Aula 2 – 4º Encontro

Aplicações do Princípio Multiplicativo – Combinações

08/10/2016

1. Sem usar o algarismo 0, Carolina escreveu todos os números de três algarismos diferentes nos quais o algarismo do meio é maior do que os outros dois. Por exemplo, Carolina escreveu 241, mas não escreveu 570, nem 464, nem 123.

a) Quais são os números que Carolina escreveu com o algarismo do meio igual a 3?

b) Quantos números Carolina escreveu com o algarismo do meio igual a 7?

c) Quantas números Carolina escreveu ao todo?

1)

a) Primeiramente vamos fixar o algarismo 3 no meio.

$$\_\_\_ \quad \underline{\ \mathbf{3}\ } \quad \_\_\_$$

Observe que os laterais só poderão ser 1 ou 2, pois são menores que 3 e diferentes de zero.

Assim, se colocarmos o algarismo 1 na casa da esquerda nos restará o algarismo 2 na casa da direita e vice-versa.

Portanto, com o algarismo 3 no meio podemos escrever os números

$$\mathbf{132}\ e\ \mathbf{231}$$

b) Primeiramente fixe o algarismo 7 no meio:

$$\underline{\quad}\ \underline{\ 7\ }\ \underline{\quad}$$

Observe que a casa da esquerda podem ser colocados os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 *ou* 6, isto é 6 possibilidades. E na casa da direita poderá ser colocado qualquer um desses números menos o que já foi colocado na casa da esquerda, isto é, 5 possibilidades.

Assim,

$$\underline{\quad}\ \underline{\ 7\ }\ \underline{\quad}$$

$$\mathbf{6 \cdot 1 \cdot 5 = 30} \text{ **números**}$$

c) Analogamente ao item anterior agora teremos que analisar para os números de 1 a 9 no meio, não podemos esquecer que não se repete número e não se coloca o algarismo 0.

Assim,

- Para o algarismo 3 no meio:

$$2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \text{ números}$$

- Para o algarismo 4 no meio:

$$3 \cdot 1 \cdot 2 = 6 \text{ números}$$

- Para o algarismo 5 no meio:

$$4 \cdot 1 \cdot 3 = 12 \text{ números}$$

- Para o algarismo 6 no meio:

$$5 \cdot 1 \cdot 4 = 20 \text{ números}$$

- Para o algarismo 7 no meio:

$$6 \cdot 1 \cdot 5 = 30 \text{ números}$$

- Para o algarismo 8 no meio:

$$7 \cdot 1 \cdot 6 = 42 \text{ números}$$

- Para o algarismo 9 no meio:

$$8 \cdot 1 \cdot 7 = 56 \text{ números}$$

Portanto teremos

$$2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 = 168 \text{ números}$$

2. Fernanda precisa criar uma senha para poder usar o computador da escola. A senha deve ter cinco algarismos distintos de modo que, da esquerda a direita, o algarismo da 1ª posição seja maior do que 1, o da 2ª posição seja maior do que 2, e assim por diante. Por exemplo, 25476 é uma senha possível, mas 52476 não é, pois o algarismo na segunda posição não é maior do que 2.

a) Se a senha de Fernanda começar com 9467, qual deve ser o algarismo da 5ª posição?

b) Se Fernanda começar a formar sua senha escolhendo o algarismo 7 para a 5ª posição, quantas são as possibilidades de escolha para a 4ª posição?

c) Quantas senhas Fernanda poderá formar?

2)

a) Observe que

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\quad\quad} & \underline{\quad\quad} & \underline{\quad\quad} & \underline{\quad\quad} & \underline{\quad\quad} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ >1 & >2 & >3 & >4 & >5 \end{array}$$

A senha de Fernanda começa com:

$$\mathbf{9\ \ 4\ \ 6\ \ 7\ \ \_\_}$$

Observe que o ultimo digito é maior que 5, isto é, pode ser $6, 7, 8$ *ou* 9.

Mas como não podemos repetir números eliminamos o $6, 7$ *e* 9

Assim,

a única possibilidade que temos para a 5ª posição é o algarismo 8.

