

# ENCONTRO 7

Neste encontro pretende-se:

- Apresentar os conceitos de área e perímetro de figuras planas.
- Deduzir as expressões para as áreas do quadrado, retângulo, triângulo, paralelogramo e trapézio.
- Resolver problemas de cálculo de áreas e perímetros.

No canal PICOBMEP no YouTube existem vídeos de Aritmética, de Contagem, de Geometria e de Indução Finita. Para utilizar estes vídeos é importante observar que em cada uma destas divisões os vídeos começam numerados com o número 1. Consultando a parte de [Geometria](#), os vídeos [51](#), [52](#), [56](#) e [57](#) tratam dos assuntos que serão estudados neste e no próximo encontro presencial: áreas e o Teorema de Pitágoras. Sugerimos que o estudo da apostila seja acompanhado da visualização atenta destes vídeos.

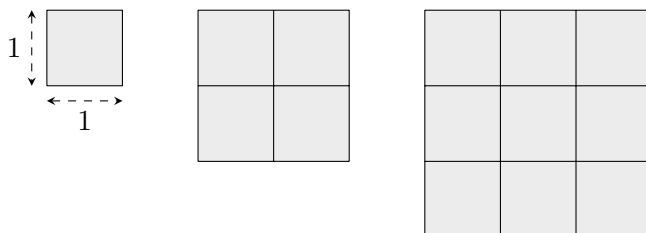
Por outro lado, no [Portal da Matemática](#) existe uma coleção muito variada de vídeos disponibilizados para estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio. Em particular no módulo [Áreas de Figuras Planas](#) do 9º Ano do Ensino Fundamental podem ser encontrados 15 vídeos relacionados com os assuntos deste encontro presencial. Vale a pena dar uma olhada!

## 7.1 Área: conceito e áreas do quadrado e do retângulo

Dada uma figura no plano, vamos definir a área desta figura como o resultado da comparação da figura dada com uma certa unidade de medida. No caso do conceito de área de figuras planas, a unidade de medida utilizada é um quadrado de lado 1 (uma unidade de comprimento). Assim um quadrado de lado 1 tem, por definição, uma unidade de área.

É muito provável que você já tenha aprendido que a área de um quadrado de lado  $\ell$  é igual a  $\ell^2$  e que a área de um retângulo de base  $b$  e altura  $h$  é igual ao produto  $bh$  da base pela altura. Nesta seção pretendemos dar sentido a estas expressões, mostrando como podem ser calculadas as áreas de quadrados e retângulos em que os lados são dados por números naturais e por números racionais.

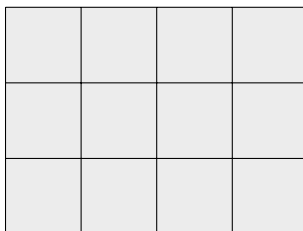
A figura a seguir mostra, respectivamente, quadrados de lado 1, lado 2 e lado 3. Por definição o quadrado de lado 1 tem uma unidade de área. Como o quadrado de lado 2 pode ser dividido em 4 quadrados de lado 1, dizemos que o quadrado de lado 2 tem área igual a 4. Do mesmo modo, como o quadrado de lado 3 pode ser dividido em 9 quadrados de lado 1, dizemos que o quadrado de lado 3 tem área igual a 9.



Generalizando, se um quadrado tem lado  $n$ , em que  $n$  é um número inteiro positivo, então sua área é igual a  $n^2$ , pois dentro deste quadrado cabem exatamente  $n^2$  quadrados de lado 1. Observe que neste cálculo utilizamos intuitivamente as seguintes propriedades do conceito de área:

- Figuras iguais possuem a mesma área.
- Se uma figura está dividida em duas figuras disjuntas, então a soma das áreas dessas duas figuras menores é igual à área da figura total.

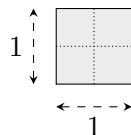
Vejamos agora como calcular a área de um retângulo cujos lados são números inteiros. Por exemplo, o retângulo  $1 \times n$  deve ter área  $n$ , pois ele é formado por  $n$  quadrados unitários. O retângulo  $2 \times n$  é formado por dois retângulos  $1 \times n$ . Assim sua área é  $2n$ . Procedendo desta forma, podemos chegar na expressão  $nm$  para a área do retângulo  $n \times m$ . Exemplificando, o retângulo  $3 \times 4$  da figura a seguir tem área igual a  $3 \cdot 4 = 12$ , pois ele é formado por 12 quadrados unitários, ou por 3 retângulos  $1 \times 4$  (três faixas horizontais).



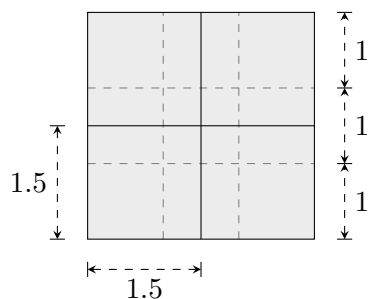
Antes de continuar vale a pena observar que a expressão  $n^2$  para a área de um quadrado de lado  $n$  é um caso particular da expressão  $nm$  da área de um retângulo  $n \times m$ , pois, quando  $n = m$ , este retângulo também é um quadrado.

Até agora vimos que, através de uma simples contagem, é possível calcular as áreas de quadrados e retângulos cujos comprimentos dos lados são números inteiros. Mas e quando estes lados não são números inteiros, como calcular as áreas destas figuras? Bom, afirmamos que a expressão  $n^2$  para a área de um quadrado de lado  $n$  e a expressão  $nm$  para a área de um retângulo de base  $n$  e altura  $m$  continuam válidas mesmo quando  $n$  e  $m$  não são números inteiros. Em vez de apresentar uma demonstração abstrata deste fato, vamos estudar como ele pode ser verificado em alguns exemplos.

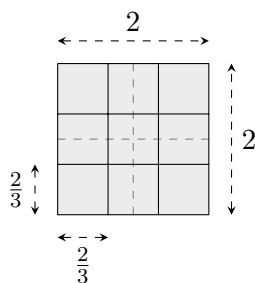
Por exemplo, na figura a seguir vemos que juntando 4 quadradinhos de lado  $\frac{1}{2}$  obtemos um quadrado de lado 1 (nossa unidade de área). Isto significa que a área do quadradinho de lado  $\frac{1}{2}$  é igual a  $\frac{1}{4}$  da área do quadrado de lado 1. Como o quadrado de lado 1 tem área igual a 1, concluímos que a área do quadrado de lado  $\frac{1}{2}$  é igual a  $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ .



Vejamos, agora, como podemos determinar a área do quadrado de lado  $\frac{3}{2} = 1,5$ . Na figura a seguir, vemos que juntando 9 quadradinhos de lado 1,5 obtemos um quadrado de lado 3. Isto nos diz que a área do quadrado de lado 1,5 é igual a  $\frac{1}{4}$  da área do quadrado de lado 3. Como o quadrado de lado 3 tem área igual a  $3^2 = 9$ , concluímos que o quadrado de lado 1,5 tem área igual a  $\frac{1}{4} \times 9 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ .



Como último exemplo, vejamos como determinar a área do quadrado de lado  $\frac{2}{3}$ . Para obter este quadrado, podemos dividir cada lado de um quadrado de lado 2 em três partes, dividindo assim o quadrado de lado 2 em 9 quadrados de lado  $\frac{2}{3}$  (veja a figura a seguir). Esta divisão nos mostra que a área do quadrado de lado  $\frac{2}{3}$  é igual a  $\frac{1}{9}$  da área do quadrado de lado 2. Como o quadrado de lado 2 tem área igual a 4, concluímos que o quadrado de lado  $\frac{2}{3}$  tem área igual a  $\frac{1}{9} \times 4 = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ .



Resumindo os cálculos destes três exemplos:

- O quadrado de lado  $\frac{1}{2}$  tem área igual a  $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ .
- O quadrado de lado  $\frac{3}{2}$  tem área igual a  $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ .

## ▲ 7.1 Área: conceito e áreas do quadrado e do retângulo

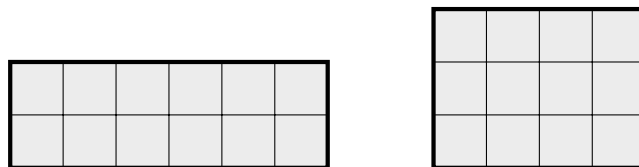
87

- O quadrado de lado  $\frac{2}{3}$  tem área igual a  $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ .

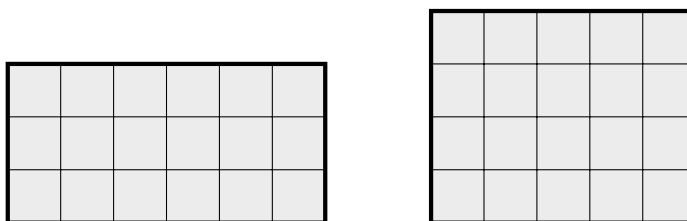
Generalizando, é possível demonstrar que a área do quadrado de lado  $x$  é igual a  $x^2$ , para qualquer que seja o número  $x$ . E para retângulos também podemos demonstrar que para quaisquer  $x$  e  $y$ , a área do retângulo de base  $x$  e altura  $y$  é igual a  $xy$ . Portanto, tanto para quadrados quanto para retângulos a área é dada pelo “produto da base pela altura”.

Antes de apresentar exemplos, lembre-se de que o perímetro de um quadrilátero é a soma dos comprimentos dos seus quatro lados. Deste modo, se um retângulo tem lados  $x$  e  $y$ , então o seu perímetro é igual a  $2x + 2y$ , enquanto que a sua área é  $xy$ . Pelas próprias definições vemos que área e perímetro são grandezas de natureza diferentes e que não podem ser confundidas. A área mede a porção do plano que é ocupada pela figura e o perímetro mede o comprimento do seu contorno. Além disso, como exemplificado logo a seguir, existem retângulos de áreas iguais, mas com perímetros diferentes e, reciprocamente, existem retângulos com perímetros iguais, mas com áreas diferentes.

- A figura a seguir ilustra dois retângulos de mesma área, mas de perímetros diferentes. O retângulo  $2 \times 6$  tem perímetro 16 enquanto que o retângulo  $3 \times 4$  tem perímetro 14, apesar de estes dois retângulos possuírem áreas iguais a 12.



- Por outro lado, a figura a seguir ilustra dois retângulos com mesmo perímetro, mas de áreas diferentes. O retângulo  $3 \times 6$  tem área 18 enquanto o retângulo  $4 \times 5$  tem área 20, apesar de estes dois retângulos possuírem perímetros iguais a 18.



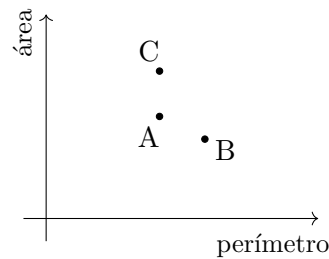
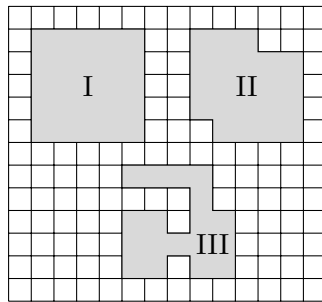
No [vídeo 51](#) da parte de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube pode ser encontrada uma explicação bastante detalhada para as expressões das áreas de um quadrado, de um retângulo e de um losango.

No Portal da Matemática, 9º Ano do Ensino Fundamental, módulo de Áreas de Figuras Planas, no vídeo [Parte I: retângulos](#) também pode ser encontrada uma explicação para a expressão da área de um quadrado e de um retângulo com lados inteiros, racionais e incomensuráveis.

O estudo dos próximos exemplos pode ajudar no entendimento dos conceitos de área e perímetro.

**Exemplo 1: (OBMEP 2007 – N2Q15 – 1ª fase)** A figura mostra três polígonos desenhados em uma folha quadriculada. Para cada um destes polígonos foi assinalado, no plano cartesiano à direita, o ponto cujas coordenadas horizontal e vertical são, respectivamente, seu perímetro e sua área.

▲ 7.1 Área: conceito e áreas do quadrado e do retângulo



Qual é a correspondência correta entre os polígonos e os pontos?

- (a) I  $\rightarrow$  C, II  $\rightarrow$  B, III  $\rightarrow$  A
- (b) I  $\rightarrow$  B, II  $\rightarrow$  A, III  $\rightarrow$  C
- (c) I  $\rightarrow$  A, II  $\rightarrow$  C, III  $\rightarrow$  B
- (d) I  $\rightarrow$  A, II  $\rightarrow$  B, III  $\rightarrow$  C
- (e) I  $\rightarrow$  C, II  $\rightarrow$  A, III  $\rightarrow$  B

Solução. Usando o lado  $\ell$  de um dos quadradinhos do quadriculado como unidade de comprimento, a contagem direta na figura nos dá as áreas e perímetros dos polígonos, conforme a tabela abaixo.

