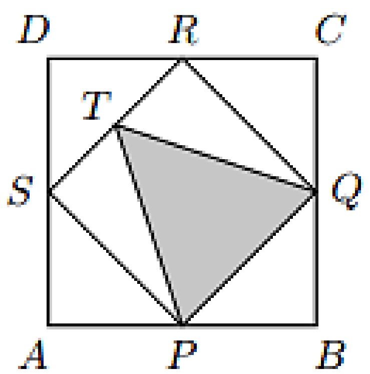
Contando diretamente os segmentos que compõem o contorno da figura vemos que ela tem perímetro igual a 20. Analisando, agora, a figura a seguir à esquerda vemos que se acrescentamos um quadradinho colado na figura, aumentamos a sua área em uma unidade, mas não alteramos o seu perímetro, pois só trocamos de lugar dois segmentos (pontilhados) que já faziam parte do contorno da figura. Podemos ir acrescentando estes quadradinhos até formar um quadrado de lado 5. Portanto, podemos acrescentar mais 14 quadradinhos na figura dada sem alterar o seu perímetro, como está indicado na figura a seguir à direita.





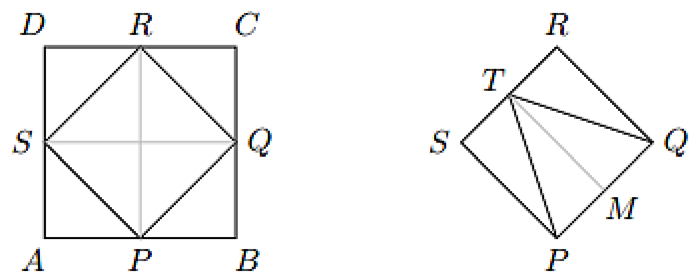
Exercício 5

(OBMEP 2009 – N1Q10 – 1ª fase) Na figura, o quadrado $ABCD$ tem área 40 cm^2. Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do quadrado e T é o ponto médio do segmento RS. Qual é a área do triângulo PQT?



Exercício 5 - Solução

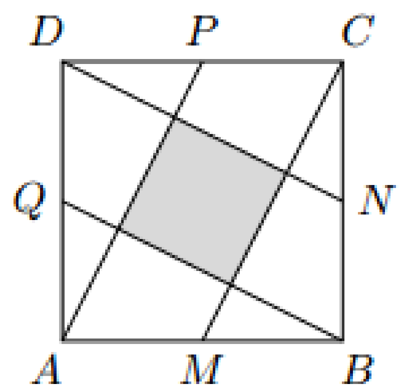
Traçando os segmentos QS e PR, vemos que o quadrado $ABCD$ é composto de oito triângulos retângulos iguais e que o quadrado $PQRS$ é formado por quatro destes triângulos. Portanto, a área do quadrado $PQRS$ é metade da área do quadrado $ABCD$, ou seja, $\dfrac{40}{2} = 20\ \text{cm}^2$.



Traçando agora o segmento TM, sendo M o ponto médio de PQ, vemos que o quadrado $PQRS$ é composto de quatro triângulos retângulos iguais e o triângulo PQT é formado por dois destes triângulos. Logo, a área do triângulo PQT é metade da área do quadrado $PQRS$, ou seja, $\dfrac{20}{2} = 10\ \text{cm}^2$.

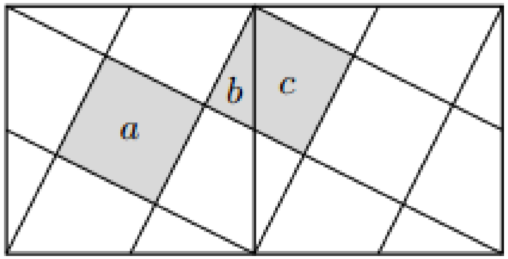
Exercício 6

Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado de lado 10 e M, N, P e Q são pontos médios dos lados deste quadrado. Qual é a área do quadrado sombreado?



Exercício 6 - Solução

O quadrado $ABCD$ está dividido em um quadrado a, quatro triângulos retângulos b e quatro trapézios c. Reproduzindo a figura dada ao lado dela mesma, pode-se concluir que um triângulo retângulo b e um trapézio c formam juntos um quadrado a. Isto é, $a = b + c$.



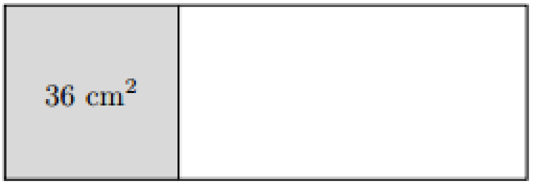
Assim vemos que o quadrado $ABCD$ está dividido em regiões que podem ser reorganizadas para formarem 5 quadrados a. Portanto, a área do quadrado a é igual a um quinto da área do quadrado $ABCD$ e, portanto, a área do quadrado a é igual a $\dfrac{10 \times 10}{5} = 20$.

Exercício 7

(OBMEP 2010 – N1Q3 – 2ª fase) A Professora Clotilde desenhou três figuras no quadro negro, todas com área igual a 108 cm^2.

(A) A primeira figura é um retângulo que tem um lado de comprimento igual a 12 cm. Qual é o perímetro deste retângulo?

(B) A segunda figura é um retângulo dividido em um retângulo branco e um quadrado cinzento de área igual a 36 cm^2, como na figura. Qual é o perímetro do retângulo branco?



Exercício 7 - Solução

(A) Primeiramente vamos lembrar que a área de um retângulo pode ser calculada como o produto dos comprimentos de dois lados adjacentes. No problema, como a área do retângulo é 108 cm^2 e um lado mede 12 cm, o comprimento do lado adjacente, deve ser um número que multiplicado por 12 tenha como resultado 108, ou seja, é $108 \div 12 = 9$. Assim, o perímetro do retângulo é $12 + 12 + 9 + 9 = 42$ cm.

(B) Como o quadrado cinza tem área igual a 36 cm^2, o comprimento de seu lado é um número cujo quadrado é 36, ou seja, é igual 6 cm. Logo o retângulo maior tem um lado de comprimento 6 cm; como sua área é 108 cm^2, segue que seu outro lado mede $108 \div 6 = 18$ cm. Logo um lado do retângulo branco mede 6 cm e o outro mede $18 - 6 = 12$ cm, e assim seu perímetro é $12 + 12 + 6 + 6 = 36$ cm.

Pode-se também argumentar que a área do retângulo branco é $108 - 36 = 72$ cm^2. Como um de seus lados mede 6 cm, o outro mede então $72 \div 6 = 12$ cm; o restante da solução segue como acima.

Estudar para o próximo encontro!

- Seções 2.2, 2.3, 2.4 e 2.6 da Apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Aritmética", F. Dutenhefner, L. Cadar. (http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf)