Exercícios

1. Se o resto da divisão de a por 7 é igual a 3, então qual é o resto da divisão de $5a$ por 7?

Solução: Podemos escrever $a = 7q + 3$. Daí $5a = 5(7q + 3) = 7 \times (5q) + 15$. Dividindo 15 por 7 obtemos resto 1. Daí $5a$ é a soma de um múltiplo de 7 com 1 e, portanto, o resto da divisão de $5a$ por 7 é igual a 1.

2. Se a deixa resto 6 quando dividido por 8 e se b deixa resto 5 quando dividido por 8, qual é o resto da divisão de $a + b$ e de $a - b$ por 8?

Solução: Podemos escrever $a = 8n + 6$ e $b = 8m + 5$. Daí $a + b = (8n+6)+(8m+5) = (8n+8m)+11$ e $a-b = (8n+6)-(8m+5) = (8n-8m)+1$. Como 11 deixa resto 3 quando dividido por 8, vemos que $a + b$ deixa resto 3 quando dividido por 8. De $a - b = (8n - 8m) + 1$, segue que $a - b$ deixa resto 1 quando dividido por 8.

3. Liste todos os divisores positivos de $a = 2^3 \times 5^2$.

Solução: Se d é um divisor de a, então os únicos fatores primos de d são 2 e 5. Deste modo $d = 2^x \times 5^y$. Mais ainda, como a é um múltiplo de d, podemos escrever $a = dn$, e isto implica que as potências x e y dos números 2 e 5 na fatoracão de d devem ser menores do que ou iguais as potências dos números 2 e 5 na fatoração de a. Logo $x \leq 3$ e $y \leq 2$. Portanto, $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$. Fazendo todas as possibilidades, listamos todos os divisores de a, que são:
$x = 0$ e $y = 0 \Rightarrow d = 2^0 5^0 = 1$.
$x = 0$ e $y = 1 \Rightarrow d = 2^0 5^1 = 5$.
$x = 0$ e $y = 2 \Rightarrow d = 2^0 5^2 = 25$.
$x = 1$ e $y = 0 \Rightarrow d = 2^1 5^0 = 2$.
$x = 1$ e $y = 1 \Rightarrow d = 2\ 15^1 = 10$.
$x = 1$ e $y = 2 \Rightarrow d = 2^1 5^2 = 50$.
$x = 2$ e $y = 0 \Rightarrow d = 2^2 5^0 = 4$
$x = 2$ e $y = 1 \Rightarrow d = 2^2 5^1 = 20$.
$x = 2$ e $y = 2 \Rightarrow d = 2^2 5^2 = 100$.
$x = 3$ e $y = 0 \Rightarrow d = 2^3 5^0 = 8$.
$x = 3$ e $y = 1 \Rightarrow d = 2^3 5^1 = 40$.
$x = 3$ e $y = 2 \Rightarrow d = 2^3 5^2 = 200$.

4. Mostre que de três inteiros consecutivos um e apenas um deles é múltiplo de 3.

Solução: Suponha que os três inteiros consecutivos sejam a, $a+1$ e $a+2$. Temos as seguintes possibilidades: a deixa resto 0, 1 ou 2 quando dividido por 3.

1) Suponha que a deixe resto 0 quando dividido por 3, ou seja, $a = 3q$. Logo, $a+1 = 3q+1$ e $a+2 = 3q+2$. Assim, um e apenas um dos três números é múltiplo de 3, a saber, a.

2) Suponha que a deixe resto 1 quando dividido por 3, ou seja, $a = 3q+1$. Logo, $a+1 = 3q+2$ e $a+2 = 3q+3 = 3(q+1)$. Assim, um e apenas um dos três números é múltiplo de 3, a saber, $a+2$.

3) Suponha que a deixe resto 2 quando dividido por 3, ou seja, $a = 3q+2$. Logo, $a+1 = 3q+3 = 3(q+1)$ e $a+2 = 3q+4 = 3(q+1)+1$. Assim, um e apenas um dos três números é múltiplo de 3, a saber, $a+1$.