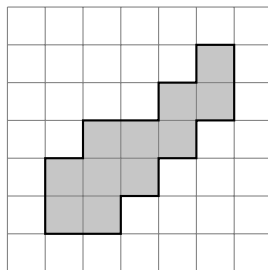
Polígono	Perímetro (em $\ell$ )	Área (em $\ell^2$ )
I	20	$5 \times 5 = 25$
II	20	$25 - 3 = 22$
III	30	$25 - 7 = 18$

Deste modo, a correspondência que associa a cada polígono um par ordenado no plano cartesiano é I  $\rightarrow$  (20, 25), II  $\rightarrow$  (20, 22) e III  $\rightarrow$  (30, 18). Os pontos correspondentes a I e II têm a mesma abscissa (perímetro)

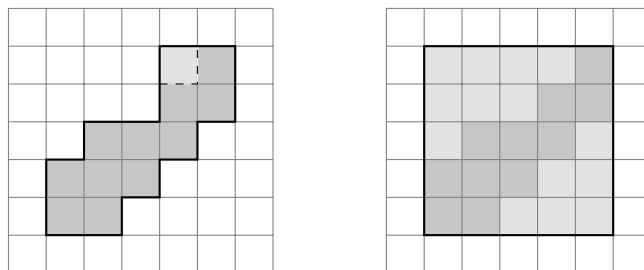


logo estão na mesma reta vertical no plano cartesiano; como o ponto correspondente a I tem ordenada (área) maior, ele é o que está mais acima. Logo  $I \rightarrow C$  e  $II \rightarrow A$ . Resta  $III \rightarrow B$ .

**Exemplo 2:** Qual é a área da figura a seguir, usando como unidade a área de um quadrinho? Qual é o perímetro da figura? Quantos quadrinhos podem ser acrescentados à figura de modo a obter o máximo de área sem alterar o perímetro?



Solução. Contando diretamente os segmentos que compõem o contorno da figura vemos que ela tem perímetro igual a 20. Analisando, agora, a figura a seguir à esquerda vemos que se acrescentamos um quadradinho colado na figura, aumentamos a sua área em uma unidade, mas não alteramos o seu perímetro, pois só trocamos de lugar dois segmentos (pontilhados) que já faziam parte do contorno da figura. Podemos ir acrescentando estes quadradinhos até formar um quadrado de lado 5. Portanto, podemos acrescentar mais 14 quadradinhos na figura dada sem alterar o seu perímetro, como está indicado na figura a seguir à direita.



**Exemplo 3: (OBMEP 2006 – N1Q1 – 2ª fase)** Miguilim brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem 3 cm, 4 cm e 6 cm. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triângulo com um lado do outro, sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo vemos duas das figuras que ele fez.

- (A) Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas Figuras I e II?
- (B) Calcule os perímetros das Figuras I e II.
- (C) Qual o menor perímetro de uma figura que Miguilim pode formar? Desenhe duas figuras que ele pode formar com este perímetro.

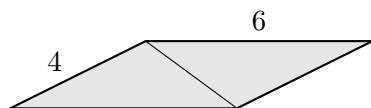


Figura I

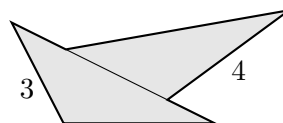
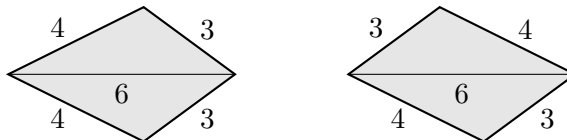


Figura II

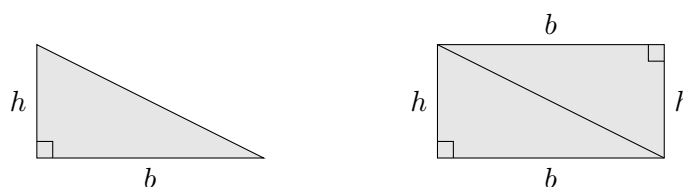
Solução.

- (A) Na Figura I, verificamos que as medidas de dois lados que não foram unidos são 4 cm e 6 cm. Como os dois lados unidos são do mesmo tamanho, eles não podem medir nem 4 cm nem 6 cm, logo medem 3 cm. Na Figura II, o triângulo que está mais acima tem um lado livre de 4 cm e claramente o lado que foi unido ao triângulo de baixo é menor do que o lado livre não identificado. Portanto, o lado do triângulo superior que foi unido ao de baixo mede 3 cm. No triângulo de baixo, claramente o maior lado foi unido ao lado do triângulo de cima. Este lado mede 6 cm.
- (B) Os lados de medida 3 cm não fazem parte do perímetro da Figura I. Logo o perímetro da Figura I é igual a  $2 \cdot (4 + 6) = 20$  cm. O lado de 3 cm de um triângulo e o pedaço de 3 cm do lado maior do outro triângulo não fazem parte do perímetro da Figura II. Logo, o perímetro da Figura II é igual a  $6 + 4 + 3 + 4 + (6 - 3) = 20$  cm.
- (C) O perímetro de uma figura obtida quando se unem lados dos dois triângulos é igual à soma dos perímetros dos dois triângulos menos duas vezes o comprimento do menor dos lados que foram unidos. Assim, o perímetro da figura é o menor possível quando unirmos os dois lados de 6 cm; neste caso o perímetro é igual a  $2 \cdot (3 + 4 + 6) - 2 \cdot 6 = 14$  cm. As duas figuras abaixo têm perímetro mínimo.



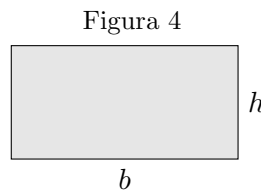
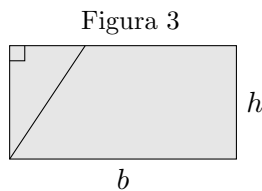
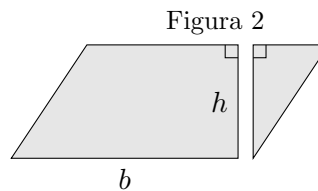
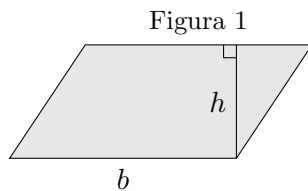
## 7.2 A área de um triângulo retângulo

Um triângulo retângulo de base  $b$  e de altura  $h$  é a metade de um retângulo de base  $b$  e de altura  $h$ . Como a área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura, segue que a área de um triângulo retângulo é igual a metade da base vezes a altura, ou seja, a área do triângulo retângulo de base  $b$  e altura  $h$  é dada pela expressão  $\frac{bh}{2}$ .

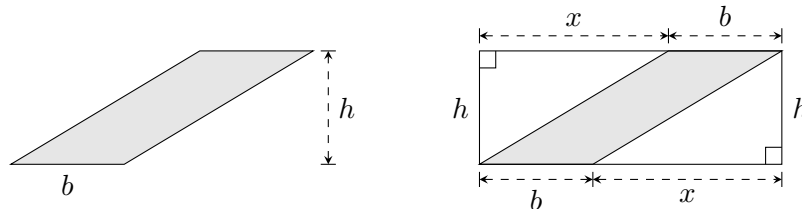


## 7.3 A área do paralelogramo

Sabemos que um paralelogramo é um quadrilátero com pares de lados opostos paralelos e de mesmo comprimento. A distância  $h$  entre dois lados opostos de um paralelogramo é chamada de **altura** em relação a estes lados, enquanto que estes dois lados são chamados de **bases** do paralelogramo. Quando um segmento  $h$  perpendicular a uma base do paralelogramo intersecta a base oposta, a sequência de figuras a seguir ilustra como, nestes casos, um paralelogramo de base  $b$  e altura  $h$  pode ser transformado, sem alterar a sua área, em um retângulo também de base  $b$  e altura  $h$ . Como a área do retângulo é  $bh$ , vemos que a área do paralelogramo também é dada por esta expressão.



Agora, de modo geral, considere um paralelogramo qualquer de base  $b$  e de altura  $h$ . Adicionando ao paralelogramo dois triângulos retângulos iguais, como indicado na figura a seguir, formamos um retângulo de base  $b + x$  e de altura  $h$ .



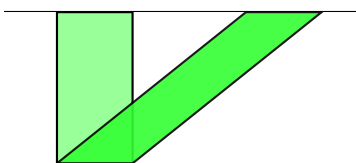
Portanto, para obter a área do paralelogramo, podemos subtrair da área do retângulo de base  $b + x$  e altura  $h$  as áreas dos dois triângulos retângulos de base  $x$  e altura  $h$ . Logo a área do paralelogramo é dada por

$$(b + x)h - \frac{xh}{2} - \frac{xh}{2} = bh + xh - \frac{xh}{2} - \frac{xh}{2} = bh.$$

Assim, para quaisquer paralelogramos e retângulos, suas áreas são calculadas pela mesma expressão “base vezes altura”.

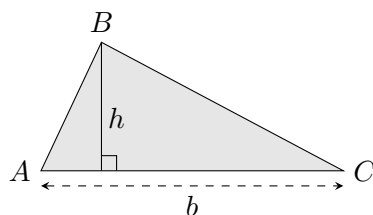
▲ 7.4 A área de um triângulo qualquer

Como a área de um paralelogramo é o produto da base vezes a altura, todos os paralelogramos de mesma base e mesma altura possuem áreas iguais. A figura a seguir ilustra, então, um retângulo e um paralelogramo com áreas iguais.

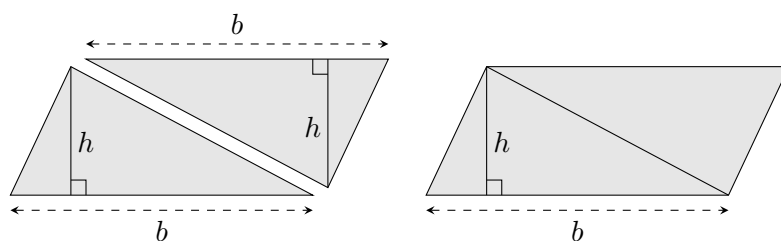


### 7.4 A área de um triângulo qualquer

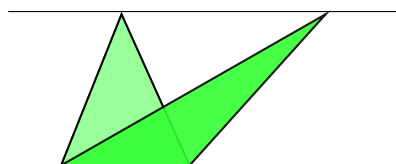
Considere um triângulo qualquer  $ABC$ . Seja  $b$  o comprimento do seu lado  $AC$ . A **altura** do triângulo em relação a **base**  $AC$  é o segmento que passa pelo vértice  $B$  e é perpendicular a reta  $\overleftrightarrow{AC}$ . Seja  $h$  o comprimento desta altura.



Nas figuras a seguir vemos que com duas cópias de um triângulo de base  $b$  e altura  $h$  podemos montar um paralelogramo de base  $b$  e altura  $h$  (veja o exercício 1 da seção 6.2). Assim o paralelogramo tem o dobro da área do triângulo. Como a área do paralelogramo é “base vezes altura”, a área do triângulo deve ser “base vezes altura dividido por dois”, uma vez que o triângulo tem metade da área do paralelogramo. Deste modo, a área do triângulo de base  $b$  e altura  $h$  é  $\frac{b \cdot h}{2}$ .



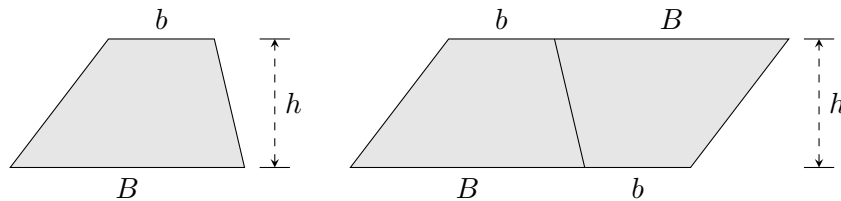
Da expressão da área de um triângulo segue que se dois triângulos possuem a mesma base e a mesma altura, então eles possuem a mesma área. Na figura a seguir, se as retas são paralelas, vemos triângulos diferentes, mas com áreas iguais.



### 7.5 A área do trapézio

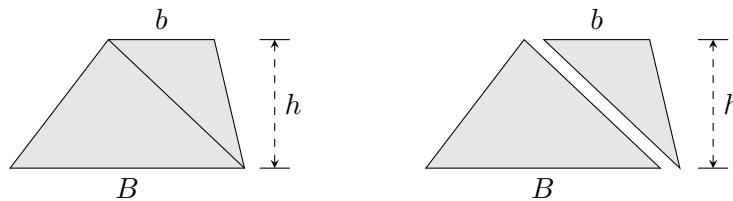
Considere um trapézio de lados paralelos de comprimentos  $b$  e  $B$ . Estes lados são chamados de **bases** do trapézio e um segmento perpendicular a estas bases é chamado de **altura** do trapézio. Seguindo os esquemas abaixo, vemos que com duas cópias do trapézio de bases  $b$  e  $B$  e de altura  $h$  pode-se construir um paralelogramo de base  $b + B$  e de altura  $h$ . Por isto, a área do trapézio de bases  $b$  e  $B$  e altura  $h$  é a metade da área do paralelogramo de base  $b + B$  e altura  $h$ . Logo a área deste trapézio é dada por  $\frac{(b + B)h}{2}$ .

▲ 7.6 Exemplos resolvidos



De outro modo, a área de um trapézio de bases  $b$  e  $B$  e de altura  $h$  também pode ser calculada da seguinte maneira. Traçando uma diagonal do trapézio, como está indicado na figura a seguir, vemos que é possível dividir o trapézio em dois triângulos: um de base  $b$  e de altura  $h$  e o outro de base  $B$  e de altura  $h$ . Somando as áreas destes triângulos obtemos a área do trapézio:

$$\frac{bh}{2} + \frac{Bh}{2} = \frac{(b+B)h}{2}$$

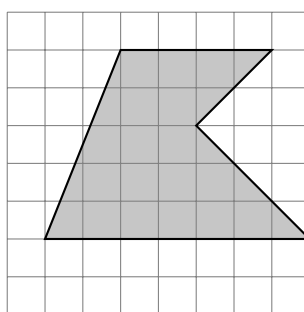
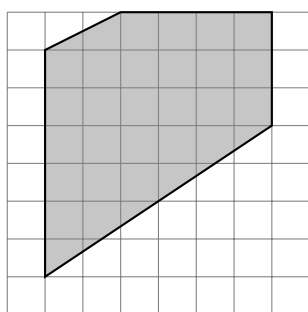


## 7.6 Exemplos resolvidos

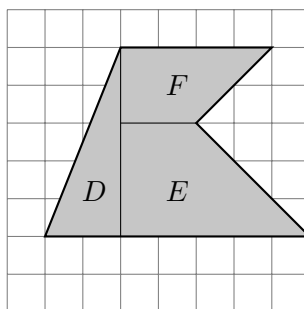
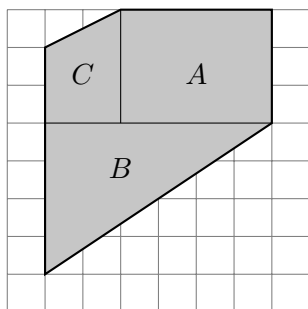
Nesta seção vamos utilizar os conceitos introduzidos nas seções anteriores para resolver alguns problemas de cálculo de áreas e perímetros. Esperamos que estes exemplos, e a maneira como as soluções estão redigidas, ajudem os alunos a resolverem e a escreverem as soluções dos exercícios apresentados nas próximas seções.



**Exemplo 1:** Decompondo em figuras geométricas mais simples, calcule a área de cada uma das seguintes figuras desenhadas em uma malha de quadrados de lado 1.



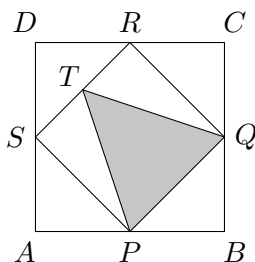
Solução. Na figura a seguir, apresentamos uma possível decomposição das figuras dadas em triângulos, retângulos e trapézios.



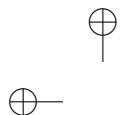
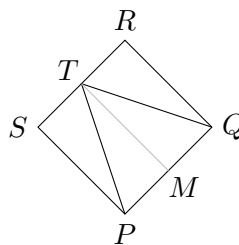
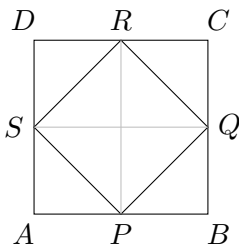
A figura da esquerda está decomposta em um retângulo  $A$  de lados 3 e 4; um triângulo retângulo  $B$  de catetos 6 e 4 e um trapézio  $C$  de bases 2 e 3 e de altura 2. Portanto, as áreas são:  $\text{área}(A) = 3 \cdot 4 = 12$ ,  $\text{área}(B) = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$  e  $\text{área}(C) = \frac{(2+3)2}{2} = 5$ . Deste modo, a área da figura da esquerda é  $12 + 12 + 5 = 29$ .

A figura da direita está decomposta em um triângulo retângulo  $D$  de catetos 2 e 5; um trapézio  $E$  de bases 2 e 5 e de altura 3; e um trapézio  $F$  de bases 2 e 4 e de altura 2. As áreas destas figuras são:  $\text{área}(D) = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$ ,  $\text{área}(E) = \frac{(2+5)3}{2} = 10,5$  e  $\text{área}(F) = \frac{(2+4)2}{2} = 6$ . Portanto, a área da figura da direita é igual a  $5 + 10,5 + 6 = 21,5$ .

**Exemplo 2: (OBMEP 2009 – N1Q10 – 1ª fase)** Na figura, o quadrado  $ABCD$  tem área  $40 \text{ cm}^2$ . Os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  são pontos médios dos lados do quadrado e  $T$  é o ponto médio do segmento  $RS$ . Qual é a área do triângulo  $PQT$ ?

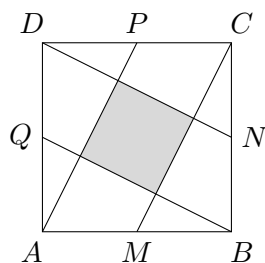


Solução. Traçando os segmentos  $QS$  e  $PR$ , vemos que o quadrado  $ABCD$  é composto de oito triângulos retângulos iguais e que o quadrado  $PQRS$  é formado por quatro destes triângulos. Portanto, a área do quadrado  $PQRS$  é metade da área do quadrado  $ABCD$ , ou seja,  $\frac{40}{2} = 20 \text{ cm}^2$ .

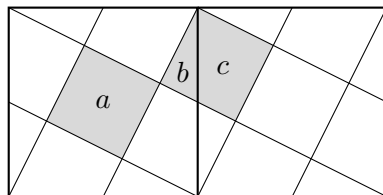


Traçando agora o segmento  $TM$ , sendo  $M$  o ponto médio de  $PQ$ , vemos que o quadrado  $PQRS$  é composto de quatro triângulos retângulos iguais e o triângulo  $PQT$  é formado por dois destes triângulos. Logo, a área do triângulo  $PQT$  é metade da área do quadrado  $PQRS$ , ou seja,  $\frac{20}{2} = 10 \text{ cm}^2$ .

**Exemplo 3:** Na figura a seguir,  $ABCD$  é um quadrado de lado 10 e  $M, N, P$  e  $Q$  são pontos médios dos lados deste quadrado. Qual é a área do quadrado sombreado?



Solução. O quadrado  $ABCD$  está dividido em um quadrado  $a$ , quatro triângulos retângulos  $b$  e quatro trapézios  $c$ . Reproduzindo a figura dada ao lado dela mesma, pode-se concluir que um triângulo retângulo  $b$  e um trapézio  $c$  formam juntos um quadrado  $a$ . Isto é,  $a = b + c$ .

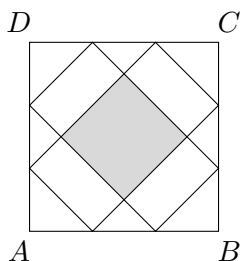


Assim vemos que o quadrado  $ABCD$  está dividido em regiões que podem ser reorganizadas para formarem 5 quadrados  $a$ . Portanto, a área do

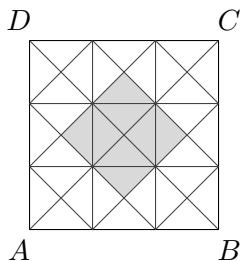
▲ 7.6 Exemplos resolvidos

quadrado  $a$  é igual a um quinto da área do quadrado  $ABCD$  e, portanto, a área do quadrado  $a$  é igual a  $\frac{10 \times 10}{5} = 20$ .

