**Respostas dos exercícios sobre Contagem**

1) – a) Se Alice for a presidente, temos as seguintes possibilidades: AB, AC e AD. Se Bernardo for o presidente, temos as seguintes possibilidades: BA, BC e BD. Se Carolina for a presidente, temos as seguintes possibilidades: CA, CB e CD. Se Daniel for o presidente, temos as seguintes possibilidades: DA, DB e DC.

 b) Para escolher o presidente, temos 4 possibilidades, e, após isso, para escolher o vice-presidente, temos apenas 3 possibilidades, pois uma pessoa já terá sido escolhida, independentemente de quem tenha sido. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $4×3=12 $possibilidades.

2) – a) Como são 10 pratos diferentes, pelo Princípio Multiplicativo, podemos escolher um prato deste cardápio de $10×1=10$ modos diferentes.

 b) Ao escolhermos uma salada, logo após, temos que escolher uma sopa e depois um prato principal. São 3 opções de saladas, 3 opções de sopas e 4 opções de pratos principais. Pelo Princípio Multiplicativo, podemos escolher uma refeição completa, de $3×3×4=36$ modos diferentes.

3) Do número 1 até o nove, temos 9 números formados por 1 algarismo, portanto $ 9×1=9$ algarismos. Do número 10 até o 99, temos $99-9=90$ números formados por 2 algarismos, portanto, temos $90×2=180$ algarismos. O número 100 é formado por 3 algarismos. Somando tudo, vemos que, ao se escreverem os números de 1 a 100, são escritos $9+180+3=192$ algarismos.

4) – a) Quando João lança o dado, ele pode cair de 6 formas diferentes. Quando Isabel lança, ele também pode cair de 6 formas diferentes, já que eles não precisam, necessariamente, tirar números diferentes. Pelo Princípio Multiplicativo, as possíveis combinações para o resultado são $6×6=36$.

 b) A maior soma que se pode obter é $6+6=12$ e a menor é $1+1=2$. Podemos perceber que são possíveis todas as somas inteiras entre 2 e 12. Veja: $2=1+1$; $3=1+2$; $4=2+2$; $5=2+3$; $6=3+3$; $7=3+4$; $8=4+4$; $9=4+5$; $10=5+5$; $11=5+6$; $12=6+6$. Assim, o total de somas possíveis é 11.

5) O primeiro filamento, pode estar aceso ou apagado, o segundo também e assim sucessivamente de modo que para cada filamento tem-se 2 possibilidades: ou aceso ou apagado. Como são 7 filamentos, pelo Princípio Multiplicativo, podem ser representados $2^{7}=128$ símbolos diferentes. Porém, entre essas 128, está a de todos os filamentos estarem apagados, que deve ser excluída. Assim, são $128-1=127$ possibilidades.

6) – a) Se a faixa vertical for pintada da cor *x*, as faixas horizontais não poderão ser pintadas desta cor pois são adjacentes à ela. Se a primeira faixa horizontal for pintada da cor *y*, a segunda não poderá ser pintada com a mesma cor pois são adjacentes, então teríamos que pintá-la com outra cor *z*, mas a terceira poderá ser pintada de *y*, pois não é adjacente à faixa correspondente. Uma possibilidade para essa pintura seria: FAIXA VERTICAL: *X*, FAIXA HORIZONTAL 1: *Y*, FAIXA HORIZONTAL 2: *Z* e FAIXA HORIZONTAL 3: *Y*. Assim, o número mínimo de cores a serem usadas é 3.

b) Para realizar essa pintura, vamos seguir a seguinte ordem para as faixas serem pintadas: *Faixa vertical, Faixa horizontal 1, Faixa horizontal 2 e Faixa horizontal 3.* A faixa vertical, pode ser pintada de 6 modos diferentes já que são 6 cores. A faixa horizontal 1 pode ser pintada de 5 modos diferentes, já que é adjacente à faixa vertical. A faixa horizontal 2 pode ser pintada de 4 modos, já que não pode ser pintada da mesma cor da faixa vertical e nem da faixa horizontal 1 por serem adjacentes. A faixa horizontal 3 pode ser pintada de 4 formas já que não pode ser pintada da mesma cor da faixa vertical e nem da mesma cor da faixa horizontal 2, mas pode ser pintada da mesma cor da faixa horizontal 1. Pelo Princípio Multiplicativo a bandeira pode ser pintada de $6×5×4×4=480$ modos diferentes.

7) Podemos dividir esse problema em dois casos: O que dois quadrantes opostos são pintados de cores iguais e o que dois quadrantes opostos são pintados de cores diferentes. Vamos supor que os quadrantes 2 e 4 serão pintados da mesma cor. Assim, serão 5 possibilidades para escolher a cor única dos quadrantes 2 e 4, 4 possibilidades para escolher a cor do quadrante 1 e 4 possibilidades para o quadrante 3, ou seja, $5×4×4=80$ possibilidades. Agora, vamos supor que os quadrantes 2 e 4 serão pintados de cores diferentes. Assim, serão 5 possibilidades para o quadrante 1, 4 possibilidades para o quadrante 2, 3 possibilidades para o quadrante 3 e 3 possibilidades para o quadrante 4, ou seja, são $5×4×3×3=18$. Então os quatro quadrantes podem ser coloridos de $80+180=260$ modos diferentes.

8) Para primeira questão, temos 5 possibilidades de escolha, para a segunda também e assim sucessivamente de modo que, como são 10 questões, serão $5^{10}$ possibilidades de gabaritos nesse teste. Para saber em quantos gabaritos a letra A aparece exatamente uma vez, temos que pensar assim: São 10 questões. Temos que escolher em qual delas a letra A aparece uma vez. Por exemplo, se a letra A for a resposta da questão 1, para as outras, só teremos 4 opções de alternativa para cada, já que a letra A já foi usada. Como serão 10 questões e a letra A tem que estar em exatamente 1 delas, a letra A letra A aparece exatamente uma vez em $10×4^{9}$ desses gabaritos. Se a letra A não aparece, serão apenas 4 possibilidades para cada questão em um total de 10 questões. Então, a letra A não aparece em $4^{10}$ desses gabaritos.

9) Esses subconjuntos são : Ø, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} e o próprio {1, 2, 3}. São um total de 8 conjuntos. De um modo geral, existem duas possibilidades para um elemento de um conjunto com *n* elementos para formar um subconjunto: ou aparece, ou não. Então podemos dizer que, são $2^{n}$ os subconjuntos de um conjunto que tem *n* elementos.

10) A primeira pessoa, tem 5 possibilidades para escolher uma cadeira. A segunda tem 4 possibilidades (já que uma cadeira estará ocupada) e a terceira tem 3 (já que duas cadeiras estarão ocupadas). Assim, pelo Princípio Multiplicativo, 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras em fila de $5×4×3=60$ modos diferentes.

11) Vamos ver, de quantos modos cada um poderá se sentar nos bancos: a primeira mulher, pode se sentar de 10 modos diferentes, já que são 10 lugares vazios. A segunda, pode se sentar de 8 modos diferentes já que não pode se sentar no mesmo lugar da primeira e nem do lado dela. A terceira, quarta e quinta mulheres, seguindo o critério, podem se sentar, respectivamente, de 6, 4 e de 2 modos diferentes. O primeiro homem, pode se sentar de 5 modos diferentes, já que são 5 lugares vazios. O segundo, pode se sentar de 4 modos diferentes. O terceiro, quarto e quinto homens, seguindo o critério, podem se sentar, respectivamente, de 3, 2 e de 1 modos diferentes. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, eles podem se sentar de $10×8×6×4×2×5×4×3×2×1=460800$ modos diferentes.

12) Podemos dividir um tabuleiro $8×8$ em 3 tipos de casa: as casas de canto, as laterais e as centrais. Num tabuleiro $8×8$, temos 64 casas sendo que, são 4 casas de canto, 24 casas laterais que não são vértices e 36 casas centrais. Cada tipo de casa, possui uma certa quantidade de casas adjacentes: as casas de canto possuem 3 casas adjacentes, as laterais possuem 5 casas adjacentes e as centrais possuem 8 casas adjacentes. Temos que contar separadamente os casos em que o rei negro ocupa uma casa de canto, os que ele ocupa uma casa lateral e os que ele ocupa uma casa central.

