SOLUÇÕES OBMEP 2ª. FASE 2016 NÍVEL 2

N2Q1 – Solução

item a)

A figura em questão é formada pela junção de duas peças. Ela é formada por oito quadradinhos de 1 cm de lado, e seu contorno contém exatamente 16 lados desses quadradinhos. Logo, o perímetro dessa peça é 16 vezes 1 cm, ou seja, é igual a 16 cm.

item b)

Há muitas soluções, as quais podem diferir no formato ou na posição. Aqui estão dois exemplos:

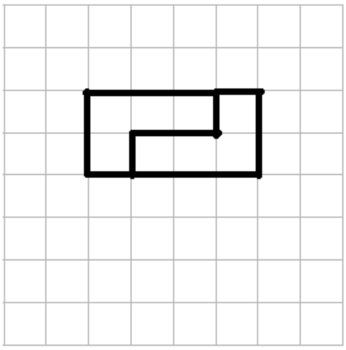


Figura com perímetro igual a 12 cm

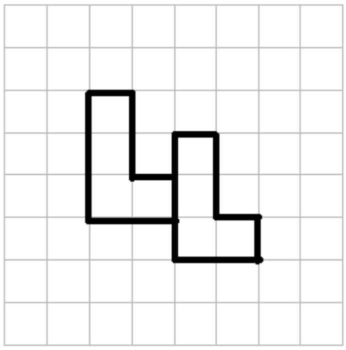
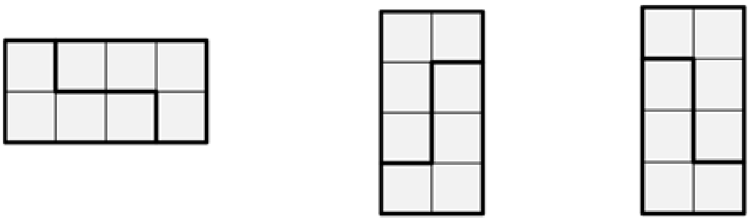
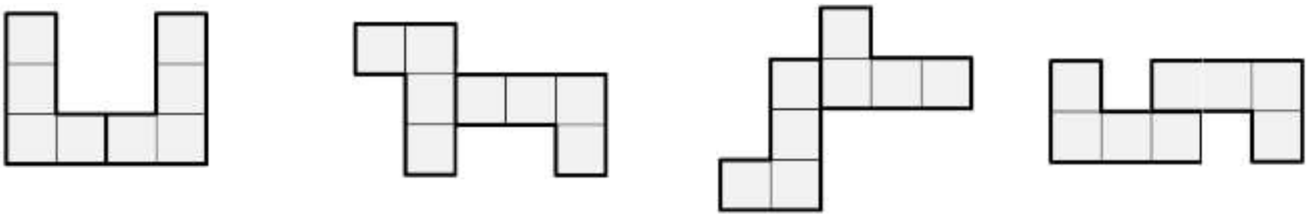


Figura com perímetro igual a 18 cm

Para formar uma figura com perímetro igual a 12 cm, Roberto deve juntar as duas peças de tal modo que o contorno da figura formada tenha somente 12 lados de quadradinhos. Como cada peça contém 10 lados de quadradinhos em seu contorno e como ele junta as peças coincidindo lados de quadradinhos, Roberto terá de fazer coincidir quatro pares de lados de quadradinhos para formar uma figura com perímetro igual a 12 cm. Isso apenas é possível se ele juntar as peças formando um retângulo. Veja algumas outras possibilidades:



Agora, para formar uma figura com perímetro igual a 18 cm, Roberto tem de juntar as duas peças de tal modo que o contorno da figura formada tenha 18 lados de quadradinhos, ou seja, ele terá de fazer coincidir apenas um par de lados de quadradinhos. Como foi dito, existem várias maneiras de formar essas figuras; veja mais alguns exemplos:



item c)

Quando as duas peças não estão em contato, o perímetro total é 20 cm. Depois de juntar duas peças, o perímetro da figura formada pelas duas peças é diminuído de um número par, já que os lados em contato de quadradinhos não contribuem para o perímetro da figura formada, pois ficam internos a ela. Como duas peças soltas têm perímetro 20 cm, é impossível obter, juntando duas peças de acordo com as condições descritas no enunciado, uma figura com um perímetro ímpar. Mas 15 é ímpar e, assim, não há figuras (como as descritas no enunciado) que têm esse perímetro.

N2Q2 – Solução

item a)

Para facilitar, colocamos letras nas casas vazias:

3	a	19
8	c	d
b	e	f

O número a deve ser a média dos números 3 e 19:

$$a = \frac{3+19}{2} = 11$$

O número 8 deve ser a média entre 3 e b, ou seja,

3	11	19
8	c	d
13	e	f

$$8 = \frac{3+b}{2}$$

Logo, b = 13.