**Exemplo 4:** Na figura a seguir,  $ABCD$  é um quadrado de lado 18. Sobre cada um dos seus lados estão marcados dois pontos que dividem o lado do quadrado em 3 partes iguais. Traçando alguns segmentos que unem estes pontos, foi obtida a seguinte figura. Qual é a área do quadrado sombreado?

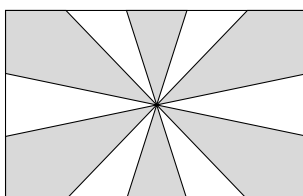


Solução. Desenhando vários segmentos de reta como está indicado na figura a seguir, podemos dividir o quadrado  $ABCD$  em 36 triângulos iguais.

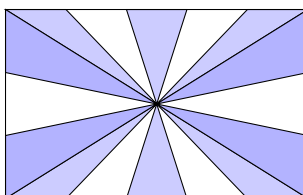


A área de cada um destes triângulos é igual a área do quadrado  $ABCD$  dividida por 36, ou seja,  $\frac{18 \times 18}{36} = 9$ . Como o quadrado sombreado é formado por 8 destes triângulos, a sua área é igual a  $8 \times 9 = 72$ .

**Exemplo 5:** (Banco de Questões 2011, Nível 1, questão 11, página 15)  
 O Tio Mané é torcedor doente do Coco da Selva Futebol Clube e resolveu fazer uma bandeira para apoiar seu time no jogo contra o Desportivo Quixajuba. Para isto, comprou um tecido branco retangular com 100 cm de largura e 60 cm de altura. Dividiu dois de seus lados em cinco partes iguais e os outros dois em três partes iguais, marcou o centro do retângulo e pintou o tecido da forma indicada na figura. Qual é a área do tecido que Tio Mané pintou?



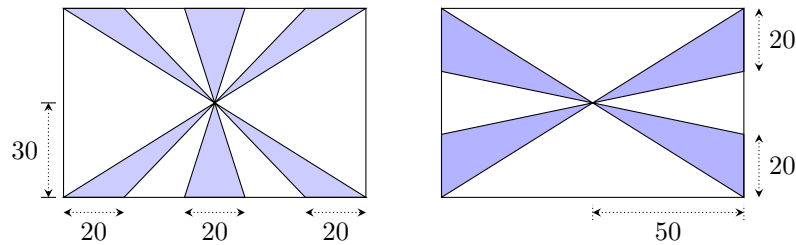
Solução. As diagonais do retângulo dividem as regiões pintadas do tecido em dois tipos de triângulos.



Todos os seis triângulos da figura seguinte, à esquerda, possuem base de 20 cm e altura de 30 cm. Portanto, eles possuem mesma área igual a  $\frac{20 \cdot 30}{2} = 300 \text{ cm}^2$ . Todos os quatro triângulos da figura seguinte, à direita, possuem a mesma área, pois eles têm base de 20 cm e altura de 50 cm. Logo cada um deles tem área igual a  $\frac{20 \cdot 50}{2} = 500 \text{ cm}^2$ .

▲ 7.6 Exemplos resolvidos

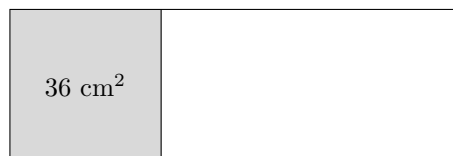
103



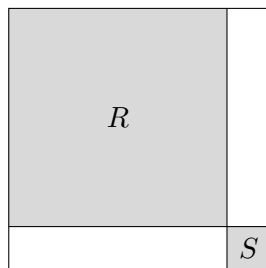
Portanto, a área total pintada no tecido é igual a  $6 \cdot 300 + 4 \cdot 500 = 3800 \text{ cm}^2$ .

**Exemplo 6:** (OBMEP 2010 – N1Q3 – 2ª fase) A Professora Clotilde desenhou três figuras no quadro negro, todas com área igual a  $108 \text{ cm}^2$ .

- (A) A primeira figura é um retângulo que tem um lado de comprimento igual a 12 cm. Qual é o perímetro deste retângulo?
- (B) A segunda figura é um retângulo dividido em um retângulo branco e um quadrado cinzento de área igual a  $36 \text{ cm}^2$ , como na figura. Qual é o perímetro do retângulo branco?



- (C) A terceira figura é um quadrado, que ela dividiu em dois retângulos brancos e dois quadrados cinzentos  $R$  e  $S$ , como na figura. O perímetro de um dos retângulos é três vezes o perímetro do quadrado  $S$ . Qual é a área do quadrado  $R$ ?

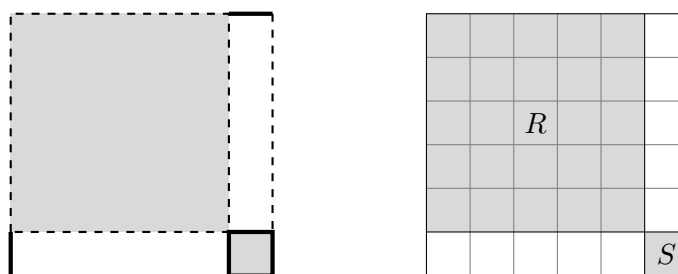


Solução.

- (A) Primeiramente vamos lembrar que a área de um retângulo pode ser calculada como o produto dos comprimentos de dois lados adjacentes. No problema, como a área do retângulo é  $108 \text{ cm}^2$  e um lado mede  $12 \text{ cm}$ , o comprimento do lado adjacente, deve ser um número que multiplicado por  $12$  tenha como resultado  $108$ , ou seja, é  $108 \div 12 = 9$ . Assim, o perímetro do retângulo é  $12 + 12 + 9 + 9 = 42 \text{ cm}$ .
- (B) Como o quadrado cinza tem área igual a  $36 \text{ cm}^2$ , o comprimento de seu lado é um número cujo quadrado é  $36$ , ou seja, é igual  $6 \text{ cm}$ . Logo o retângulo maior tem um lado de comprimento  $6 \text{ cm}$ ; como sua área é  $108 \text{ cm}^2$ , segue que seu outro lado mede  $108 \div 6 = 18 \text{ cm}$ . Logo um lado do retângulo branco mede  $6 \text{ cm}$  e o outro mede  $18 - 6 = 12 \text{ cm}$ , e assim seu perímetro é  $12 + 12 + 6 + 6 = 36 \text{ cm}$ . Pode-se também argumentar que a área do retângulo branco é  $108 - 36 = 72 \text{ cm}^2$ . Como um de seus lados mede  $6 \text{ cm}$ , o outro mede então  $72 \div 6 = 12 \text{ cm}$ ; o restante da solução segue como acima.
- (C) Na figura a seguir, marcamos os lados do quadrado  $R$  em pontilhado e os lados do quadrado  $S$  em traço mais grosso. Para simplificar, vamos nos referir ao comprimento de um segmento grosso

apenas como “grosso”, e do mesmo modo para “pontilhado”. O perímetro do quadrado  $S$  é igual a quatro grossos. Observamos que os retângulos brancos são iguais, pois têm os mesmos lados, e seu perímetro é igual a dois grossos mais dois pontilhados. Por outro lado, o enunciado diz que o perímetro de um destes retângulos é igual a três vezes o perímetro de  $S$ , isto é, igual a doze grossos. Logo, os dois pontilhados devem ser iguais a dez grossos, ou seja, cada pontilhado é igual a cinco grossos.