Portanto a senha de Fernanda é **9 4 6 7 8**

b)

$$\_\_\_\ \ \_\_\_\ \ \_\_\_\ \ \_\_\_\ \ \underline{\ \mathbf{7}\ }$$

Na 4ª posição teremos que colocar um número > 4, isto é, podemos colocar os algarismos $5, 6, 7, 8\ ou\ 9$.

Observe também que não podemos repetir números, isto é, devemos descartar o 7.

Assim, nos resta os algarismos $\mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{8}\ \boldsymbol{ou}\ \mathbf{9}$ para a 4ª posição.

Portanto temos 4 escolhas diferentes para a 4ª posição.

c) Observe que

$$\underset{>1}{\underline{\quad}}\ \underset{>2}{\underline{\quad}}\ \underset{>3}{\underline{\quad}}\ \underset{>4}{\underline{\quad}}\ \underset{>5}{\underline{\quad}}$$

Assim,

2	**3**	**4**	**5**	**6**
3	**4**	**5**	**6**	**7**
4	**5**	**6**	**7**	**8**
5	**6**	**7**	**8**	**9**
6	**7**	**8**	**9**	
7	**8**	**9**		
8	**9**			
9				

Vamos observar da ultima para a primeira posição.
Escolha um algarismo para colocar na ultima casa, observe que não poderá ser colocado nas outras:

4	4	4	4	4
2	3	4	5	6
~~3~~	4	~~5~~	6	7
4	~~5~~	6	~~7~~	8
~~5~~	6	~~7~~	8	9
6	~~7~~	8	9	
~~7~~	~~8~~	9		
~~8~~	9			
9				

Observe que independente do número que escolhermos, teremos:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024 \text{ senhas diferentes}$$

3. De quantas formas podemos escolher 2 pessoas, de um grupo de 5 pessoas para uma viagem?

3) Sejam as 5 pessoas: A B C D E

Observe que a ordem não importa, pois escolher A e B é o mesmo que escolher B e A.

Assim, podemos separar as pessoas escolhidas e não escolhidas:

escolhidas	não escolhidas
A B	C D E
A C	B D E
A D	B C E
A E	B C D
B C	A D E
B D	A C E
B E	A C D
C D	A B E
C E	A B D
D E	A B C

Observe que temos 5 pessoas no conjunto, e ordenando essas 5 pessoas numa fila temos 5!, mas como já vimos a ordem é descartada, devemos dividir pela ordem tanto das pessoas escolhidas, como a das não escolhidas.

Temos,

$pessoas\ escolhidas = 2$

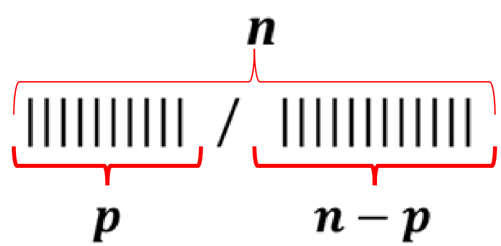
$pessoas\ não\ escolhidas = 5 - 2 = 3$

Portanto,

$$\frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = \frac{20}{2} = 10$$

Combinação

Seja $\boldsymbol{n}$ o número de elementos de um conjunto, e $\boldsymbol{p}$ o número de elementos que queremos selecionar. Observe que $\boldsymbol{n-p}$ será o número de objetos que não serão selecionados.



Não queremos nos preocupar com ordem.
Assim, ordenando estes $\boldsymbol{n}$ elementos em uma fila, temos $\boldsymbol{n}!$. Para desfazer a ordem dos $\boldsymbol{p}$ selecionados devemos dividir por $\boldsymbol{p}!$, o mesmo faremos para os não selecionados, dividiremos por $(\boldsymbol{n-p})!$, pois a ordem não importa.

Logo, $$C_{n,p} = C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

4. Uma turma tem 25 alunos. De quantas maneiras diferentes é possível escolher os grupos a seguir nessa turma?

a) Um monitor e o representante

b) Dois monitores

c) Três monitores

4)

a) Um monitor e o representante:

Primeiramente vamos escolher o monitor, observe que podemos escolher qualquer uma das 25 pessoas.

Em seguida vamos escolher o representante, note que podemos escolher qualquer uma das 25 pessoas menos a que escolhermos para monitor.