Se o rei negro ocupa uma casa de canto, ele tem 4 modos diferentes para ocupar uma casa e o rei branco tem 60 modos para ocupar uma casa, já que uma estará ocupada pelo outro rei e 3 serão adjacentes a ela. Assim, será $4×60=240$ modos de colocar os reis no tabuleiro.

Se o rei negro ocupa uma casa lateral, ele tem 24 modos diferentes para ocupar uma casa e o rei branco tem 58 modos para ocupar uma casa, já que uma estará ocupada pelo outro rei e 5 serão adjacentes a ela. Assim, será $24×58=1392$ modos de colocar os reis no tabuleiro.

Se o rei negro ocupa uma casa central, ele tem 36 modos diferentes para ocupar uma casa e o rei branco tem 55 modos para ocupar uma casa, já que uma estará ocupada pelo outro rei e 8 serão adjacentes a ela. Assim, será $36×55=1980$ modos de colocar os reis no tabuleiro.

Assim, o total de possibilidades é de $240+1392+1980=3612$. E, se os reis fossem iguais a resposta seria $\frac{3612}{2}=1806$ possibilidades.

13) Podemos notar que, nesse caso, é mais simples calcular todas as palavras possíveis de 5 letras de um alfabeto de 26 letras, e depois subtrair desse valor, os casos em que A não aprece e os casos que ele aparece na primeira posição. Para um alfabeto de 26 letras, vemos que temos 26 possibilidades para a primeira posição, 26 para a segunda e assim sucessivamente, de modo que pelo Princípio Multiplicativo, podemos formar $26^{5}$ palavras de 5 letras com o alfabeto. Dessas possibilidades, os casos em que A não aparece podem ser calculados seguindo a mesma regra, porém, com 25 possibilidades para cada posição, ou seja, a letra A não aparece em $25^{5}$ palavras. Os casos em que A está na primeira posição, podem ser calculados com o mesmo critério, porém, devemos levar em conta apenas 4 posições, já que a primeira será ocupada por A. Assim temos $26^{4}$ palavras em que A está na primeira posição. Realizando a subtração, temos: $ 26^{5}-25^{5}-26^{4}=11881376-9765625-456976=1658775$.

Se a palavra devesse ter letras distintas, podemos pensar que: Há 4 modos diferentes de escolher a posição do A, 25 modos de escolher a letra da primeira casa restante, 24 para segunda e assim sucessivamente, de modo que podemos formar $4×25×24×23×22=1214400$ palavras.

14) São 26 letras e 10 algarismos. Temos 26 possibilidades de escolher a primeira letra, 26 de escolher a segunda e 26 de escolher a terceira. Para os números, temos 10 modos de escolher o primeiro, 10 modos de escolher o segundo, 10 modos de escolher o terceiro 10 de escolher o quarto. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, poderão ser formadas um total de $26×26×26×10×10×10×10=175760000$ placas diferentes.

15) Vamos ver as possibilidades para cada um dos passageiros:

1º(prefere se sentar de frente): tem 5 opções.

2º(prefere se sentar de frente): tem 4 opções, pois uma já estará ocupada.

3º(prefere se sentar de frente): tem 3 opções, pois duas já estarão ocupadas.

4º(prefere se sentar de frente): tem 2 opções, pois três já estarão ocupadas.

5º(prefere se sentar de costas): tem 5 opções.

6º(prefere se sentar de costas): tem 4 opções, pois uma já estará ocupada.

7º(prefere se sentar de costas): tem 3 opções, pois duas já estarão ocupadas.

8º(não tem preferência): tem 3 opções, pois 7 já estarão ocupadas.

9º(não tem preferência): tem 2 opções, pois 8 já estarão ocupadas.