Notamos agora que um lado do quadrado grande é igual a um grosso mais um pontilhado, ou seja, é igual a seis grossos. Podemos então decompor o quadrado grande em  $6 \times 6 = 36$  quadradinhos iguais ao quadrado  $S$ , como na figura a seguir. Como a área do quadrado maior é igual a  $108 \text{ cm}^2$ , a área de um destes quadradinhos é igual a  $108 \div 36 = 3 \text{ cm}^2$ . Finalmente, o quadrado  $R$  consiste de  $5 \times 5 = 25$  quadradinhos e então sua área é igual a  $25 \times 3 = 75 \text{ cm}^2$ .



## 7.7 Questões da OBMEP no Portal da Matemática

No [Portal da Matemática](#), na área reservada para o 9º Ano do Ensino Fundamental, no módulo “Áreas de Figuras Planas”, nos quatro últimos vídeos são resolvidas onze questões de provas da OBMEP:



Questões resolvidas na [PARTE 1:](#)

- OBMEP 2013 – N2Q4 – 1ª fase
- OBMEP 2013 – N2Q7 – 1ª fase

Questões resolvidas na [PARTE 2:](#)

- OBMEP 2013 – N2Q9 – 1ª fase
- OBMEP 2012 – N1Q12 – 1ª fase
- OBMEP 2012 – N2Q8 – 1ª fase

Questões resolvidas na [PARTE 3:](#)

- OBMEP 2012 – N2Q15 – 1ª fase
- OBMEP 2011 – N2Q4 – 1ª fase
- OBMEP 2011 – N2Q10 – 1ª fase

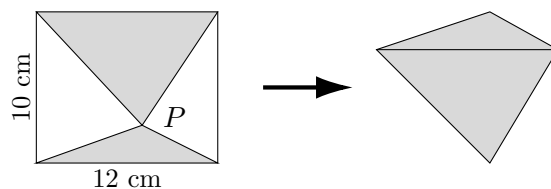
Questões resolvidas na [PARTE 4:](#)

- OBMEP 2010 – N2Q6 – 1ª fase
- OBMEP 2010 – N2Q8 – 1ª fase
- OBMEP 2010 – N2Q13 – 1ª fase

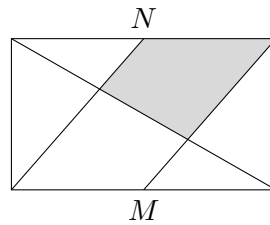
No que segue apresentamos os enunciados destas onze questões. Recomendamos que você tente resolver estas questões sozinho e, somente depois de pensar bastante e de obter uma resposta parcial ou completa, estude as soluções apresentadas nos vídeos. Deste modo, como na seção anterior, as questões a seguir podem ser vistas como mais uma lista de exercícios resolvidos. Só que, em vez das soluções estarem aqui na apostila, as soluções estão disponíveis no Portal da Matemática. Bons estudos! E lembre-se: se você tiver dúvidas, procure o seu Professor Orientador ou o seu Moderador no Fórum Hotel de Hilbert.

**Exercícios:**

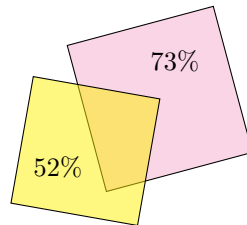
1. **(OBMEP 2013 – N2Q4 – 1ª fase)** Juliana desenhou, em uma folha de papel, um retângulo de comprimento 12 cm e largura 10 cm. Ela escolheu um ponto  $P$  no interior do retângulo e recortou os triângulos sombreados como na figura. Com estes triângulos, ela montou o quadrilátero da direita. Qual é a área do quadrilátero?



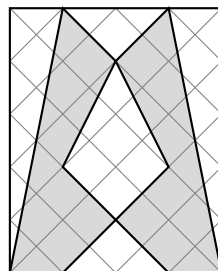
2. **(OBMEP 2013 – N2Q7 – 1ª fase)** A figura representa um retângulo de  $120 \text{ m}^2$  de área. Os pontos  $M$  e  $N$  são os pontos médios dos lados  $a$  que pertencem. Qual é a área da região sombreada?



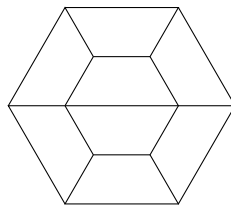
3. (OBMEP 2013 – N2Q9 – 1ª fase) Dois quadrados de papel se sobrepõem como na figura. A região não sobreposta do quadrado menor corresponde a 52% de sua área e a região não sobreposta do quadrado maior corresponde a 73% de sua área. Qual é a razão entre o lado do quadrado menor e o lado do quadrado maior?



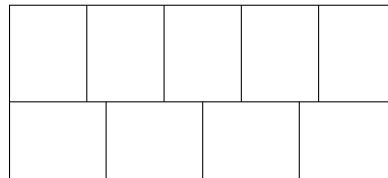
4. (OBMEP 2012 – N1Q12 – 1ª fase) O retângulo da figura, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado, mede 4 cm de largura por 5 cm de altura. Qual é a área da região sombreada de cinza?



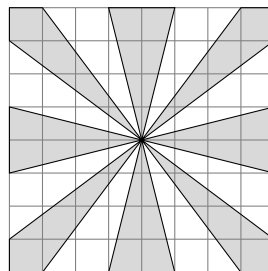
5. (OBMEP 2012 – N2Q8 – 1ª fase) A figura foi formada por oito trapézios isósceles idênticos, cuja base maior mede 10 cm. Qual é a medida, em centímetros, da base menor de cada um destes trapézios?



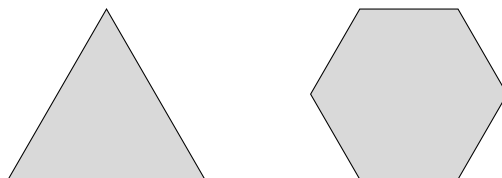
6. (OBMEP 2012 – N2Q15 – 1ª fase) A figura mostra um retângulo de área  $720 \text{ cm}^2$ , formado por nove retângulos menores e iguais. Qual é o perímetro, em centímetros, de um dos retângulos menores?