Assim temos:

monitor		**_representante_**	
25	**·**	**24**	**= 600**

Observe que a ordem é indiferente, pois se escolhermos o representante primeiro teremos 25 pessoas para escolher e em seguida para escolher o monitor teremos 24 pessoas.

Novamente teremos

$$25 \cdot 24 = 600$$

b) Dois monitores:
Primeiramente vamos escolher o primeiro monitor, observe que podemos escolher qualquer uma das 25 pessoas.
Em seguida vamos escolher o segundo monitor, note que podemos escolher qualquer uma das 25 pessoas menos a que escolhermos para o primeiro monitor.
Assim temos:

$$\frac{\text{\_monitor\_}}{25} \cdot \frac{\text{\_monitor\_}}{24} = 600$$

Neste caso a ordem não importa, isto é, estamos considerando os monitores A e B e também os monitores B e A, então devemos dividir por dois para não considerar duas vezes os mesmos monitores.
Isto é,

$$\frac{25 \cdot 24}{2} = \frac{600}{2} = 300$$

c) Três monitores:

Analogamente ao caso anterior temos

$$\underset{\mathbf{25}}{\underline{\textbf{monitor}}} \cdot \underset{\mathbf{24}}{\underline{\textbf{monitor}}} \cdot \underset{\mathbf{23}}{\underline{\textbf{monitor}}} = \mathbf{13.800}$$

Neste caso a ordem também não importa, isto é,

Sejam os três monitores: $A\ B\ e\ C$

Observe que as escolhas abaixo são as mesmas pessoas

A B C	A C B	B C A
B A C	C A B	C B A

Isto é,

devemos dividir por $6 = 3!$ Para não contarmos 6 vezes o mesmo trio

Logo,

$$\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!} = \frac{13800}{6} = 2300$$

5. Em um grupo de 14 pessoas existem 5 médicos, 6 engenheiros e 3 advogados. Quantas comissões de 7 pessoas podem ser formadas cada qual constituída de 3 médicos, 2 engenheiros e 2 advogados?

5) Vamos escolher separadamente:

- Para escolher 3 médicos temos:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

- Para escolher 2 engenheiros temos:

$$\frac{6 \cdot 5}{2!} = \frac{30}{2} = 15$$

- Para escolher 2 advogados temos:

$$\frac{3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}!} = 3$$

Assim temos

$$10 \cdot 15 \cdot 3 = 450$$

comissões de 7 pessoas

6. De quantos modos é possível dividir 20 objetos em 4 grupos de 3 e 2 grupos de 4?

6) Como a ordem dos elementos não importa, devemos dividir cada grupo pelo fatorial do número de elementos, isto é:

$$\underbrace{\frac{20\cdot 19\cdot 18}{3!}\cdot\frac{17\cdot 16\cdot 15}{3!}\cdot\frac{14\cdot 13\cdot 12}{3!}\cdot\frac{11\cdot 10\cdot 9}{3!}}_{4!}\cdot\underbrace{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4!}}_{2!}$$

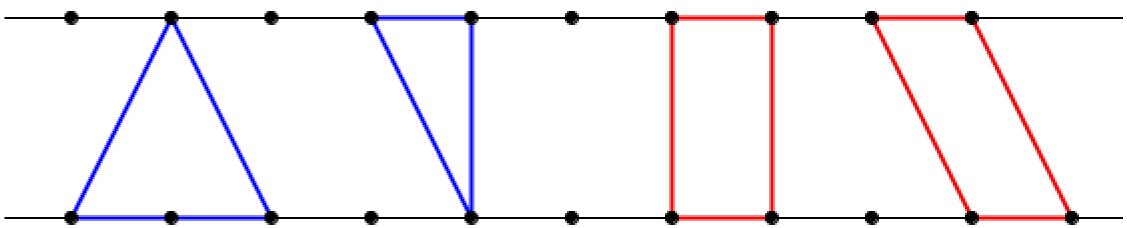
Note que a ordem dos grupos de 3 objetos não importa, isto é, devemos dividir pelo fatorial do números de grupos com 3 objetos, ou seja, 4!. Analogamente devemos dividir pelo fatorial da quantidade de grupos de 4 objetos, isto é, 2!