10º(não tem preferência): tem 1 opção, pois 9 já estarão ocupadas.

Assim, pelo Princípio Multiplicativo eles podem se sentar, de $5×4×3×2×5×4×3×3×2×1=43200$ modos diferentes.

16) – a) O algarismo 0, aparece na posição das unidades, $\frac{2220}{10}=222$ vezes nos números 10,20,30,40...,2220. Ele aparece na posição das dezenas 220 vezes nos números 10x,20x,30x,40x...,220x. E também aparece nas centenas 200 vezes, nos números 10xy, e 20xy. Ou seja, o número 0 é escrito $222+220+200=642$ vezes.

 b) Devemos descontar, dos resultados anteriores, os números que foram contados desnecessariamente. O algarismo 0, aparece na posição das unidades, $\frac{2220}{10}=222$ vezes. Nas dezenas, ele aparece 220 vezes, porém temos que descontar a quantidade de números que no conjunto {10x,20x,30x,40x...,220x}, x=0, que são 22. Nas centenas, ele aparece 200 vezes, mas temos que descontar as vezes em que no conjunto {10xy, 20xy} x=0 ou y=0, que é $2×\left(9+9+1\right)=38$. Então, o algarismo 0 aparece em $222+\left(220-22\right)+\left(200-38\right)=222+198+162=582$ números.

17) Podemos contar o total de números possíveis e depois subtrair deles a quantidade de números em que o 5 não figura. Para a primeira posição, temos 9 possibilidades, já que o 0 não pode ocupa-la. Para a segunda, terceira e quarta, temos 10 possibilidades para cada uma. Então, temos um total de $9×10×10×10=9000$ possibilidades. Agora, vamos contar os números em que o 5 não figura. Para a primeira posição, temos 8 possibilidades, já que esta não pode ser ocupada pelo 0 e nem pelo 5. Para a segunda terceira e quarta, temos 9 possibilidades para cada uma. Então, temos um total de $8×9×9×9=5832$. Logo, a quantidade de números de 4 algarismos em que o 5 não figura, é $9000-5832=3168$.

18) Para que possamos fazer uma coleção, temos que decidir a quantidade de cada revista que poderá fazer parte da coleção. Como isso inclui a quantidade de cada tipo mais um, (porque podemos optar por não escolher um tipo de revista), temos que somar um à quantidade de cada tipo de revista e depois multiplicar tudo. Assim, teremos $6×7×5=210$ coleções possíveis, porém, entre estas está a “coleção vazia” que não podemos contar. Então a resposta é $210-1=209$.

19) Está errada. Escolher a ordem certa em que as bandeiras serão pintadas, é imprescindível. Na resposta do aluno, entre as 32 possibilidades, está a de as faixas extremas terem a mesma cor. Nesse caso, o número de possibilidades para a faixa central seria 3 e não 2. Para responder corretamente, a ordem certa que as faixas devem ser pintadas é da esquerda pra direita ou vice-versa, de modo que serão 4 possibilidades para a primeira faixa, 3 para a segunda e 3 para a terceira. Assim, a resposta certa será $4×3×3=36$.

20) Está errada. Da forma que o aluno respondeu, o casal *x* e *y,* foi contado também como *y* e *x* de modo que foi repetido desnecessariamente. Assim, temos que a resposta certa é simplesmente $5×5=25$, metade da resposta dada pelo aluno.

21) No jogo de dominó, existem as peças com números iguais e as com números diferentes. As que tem números iguais são: 0-0, 1-1, 2-2 e etc., ou seja, 7 peças. As que têm números diferentes, são $7×\frac{6}{2}=7×3=21$, já que temos 7 números diferentes distribuídos em peças em formas de pares. Assim, temos um total de $7+21=28$ possibilidades.

22) Para formar um retângulo, o objetivo é escolher duas linhas e duas colunas, e no tabuleiro 8x8, temos 9 linhas e 9 colunas. Desse modo, as duas linhas podem ser escolhidas de $9×\frac{8}{2}=9×4=36$ modos, assim como as colunas. Então, a resposta é $36×36=1296$.