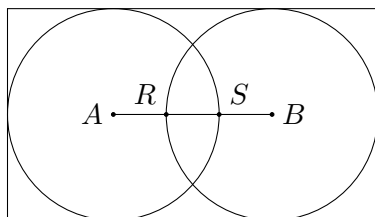
7. (OBMEP 2011 – N2Q4 – 1ª fase) Na figura, os lados do quadrado foram divididos em oito partes iguais. Qual é a razão entre a área cinza e a área deste quadrado?



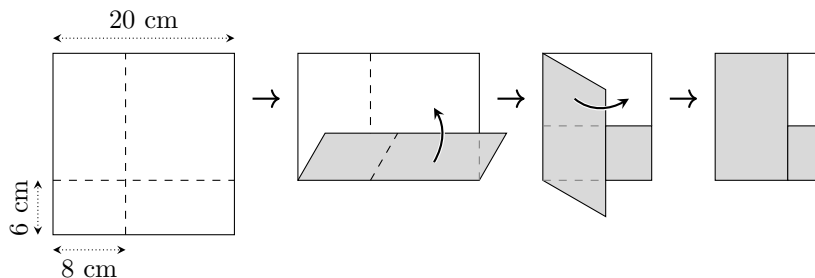
8. (OBMEP 2011 – N2Q10 – 1ª fase) Um triângulo equilátero e um hexágono regular têm o mesmo perímetro. A área do hexágono é  $6 \text{ m}^2$ . Qual é a área do triângulo?



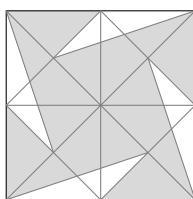
9. (OBMEP 2010 – N2Q6 – 1ª fase) Na figura as circunferências de centros  $A$  e  $B$  são tangentes aos lados do retângulo e têm diâmetros iguais a  $4 \text{ cm}$ . A distância entre os pontos  $R$  e  $S$  é  $1 \text{ cm}$ . Qual é o perímetro do retângulo?



10. (OBMEP 2010 – N2Q8 – 1ª fase) Um quadrado de papel de  $20 \text{ cm}$  de lado, com a frente branca e o verso cinza, foi dobrado ao longo das linhas pontilhadas, como na figura. Qual é a área da parte branca que ficou visível?



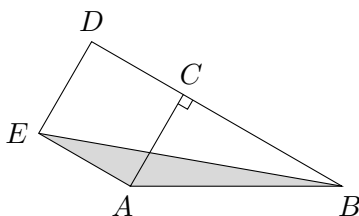
11. (OBMEP 2010 – N2Q13 – 1ª fase) A figura mostra um quadrado com suas diagonais e segmentos que unem os pontos médios de seus lados. A área sombreada corresponde a que fração da área do quadrado?



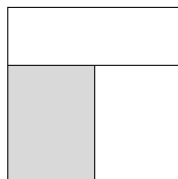
## 7.8 Exercícios de revisão

Nesta seção apresentamos uma pequena lista de exercícios sobre os assuntos explorados neste encontro. Após participar da aula presencial e das atividades do Fórum, você pode utilizar estas questões para fazer uma autoavaliação do seu aprendizado. Reserve um tempo para resolver estas questões sozinho, com calma e sem consulta, como em uma prova. Após se dedicar para resolver estas questões, consulte a apostila ou o seu caderno, converse com o seu Professor Orientador e tire suas dúvidas no Fórum Hotel de Hilbert para ver como foi o seu desempenho nesta pequena atividade. Ela poderá ajudar a identificar o que você já aprendeu com clareza e também poderá mostrar aquela parte da teoria que você ainda precisa se dedicar mais. Esperamos que todos vocês gostem e aproveitem este desafio. Bons estudos!

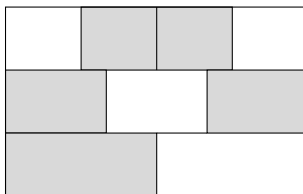
1. Na figura a seguir,  $ACDE$  é um quadrado com  $14 \text{ cm}^2$  de área. Qual é a área do triângulo  $ABE$ ?



2. (OBMEP 2009 – N1Q17 – 1ª fase) A figura mostra um quadrado de lado 12 cm, dividido em três retângulos de mesma área. Qual é o perímetro do retângulo sombreado?



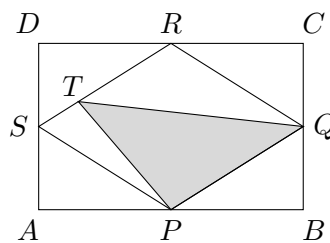
3. (OBMEP 2013 – N1Q6 – 1ª fase) A figura representa um retângulo de área  $36 \text{ m}^2$ , dividido em três faixas de mesma largura. Cada uma das faixas está dividida em partes iguais: uma em quatro partes, outra em três e a terceira em duas. Qual é a área total das partes sombreadas?



▲ 7.8 Exercícios de revisão

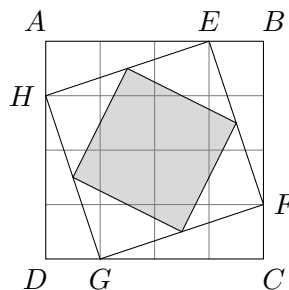
113

4. (OBMEP 2009 – N2Q12 – 1ª fase) Na figura o retângulo  $ABCD$  tem área  $40 \text{ cm}^2$ . Os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  são pontos médios dos lados do retângulo e  $T$  está no segmento  $RS$ . Qual é a área do triângulo  $PQT$ ?



5. (OBMEP 2005 – N2Q4 – 2ª fase) O quadrado  $ABCD$  da figura está dividido em 16 quadradinhos iguais. O quadrado sombreado tem os vértices sobre os pontos médios do quadrado  $EFGH$ .

- (A) A área do quadrado  $EFGH$  corresponde a que fração da área do quadrado  $ABCD$ ?
- (B) Se o quadrado  $ABCD$  tem  $80 \text{ cm}^2$  de área, qual é o lado do quadrado sombreado?





6. (OBMEP 2006 – N1Q4 – 2ª fase) Uma folha retangular de 20 cm por 30 cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas  $AC$  e  $BD$  em quatro pedaços: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na Figura I. Os segmentos  $AC$  e  $BD$  têm o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos.

- (A) Qual é o comprimento do segmento  $AB$ ?
- (B) Qual é a área de um pedaço triangular? E de um pedaço de cinco lados?
- (C) Com os quatro pedaços podemos montar um quadrado com um buraco retangular, como na Figura II. Qual é a área do buraco?

