

# 1 O fatorial de um número natural

Na aula anterior estudamos o princípio fundamental da contagem (PFC). Utilizando este princípio, podemos facilmente resolver o seguinte problema.

**Exemplo 1.** *Quatro pessoas, Ana, Bruno, Carlos e Davi chegaram ao mesmo tempo em uma agência bancária que possui apenas um atendente. De quantas maneiras podemos formar uma fila entre eles, determinando assim a ordem em que eles serão atendidos?*

**Solução.** Veja que, para organizar a fila, precisaremos fazer quatro escolhas. De fato, devemos escolher quem será a primeira, a segunda, a terceira e a quarta pessoa da fila. Podemos tomar essas decisões uma a uma, na ordem indicada. Vejamos: o primeiro da fila pode ser uma qualquer das quatro pessoas, logo há 4 possibilidades para a escolha deste; o segundo da fila deve ser alguém diferente do primeiro (que já foi escolhido) e, portanto, há 3 possibilidade para sua escolha; o terceiro deve ser diferente dos dois primeiros, de forma que ainda há 2 candidatos para essa posição; finalmente, tendo escolhido os três primeiros, resta apenas uma pessoa e, nessas condições, há apenas 1 maneira de escolhermos o quarto da fila. Pelo PFC, o número total de maneiras de formar a fila é igual a

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

□

Agora, seja  $n$  um número natural qualquer. O que aconteceria se tivéssemos, no Exemplo 1, um grupo de  $n$  pessoas no lugar de apenas 4 pessoas? Não é difícil perceber que o total de maneiras de formar uma fila entre as  $n$  pessoas pode ser calculado de modo semelhante, escolhendo um a um quem ocupará cada posição da fila, e que, pelo PFC, obtém-se que esse número é igual a

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1,$$

ou seja, igual ao produto entre todos os números naturais de 1 até  $n$ .

Produtos como o acima aparecem com bastante frequência em problemas de contagem, uma vez que, em vários desses problemas, o passo inicial em suas resoluções consiste em escolher uma ordem para um dado grupo de objetos. Além disso, esse tipo de produto também aparece em fórmulas utilizadas em outros conceitos básicos, como os de *arranjo* e *combinação*, os quais iremos estudar nas aulas seguintes. Por isso, é conveniente dar um nome para tais produtos.

Dado um número natural  $n$ , o produto de todos os naturais de 1 até  $n$  é chamado de *fatorial* de  $n$  e é representado, em símbolos, por  $n!$  (onde se lê  $n$ -fatorial). Assim, temos:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Além disso, por convenção, definimos  $0! = 1$ .

**Exemplo 2.** *A seguir listamos o valor do fatorial de alguns números pequenos:*

$$0! = 1,$$

$$1! = 1,$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6,$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24,$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120,$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Vejamos, agora, como podemos simplificar expressões algébricas que envolvem o fatorial de vários números. A primeira observação é que existe uma relação simples entre o fatorial de um número  $n$  e o fatorial de  $n - 1$ . De fato, para  $n \geq 1$ , temos que

$$n! = n \cdot (n - 1)!. \quad (1)$$

Essa relação pode ser verificada simplesmente substituindo-se os valores de  $(n - 1)!$  e de  $n!$  na igualdade acima e observando que tanto o primeiro quanto o segundo membros representam o produto dos números  $1, 2, \dots, n - 1, n$ . Com isso, podemos continuar a lista do Exemplo 2 sem precisar refazer o produto de todos os números em cada linha.

**Exemplo 3.** *Veja que:*

$$7! = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 720 = 5040,$$

$$8! = 8 \cdot 7! = 8 \cdot 5040 = 40320,$$

$$9! = 9 \cdot 8! = 362.880.$$

Os exemplos 2 e 3 indicam que o valor de  $n!$  cresce muito rapidamente à medida que  $n$  cresce. Daí, a importância de aprendermos a simplificar expressões que usem  $n!$ . Vejamos outros exemplos.

**Exemplo 4.** *Simplifique as seguintes expressões.*

(a)  $\frac{20!}{18!}$ .

(b)  $\frac{1}{5!} - \frac{1}{6!}$ .

(c)  $\frac{6!}{4! \cdot 5!}$ .

(d)  $\frac{10!}{7! \cdot 3!}$ .

**Solução.** (a) Veja que

$$\frac{20!}{18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18} \cdot \dots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{18} \cdot \dots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 20 \cdot 19 = 380.$$

Outra maneira de chegarmos ao mesmo resultado, de maneira mais rápida, é aplicar (1) duas vezes para obter  $20! = 20 \cdot 19! = 20 \cdot 19 \cdot 18!$ . Dessa forma, temos que

$$\frac{20!}{18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{18!}} = 20 \cdot 19 = 380.$$

(b) Novamente por (1), veja que o mínimo múltiplo comum entre  $6!$  e  $5!$  é igual a  $6!$ ; ademais, temos que  $6!/5! = 6$ . Dessa forma, a soma das frações pode ser calculada como segue:

$$\frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} = \frac{6-1}{6!} = \frac{5}{6!} = \frac{\cancel{6}}{6 \cdot \cancel{5} \cdot 4!} = \frac{1}{6 \cdot 24} = \frac{1}{144}.$$

(c) Temos que

$$\begin{aligned} \frac{6!}{4! \cdot 5!} &= \frac{6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1})} \\ &= \frac{6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

De modo mais curto (e invocando (1) uma vez mais), podemos escrever simplesmente:

$$\frac{6!}{4! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot \cancel{5!}}{4! \cdot \cancel{5!}} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

(d) Veja que:

$$\frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120. \quad \square$$

As desigualdades abaixo nos dão uma ideia de quão grande é  $n!$ .

**Exemplo 5.** Para  $n \geq 2$  temos que  $2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}$ .

**Solução.** Vejamos primeiro como mostrar que  $n! < n^{n-1}$ . Basta observar que  $n^{n-1} = n \cdot n \cdot \dots \cdot n$  é o produto de  $n-1$  números iguais a  $n$ , enquanto  $n!$  é o produto de  $n$  números, sendo um deles igual a 1 e os outros  $n-1$  menores ou iguais a  $n$ . De modo semelhante, para mostrar que  $n! \geq 2^{n-1}$ , basta observar que  $n!$  é igual a 1 vezes o produto de  $n-1$  números maiores ou iguais a 2.  $\square$

## 2 Permutações

A noção de permutação está ligada ao ato de *permutar*, ou seja, reordenar um grupo de objetos. Dado um conjunto finito  $A$ , uma *permutação* dos elementos de  $A$  é uma lista ordenada, ou seja, uma sequência, na qual cada elemento

de  $A$  aparece exatamente uma vez. Por exemplo, quando  $A = \{v, w, x, y, z\}$ , temos que a lista ordenada  $(x, v, w, z, y)$  é uma permutação dos elementos de  $A$ , na qual o primeiro elemento é  $x$ , o segundo é  $v$ , e assim por diante.

**Exemplo 6.** Considere o conjunto  $N = \{1, 2, 3\}$ . Note que existem 6 permutações dos elementos de  $N$ , a saber:  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 3, 2)$ ,  $(2, 1, 3)$ ,  $(2, 3, 1)$ ,  $(3, 1, 2)$ , e  $(3, 2, 1)$ .

Na literatura matemática, a quantidade de permutações de um conjunto com  $n$  elementos é frequentemente representada por  $P_n$ . Por exemplo, temos que  $P_3 = 6$ , como observamos acima. Claramente, a quantidade de permutações dos elementos de um conjunto finito é igual ao número de maneiras de dispor tais elementos em uma fila. Assim, conforme observamos na discussão após o Exemplo 1, pelo PFC, concluímos que

$$P_n = n!.$$

Uma observação importante é que, para que isso seja válido, os  $n$  elementos que estamos permutando precisam ser distintos. Na aula seguinte, iremos estender o conceito de permutação (que está limitado a elementos de um conjunto), para qualquer grupo de  $n$  objetos (onde pode haver repetições de um mesmo objeto). Veremos, então, que o número de tais permutações será calculado de forma ligeiramente diferente.

**Exemplo 7.** Um professor deseja elaborar um teste com 6 questões. Os enunciados das questões já foram elaborados, mas ele ainda precisa escolher a ordem em que essas questões irão figurar no teste. De quantas maneiras ele pode fazer isso?

*Demonstração.* O número de maneiras é precisamente o número de permutações do conjunto formado pelas 6 questões. Portanto, o número de maneiras em que ele pode compor o teste é igual a  $P_6 = 6! = 720$ .  $\square$

**Exemplo 8.** Quantos são os números de 5 algarismos distintos, formados apenas pelos dígitos 1, 2, 3, 4, 5? Quantos deles são maiores do que 30.000?

**Solução.** Veja que todo número de 5 algarismos distintos, formado pelos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, corresponde a uma permutação desses elementos. Sendo assim, existem  $P_5 = 5! = 120$  números com a propriedade desejada.

Para responder à segunda pergunta, iremos usar o PFC. Inicialmente, escolhamos o primeiro dígito do número (ou seja, o dígito das dezenas de milhar). Como o número deve ser maior do que 30.000, esse primeiro dígito deve ser igual a 3, 4 ou 5; portanto, existem apenas 3 possibilidades para o seu valor. Uma vez escolhido o primeiro dígito, sobram 4 algarismos para compor o restante do número. Note que cada permutação desses 4 dígitos nos dá uma maneira de “completar” o número desejado. Assim, o número total de maneiras de escolher o primeiro dígito e, em seguida,

escolher uma permutação dos 4 algarismos restantes é, pelo PFC, igual a:  $3 \cdot P_4 = 3 \cdot 4! = 3 \cdot 24 = 72$ .  $\square$

**Observação.** Note que o problema também poderia ser resolvido sem utilizarmos o conceito de permutação, aplicando-se diretamente o PFC. Para isso, basta fazer a escolha dos dígitos que formarão o número um por vez, digamos, da esquerda para a direita. Por exemplo, para responder à pergunta sobre quantos números maiores que 30.000 possuem a propriedade desejada, segue-se o seguinte raciocínio: o primeiro dígito deve ser maior ou igual a 3 e, portanto, existem 3 possíveis escolhas para ele; o segundo dígito deve ser um algarismo de 1 a 5, diferente daquele escolhido para ser o primeiro dígito e, portanto, há 4 possibilidades para ele; o terceiro deve ser diferente dos dois anteriores e, portanto, há 3 possibilidades para ele; de forma semelhante, há 2 possibilidades para o quarto dígito e apenas uma possibilidade para a escolha do quinto dígito. Pelo PFC, a quantidade de números que podem ser formados é igual a  $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$ . A vantagem de utilizar o conceito de permutação é que podemos encapsular parte dessa conta no valor de  $P_n$ , o que torna a solução ligeiramente mais curta.  $\square$

Assim como na aula anterior, a definição de *palavra* que adotamos aqui é que uma palavra é qualquer sequência de letras (não havendo a necessidade de que tal sequência tenha um significado em Português). Dada uma palavra qualquer, chamamos de *anagrama* qualquer palavra obtida permutando-se as letras da palavra original. Observe que uma permutação pode conter as letras na mesma ordem em que elas apareciam originalmente, de modo que toda palavra é um anagrama dela mesma.

**Exemplo 9.** O número de anagramas da palavra *MATRIZ* é igual a  $5! = 120$ . De fato, como cada anagrama corresponde a uma permutação dos elementos de  $\{M, A, T, R, I, Z\}$ , temos que o número de anagramas é igual a  $P_6$ , que é igual a  $5!$ .

Em geral, quando  $n$  é um número natural e temos uma palavra formada por  $n$  letras distintas, podemos concluir analogamente que o número de anagramas dessa palavra é igual a  $n!$ .

Em alguns casos, existe uma ordem natural que pode ser atribuída aos elementos de um dado conjunto. Por exemplo, quando os elementos do conjunto são números, como no conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$ , podemos considerar a permutação onde os elementos são escritos do menor para o maior:  $(1, 2, 3, 4)$ . Quando os elementos são letras, podemos considerar aquela ordem onde as letras aparecem na mesma ordem em que são listadas no alfabeto latino. Uma vez fixada uma ordem como essa, podemos também ordenar o conjunto de todas as permutações. A maneira mais natural de fazer isso é usando a chamada *ordem lexicográfica*. Essa ordem é a mesma que usamos para listar as

palavras em um dicionário. Vejamos como defini-la formalmente. Dadas duas permutações, digamos  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , dos elementos do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , dizemos que  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  é lexicograficamente menor do que  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  quando existe um inteiro  $i$  tal que os  $i - 1$  primeiros valores das sequências  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  são iguais, mas temos que  $a_i < b_i$ . Veja que esse é o mesmo motivo pelo qual a palavra CASTO aparece antes da palavra CORRA num dicionário de Português.

**Exemplo 10.** Veja que, no Exemplo 6, listamos todas as permutações de  $\{1, 2, 3\}$  seguindo a ordem lexicográfica.

**Exemplo 11.** Se listarmos todos os anagramas da palavra *BRUMA* seguindo a ordem lexicográfica, determine em qual posição será listada a palavra *MURAB*.

**Solução.** Considere uma lista que contém todas os anagramas de *BRUMA*, em ordem lexicográfica. Vamos contar quantas palavras aparecem antes de *MURAB* nessa lista. Primeiramente, enumere as letras de *BRUMA* em ordem alfabética. Fazendo isso, obtemos *ABMRU*, que também é a primeira palavra de nossa lista. Veja que, na lista, a primeira letra de uma palavra que aparece antes de *MURAB* deve ser igual a *A*, *B* ou *M*. Por outro lado, todos os anagramas que começam com *A* ou *B* irão aparecer antes de *MURAB*, e apenas algumas das que começam com *M* também irão. A quantidade de anagramas do primeiro tipo (ou seja, que começam com *A* ou *B*) é igual a  $2 \cdot 4! = 48$ , já que temos 2 opções para a primeira letra e podemos permutar as demais 4 letras como bem desejarmos. Agora vejamos quantas palavras começam com *M* e aparecem antes de *MURAB*, ou seja, são da forma “*M* \_ \_ \_”. Fixado *M* como primeira letra, a demais 4 letras devem formar um anagrama de *URAB* que seja lexicograficamente menor do que *URAB*. Nesse caso, a segunda letra pode ser *A*, *B*, *R* ou *U*, sendo que todo anagrama de *URAB* onde a primeira letra é *A*, *B* ou *R* é lexicograficamente menor que *URAB*. A quantidade de anagramas desse tipo é  $3 \cdot 3! = 18$ , pois existem 3 opções para a primeira letra (*A*, *B* ou *R*) e, uma vez escolhida essa primeira letra, as demais 3 letras podem ser permutadas arbitrariamente. Temos, ainda, que contar os anagramas que são do tipo: “*MU* \_ \_ \_”. Como antes, veja que as demais três letras formam um anagrama de *RAB* que é lexicograficamente menor do que *RAB*; logo, sua primeira letra pode ser *A*, *B* ou *R*, sendo que existem  $2 \cdot 2! = 4$  deles onde a primeira letra é *A* ou *B*. Resta contar quantos são os anagramas do tipo “*MUR* \_ \_” que são menores que *MURAB*. Nesse caso, a primeira letra não preenchida só poderia ser igual a *A*, mas isso implicaria que a letra seguinte deveria ser igual a *B*; então, teríamos a própria palavra *MURAB*, a qual não é menor do que si mesma.

Para terminar, veja que  $48 + 18 + 4 = 70$  representa precisamente a quantidade de palavras que aparecem antes

de MURAB e, como ela é a próxima da lista, temos que ela é a 71ª palavra da lista.  $\square$

### 3 Exercícios resolvidos

**Exemplo 12.** Simplifique as seguintes expressões:

(a)  $\frac{(3!)^2}{9}$ .

(b)  $\frac{((n+1)!)^3}{(n!)^3}$ .

**Solução.**

(a)  $\frac{(3!)^2}{9} = \frac{(\cancel{3} \cdot 2 \cdot 1)(\cancel{3} \cdot 2 \cdot 1)}{9} = 2 \cdot 2 = 4$ .

(b) Aplicando (1) e as propriedades de potenciação, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{((n+1)!)^3}{(n!)^3} &= \frac{((n+1) \cdot n!)^3}{(n!)^3} = \frac{(n+1)^3 \cancel{(n!)^3}}{\cancel{(n!)^3}} \\ &= (n+1)^3. \end{aligned}$$

$\square$

Atenção! A operação correspondente a aplicar o fatorial a um número não é distributiva nem com relação à adição, nem com relação à multiplicação. Dessa forma, em geral, não vale que:  $(x+y)! = x! + y!$ , nem que  $(x \cdot y)! = x! \cdot y!$ .

**Exemplo 13.** Simplifique as seguintes expressões:

(a)  $\frac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!}$ .

(b)  $\frac{(2n)!}{(2n-2)! \cdot 2!}$ .

**Solução.** Novamente por (1), temos:

(a)

$$\begin{aligned} \frac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!} &= \frac{n! \cdot n!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \frac{(n \cdot \cancel{(n-1)!}) \cdot n!}{\cancel{(n-1)!}((n+1) \cdot n!)} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!}{(2n-2)! \cdot 2!} &= \frac{(2n)(2n-1)\cancel{(2n-2)!}}{\cancel{(2n-2)!} \cdot 2!} \\ &= \frac{2n(2n-1)}{2 \cdot 1} = n(2n-1) \\ &= 2n^2 - n. \end{aligned}$$

$\square$

**Exemplo 14.** Calcule quantos são os anagramas da palavra MARTELO no quais vale que:

(a) Todas as vogais aparecem antes de todas as consoantes.

(b) Todas as vogais aparecem juntas.

(c) Nem todas as vogais aparecem juntas.

**Solução.** Em cada item, vamos pensar como podemos preencher os seguintes 7 espaços “ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ ”, colocando uma letra por espaço, de modo que o resultado seja um anagrama de MARTELO com a propriedade desejada.

(a) Nesse caso, onde todas as vogais devem aparecer antes de todas as consoantes, é necessário e suficiente que os três primeiros espaços sejam preenchidos com um anagrama de AEO e os quatro últimos sejam preenchidos com um anagrama de MRTL. Existem  $P_3 = 3! = 6$  maneiras de se escolher o anagrama de AEO e  $P_4 = 4! = 24$  maneiras de se escolher o anagrama de MRTL. Como para cada anagrama de AEO podemos escolher qualquer um dos anagramas de MRTL temos que, pelo PFC, o total de maneiras de preencher os espaços é  $6 \cdot 24 = 144$ .

(b) Primeiramente iremos escolher quais dos 7 espaços serão ocupados pelas vogais. Como as vogais devem ocupar espaços consecutivos, basta escolhermos qual será o primeiro espaço ocupado por uma vogal. Mas, como temos 3 vogais, a primeira vogal deverá ocupar um dos primeiros 5 espaços. Logo existem 5 possibilidades para a escolha das posições que serão ocupadas pelas vogais. (Também é possível visualizarmos essas 5 escolhas escrevendo todas as elas: VVVCCCC, CVVVCCC, CCVVVCC, CCCVVVC, CCCCVVV, onde C representa um espaço reservado para alguma consoante e V um espaço reservado para uma vogal.) Tendo escolhido as posições das vogais, podemos proceder como no item anterior: para terminar, basta escolher um anagrama de AEI para ocupar as posições reservadas para as vogais e um anagrama de MRTL, que será usado para determinar a ordem em que as consoantes serão distribuídas nos espaços para elas reservados. Pelo PFC, o número de maneiras de realizar essas três escolhas é igual a  $5 \cdot 6 \cdot 24 = 720$ .

(b) Uma outra maneira de resolver o item (b) é a seguinte: chamaremos um anagrama de MARTELO de *válido* se, nele, as vogais aparecerem juntas. Em cada anagrama válido, vamos trocar o bloco com as três vogais consecutivas pela letra X (que é uma letra que não aparece em MARTELO). Veja que, ao fazermos isso, o resultado é que o anagrama original é convertido em algum anagrama da palavra XMRTL (o qual é unicamente determinado pelo anagrama original da palavra MARTELO). Note que, existem  $P_5 = 5! = 120$  anagramas de XMRTL. Agora, para obter de volta um anagrama

válido, devemos substituir a letra X por qualquer anagrama de AEO. Isso pode ser feito de  $P_3 = 3! = 6$  maneiras. Sendo assim, o número de anagramas válidos é igual a  $P_5 \cdot P_3 = 120 \cdot 6 = 720$ .

- (c) Aqui, usaremos a técnica de contagem pelo complementar, que aprendemos na aula passada. O número total de anagramas de MARTELO é igual a  $P_7 = 7! = 5040$ . Para contar em quantos deles existem vogais que estão separadas, basta subtrair, desse total, a quantidade de anagramas em que todas as vogais aparecem juntas (e que calculamos no item anterior). Logo, existem  $5040 - 720 = 4320$  anagramas nos quais nem todas as vogais aparecem juntas. □

**Exemplo 15.** De quantas maneiras podemos montar uma fila com  $n$  pessoas de modo que Francisco e sua esposa ocupem posições consecutivas.