Assim,

$$\frac{20!}{4!\,(3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!)2!\,(4!\cdot 4!)}=\frac{20!}{2!\cdot 3!^4\cdot 4!^3}=\frac{20!}{2\cdot 6^4\cdot 24^3}=67\,897\,830\,000$$

7. Estão marcados 10 pontos em uma reta e 11 pontos em outra reta paralela à primeira. Quantos triângulos e quantos quadriláteros podem ser formados com vértices nesses pontos?

7) Observe que cada triangulo com os vértices nos pontos marcados ou tem um vértice na primeira reta e dois na segunda, ou então tem dois vértices na primeira reta e um na segunda.



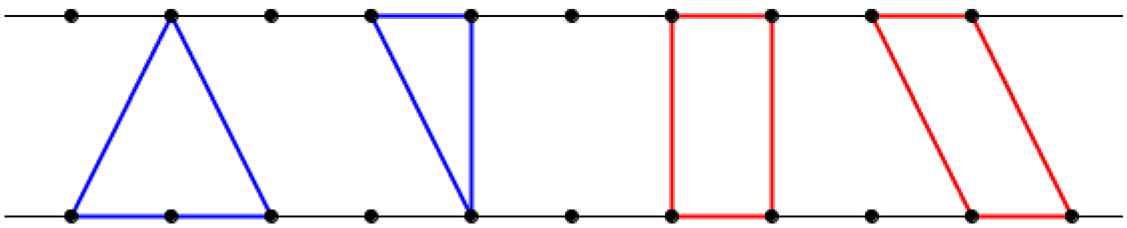
1º caso: 1 ponto na reta de cima (10 maneiras) e dois pontos na reta de baixo. Observe que estes 2 pontos são escolhidos de 11 maneiras dois a dois, isto é,

$$10 \cdot C_2^{11} = 10 \cdot \frac{11!}{(11-2)! \cdot 2!} = 10 \cdot \frac{11 \cdot 10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!} \cdot 2} = \frac{1100}{2} = 550$$

2º caso: 1 ponto na reta de baixo (11 maneiras) e dois pontos na reta de cima. Observe que estes 2 pontos são escolhidos de 10 maneiras dois a dois, isto é,

$$11 \cdot C_2^{10} = 11 \cdot \frac{10!}{(10-2)! \cdot 2!} = 11 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot 2} = \frac{990}{2} = 495$$

Analogamente observe que o quadrilátero só pode ter dois vértices na primeira linha e dois vértices na segunda linha.



Assim,

temos

$$C_2^{11} \cdot C_2^{10} = \frac{11!}{(11-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{10!}{(10-2)! \cdot 2!} = 55 \cdot 45 = 2475$$

8. Uma classe tem 31 alunos, incluído Pedro e João. De quantas maneiras é possível escolher um time de futebol (11 jogadores) de modo que Pedro e João não estejam juntos no time?

8)

Observe que existem três casos possíveis: só Pedro estar no time, só João estar no time, ou nenhum dos dois estar no time.

- Se Pedro está no time os outros 10 jogadores poderão ser escolhidos entre os 29 alunos restantes(tiramos Pedro e joão).

Assim,

$$C_{10}^{29} = \frac{29!}{(29-10)! \cdot 10!} = 20\,030\,010$$

- Se João está no time os outros 10 jogadores poderão ser escolhidos entre os 29 alunos restantes(tiramos Pedro e joão).

Assim,

$$C_{10}^{29} = \frac{29!}{(29-10)! \cdot 10!} = 20\,030\,010$$

- Se nenhum dos dois estiverem no time temos:

$$C_{11}^{29} = \frac{29!}{(29-11)! \cdot 10!} = 380\,570\,190$$

Portanto teremos no total:

$$C_{10}^{29} + C_{10}^{29} + C_{11}^{29}$$

$$\frac{29!}{(29-10)! \cdot 10!} + \frac{29!}{(29-10)! \cdot 10!} + \frac{29!}{(29-11)! \cdot 10!}$$

$$20\,030\,010 + 20\,030\,010 + 380\,570\,190 = 420\,630\,210 =$$

$$= 4{,}2063021 \times 10^{8}$$