Módulo de Métodos Sofisticados de Contagens

Combinação completa

Segundo ano

Portal da Matemática
OBMEP

Combinações Completas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. As triplas $(x, y, z) = (2, 2, 0)$, $(1, 2, 1)$ e $(0, 1, 3)$ são soluções de $x + y + z = 4$. Cada uma dessas triplas pode ser associada a uma permutação de bolas ($\bullet$) e símbolos de mais ($+$):

i) $(2, 2, 0)$ escreve-se como

$$\bullet\bullet+\bullet\bullet+.$$

ii) $(1, 2, 1)$ escreve-se como

$$\bullet+\bullet\bullet+\bullet$$

iii) $(0, 1, 3)$ escreve-se como

$$+\bullet+\bullet\bullet\bullet.$$

O mesmo ocorre com todas as outras soluções nos inteiros não negativos. Assim, o número de soluções da equação coincide com o número de permutações de 4 símbolos $\bullet$ e 2 símbolos $+$ que é $P_6^{4,2} = 15$. [1]

Calcule, nos conjuntos universos destacados, as quantidades de soluções das equações abaixo.

a) $x + y = 3$, com $U = \mathbb{N}$.

b) $a + b + c = 7$, com $U = \mathbb{N}$.

c) $A + B + C + D = 9$, com $U = \mathbb{N}^*$.

Exercício 2. Uma fábrica possui 3 cores diferentes para pintar 6 carros iguais, cada um com uma cor. De quantos modos isso pode ser feito?

Exercício 3. Um dominó comum é constituido por um dois quadrados que compartilham um lado em comum. Em cada quadrado está escrito um número do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sabendo que os números escritos nos dois quadrados não precisam ser distintos, quantas peças diferentes de dominó existem?

Observação: O dominó com os números $(1, 5)$ deve ser considerado igual ao dominó com os númmeros $(5, 1)$, ou seja, a ordem dos números no dominó não importa.

[1] O problema geral de resolver a equação

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

no conjunto dos inteiros não negativos pode ser resolvido de forma semelhante. A equação anterior está associada ao problema das Combinações Completas, isto é, o problema de escolhermos k bolas, não necessariamente distintas, dentre n variedades diferentes de bolas. Se cada x_i denota a quantidade de bolas escolhidas da variedade i, o número de combinações completas de n elementos k a k, denotado por $CR_{n,k}$, é igual ao número de permutações de k símbolos $\bullet$ e $n-1$ símbolos $+$. Ou seja, $CR_{n,k} = P_{n+k-1}^{n-1,k}$.

Exercício 4. Podendo escolher entre 5 tipos de doces e 4 marcas de refrigerante, de quantos modos é possível fazer um pedido com dois doces e três garrafas de refrigerante?

Exercício 5. Quantos são os anagramas da palavra

PARAMETRIZADA

que não possuem duas letras "A" juntas?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Qual o número de soluções inteiras e não negativas de $x + y + z = 5$?

Exercício 7. Uma pessoa quer comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito.

a) Sabendo que podem ser compradas de zero a seis empadas de cada tipo, de quantas maneiras distintas essa compra pode ser feita?

b) Sabendo que ele quer provar todos os sabores das empadas, de quantas maneiras distintas essa compra pode ser feita?

Exercício 8. Quantas são as soluções inteiras não negativas da equação $x+y+z = 4$ que possuem apenas uma incógnita nula ?

Exercício 9. De quantas formas podemos colocar 6 anéis iguais em 4 dedos?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 10. Há seis modos distintos de guardar dois cadernos iguais em três gavetas, são eles:

- guardar os dois na primeira gaveta;
- guardar os dois na segunda gaveta;
- guardar os dois na terceira gaveta;
- guardar um na primeira gaveta e o outro, na segunda;
- guardar um na primeira gaveta e o outro, na terceira; e
- guardar um na segunda gaveta e o outro, na terceira.

Qual o número de modos distintos de guardar três cadernos iguais em três gavetas?

Exercício 11. Calcule o número de maneiras diferentes pelas quais podemos repartir uma dúzia de balas iguais entre três crianças, de modo que cada uma receba pelo menos uma bala.

Exercício 12. Uma loja vende barras de chocolate de diversos sabores. Em uma promoção era possível comprar três barras de chocolate com descontos, desde que essas fossem dos seguintes sabores: ao leite, amargo, branco ou com amêndoas. As três barras escolhidas podem ou não ter sabores repetidos. Assim, um cliente para comprar as três barras na promoção poderá escolher os sabores de n modos distintos. Qual o valor de n?

Exercício 13. Uma pessoa dispõe de balas de hortelã, caramelo e coco, cada uma com apenas um sabor. Ele pretende "montar" saquinhos com 13 balas cada, de modo que em cada saquinho haja no mínimo 3 balas de cada sabor. Um saquinho se diferencia do outro pelas quantidades de balas de cada sabor. Sendo assim, quantos saquinhos diferentes podem ser "montados"?

Exercício 14. Qual o número de soluções inteiras e não negativas de $x + y + z \leq 6$?

Exercício 15. Quantos números inteiros entre 1 e 10000 têm soma dos seus algarismos igual a 6?

Exercício 16. De quantos modos podemos formar um subconjunto com 4 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ de modo que não haja números consecutivos?

Exercício 17. Os números de 1 até 10 foram arrumados em volta de um círculo em ordem crescente até chegar ao número 10. De quantos modos podemos escolher 4 deles sem que haja dois vizinhos no círculo?

Exercício 18. Uma pessoa deseja escolher 3 dias da semana para ir à academia. De quantas formas ela pode montar o seu horário se ela não pode ir em 2 dias consecutivos?

Exercício 19. Sejam $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, com $m \leq n$, e S o conjunto das funções $f : I_m \longrightarrow I_n$.

a) Quantos elementos possui S?

b) Quantos elementos de S são funções injetoras?

c) Quantos elementos de S são funções estritamente crescentes?

d) Quantos elementos de S são funções decrescentes?

Exercício 20. De quantas formas podemos colocar 6 anéis diferentes em 4 dedos?

Exercício 21. Doze cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se forma um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.