**Solução.** Considere todas as filas em que Francisco e sua esposa estão em posições consecutivas. Inicialmente, imaginamos Francisco e sua esposa como se fossem uma única pessoa, já que eles não devem ser separados. Ou, de forma mais concreta, podemos imaginar que o casal seja substituído por uma terceira pessoa que os representa na fila. O resultado é que, após feita tal substituição, podemos permutar as  $n - 1$  pessoas de qualquer modo, a fim de montar uma fila entre elas. Isso pode ser feito de  $P_{n-1} = (n - 1)!$  maneiras. Agora, em cada uma dessas filas devemos substituir o representante do casal pelos próprios Francisco e sua esposa. Ao fazer isso, precisamos escolher também a ordem relativa entre Francisco e sua esposa, ou seja, qual dos dois ficará na frente do outro. Como há apenas  $P_2 = 2! = 2$  possíveis ordens entre eles, concluímos pelo PFC que o total de filas com a propriedade desejada é igual a  $2(n - 1)!$ . □

Atenção! Não confunda a expressão  $2(n - 1)!$  com  $(2(n - 1))!$ . Na primeira, multiplicamos por 2 o valor do produto dos números de 1 até  $(n - 1)$ ; na segunda, estamos considerando o produto de todos os números de 1 até  $2(n - 1)$ .

**Exemplo 16.** Abaixo, temos uma tabela  $5 \times 5$  com a seguinte propriedade: ela é preenchida com os dígitos 0 e 1 de tal modo que, em cada linha e em cada coluna, o dígito 1 é usado exatamente uma vez.

0	0	0	1	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1

Calcule a quantidade total de tabelas  $5 \times 5$  distintas que possuem essa mesma propriedade.

**Solução.** Mais geralmente, dado um natural  $n$ , calculemos a quantidade total de tabelas  $n \times n$  que possuem essa mesma propriedade. Para tanto, vejamos um conjunto de escolhas que, ao serem tomadas, determinam de maneira única a tabela a ser construída.

Primeiro, veja que basta decidir quais são as posições da tabela que serão ocupadas pelo dígito 1 (já que todas as demais serão ocupadas pelo dígito 0). Faremos isso coluna por coluna. Vamos numerar as colunas (da esquerda para a direita) e as linhas (de cima para baixo) em nossa tabela com os números  $1, 2, \dots, n$ . Lembre-se de que, em cada coluna, devemos ter exatamente um dígito 1. Sendo assim, para cada natural  $i$  de 1 até  $n$ , precisamos escolher em qual linha iremos colocar o número 1 que aparece na coluna  $i$ . Podemos, então, definir  $a_i$ , onde  $1 \leq i \leq n$ , como o número da linha na qual iremos colocar o dígito 1 da coluna  $i$ . Por exemplo, na tabela  $5 \times 5$  acima, temos que  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (2, 3, 4, 1, 5)$ .

O raciocínio do parágrafo anterior garante que, para montar uma tabela, basta escolhermos os valores de  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Como lá também indicamos, vamos escolher esses valores um a um, observando, inicialmente, que cada um deles é um número inteiro de 1 a  $n$ . Veja que  $a_1$  pode assumir qualquer um desses valores. Entretanto, uma vez escolhido  $a_1$ , temos que  $a_2$  deverá assumir um valor diferente de  $a_1$  (já que não pode haver dois dígitos 1 em uma mesma linha). Da mesma forma, escolhidos  $a_1$  e  $a_2$ , o valor de  $a_3$  deve ser um número diferente dos valores escolhidos para  $a_1$  e de  $a_2$ , e assim por diante. Percebemos, então, que a sequência  $(a_1, \dots, a_n)$  deverá ser uma permutação dos elementos do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Além disso, também não é difícil ver que toda permutação de  $\{1, 2, \dots, n\}$  determina, da maneira acima, uma única tabela com a propriedade desejada.

Concluímos, pois, que o número de tabelas com a propriedade desejada é igual a ao número de permutações de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , que por sua vez é igual a  $P_n = n!$ . Em particular, quando  $n = 5$ , existem  $5! = 120$  tabelas com tal propriedade. □

## Dicas para o Professor

Os objetivos principais desta aula são: (1) tornar o aluno seguro para utilizar a notação  $n!$  corretamente e manipular algebricamente expressões que a utilizem; (2) expor situações-problema onde o fatorial de um número aparece naturalmente como resposta. Estes dois pontos são essenciais para que, nas aulas seguintes, o aluno possa aprender a manipular números binomiais e consiga assimilar os conceitos de arranjo e combinações com maior naturalidade. Recomendamos que sejam realizadas pelo menos três sessões de 50min para a exposição desse material, assim como para a resolução de exercícios complementares.

## Sugestões de Leitura Complementar