O número c deve ser a média entre 19 e 13: $c = \frac{19+13}{2} = 16$

Analogamente,

$$\begin{cases} \frac{d+8}{2} = 16 \Rightarrow \ d+8 = 32 \Rightarrow d = 24 \\ \frac{e+11}{2} = 16 \Rightarrow e+11 = 32 \Rightarrow e = 21 \\ \frac{f+3}{2} = 16 \Rightarrow f+3 = 32 \Rightarrow f = 29 \end{cases}$$

Portanto, o preenchimento final do quadriculado medimágico é:

3	11	19
8	16	24
13	21	29

item b)

Primeiramente, colocamos letras nas casas vazias, de acordo com a figura abaixo:

y	7	v
9	x	w
t	z	20

Calculando as médias, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{y+20}{2} = x \Rightarrow y+20 = 2x \Rightarrow y = 2x-20 \\ \frac{z+7}{2} = x \Rightarrow z+7 = 2x \Rightarrow z = 2x-7 \\ \frac{w+9}{2} = x \Rightarrow w+9 = 2x \Rightarrow w = 2x-9 \end{cases}$$

Isso nos permite também calcular v e t em função de x:

$$\begin{cases} \frac{v+20}{2} = 2x - 9 \Rightarrow v + 20 = 4x - 18 \Rightarrow v = 4x - 38 \\ \frac{t+2x-20}{2} = 9 \Rightarrow t + 2x - 20 = 18 \Rightarrow t = 38 - 2x \end{cases}$$

2x-20	7	4x-38
9	x	2x-9
38-2x	2x-7	20

Segue, da terceira linha do quadriculado acima, que:

$$\frac{38 - 2x + 20}{2} = 2x - 7 \Rightarrow 58 - 2x = 4x - 14 \Rightarrow 72 = 6x \Rightarrow x = 12$$

Utilizando esse valor encontrado de *x*, os outros valores podem ser facilmente calculados e o preenchimento final do quadriculado medimágico, nesse caso, é:

4	7	10
9	12	15
14	17	20

item c)

Consideremos agora um quadrado medimágico qualquer, como o da figura abaixo

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$\Rightarrow \begin{cases} a + i = 2e \\ b + h = 2e \\ c + g = 2e \\ d + f = 2e \end{cases}$$

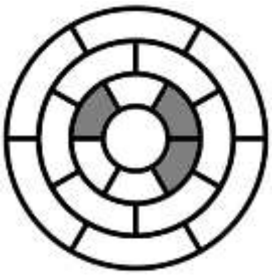
$$\Rightarrow a + b + c + d + e + f + g + h + i = 2e + 2e + 2e + 2e + e = 9e$$

Como o número representado pela letra <u>e</u> é um número inteiro, a soma de todos é múltipla de 9.

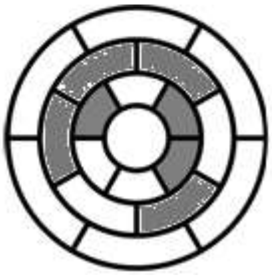
Conclusão: em qualquer quadriculado medimágico a soma de todos os seus números é igual a 9 vezes o termo central.

N2Q3 – Solução

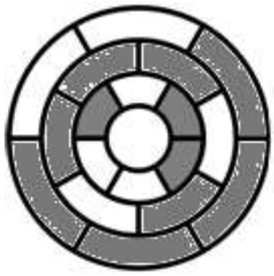
item a)



Pintura do primeiro anel feita por Joãozinho, fornecida pelo enunciado.



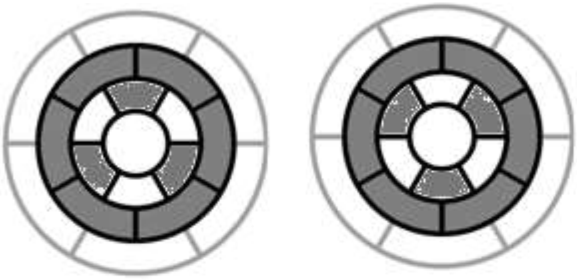
Pintura do segundo anel.



Resultado final da pintura dos três primeiros anéis.

item b)

Há duas soluções possíveis para que o segundo anel fique todo cinza; em ambas, as cores do primeiro anel devem se alternar.



item c)

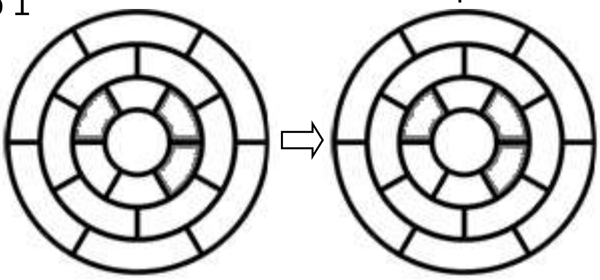
Solução 1:

Há $2^6 = 64$ possibilidades de Joãozinho pintar o primeiro anel. Entretanto, devido à simetria, podemos considerar, sem perda de generalidade, somente os 13 casos ilustrados a seguir. Observe o que acontece em cada caso quando pintamos o segundo anel de acordo com as regras do enunciado:

Caso 1

Antes

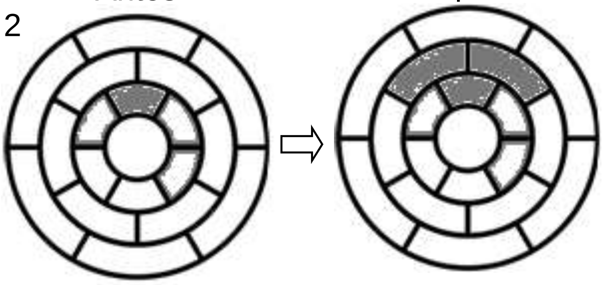
Depois



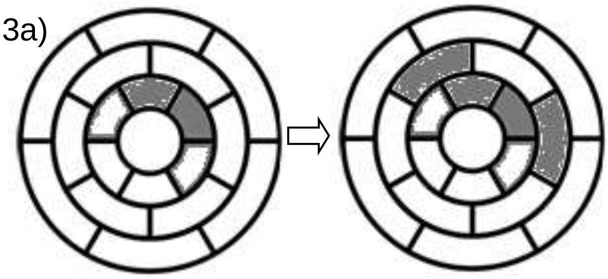
Caso 2

Antes

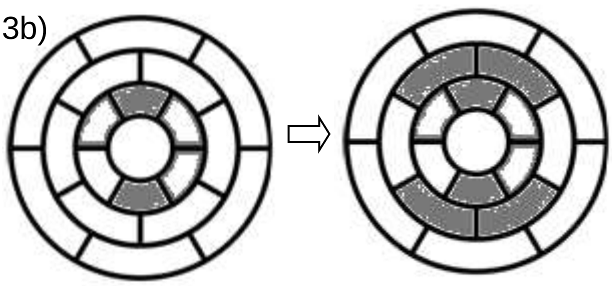
Depois



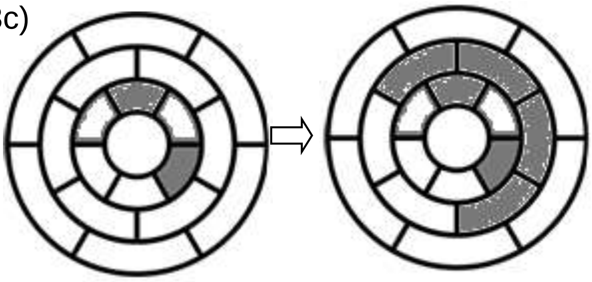
Caso 3a)



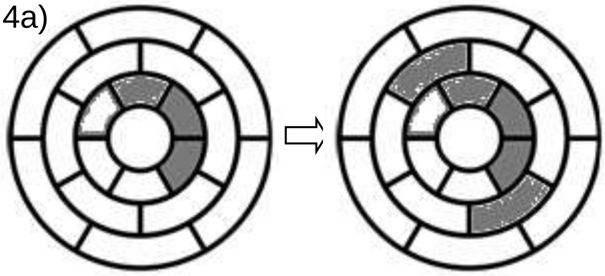
Caso 3b)



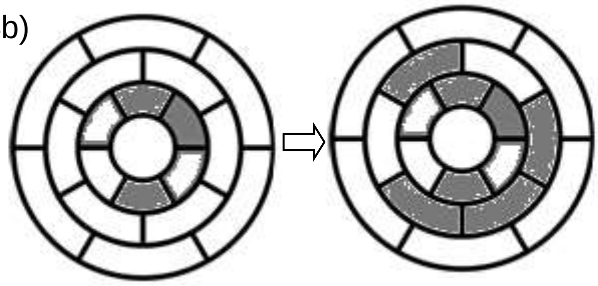
Caso 3c)



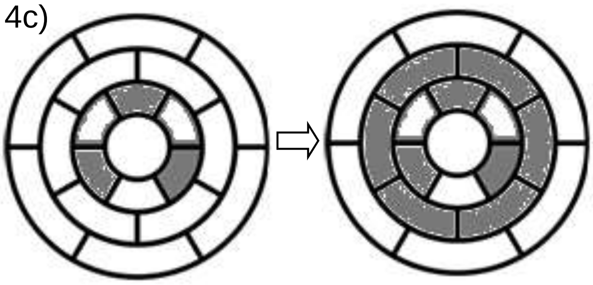
Caso 4a)



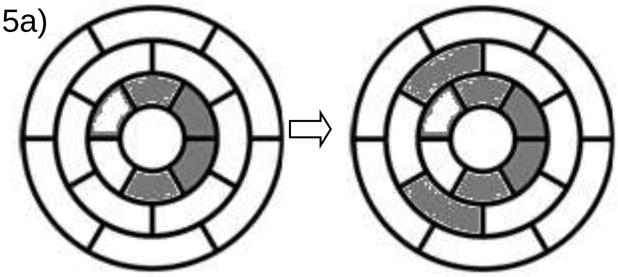
Caso 4b)



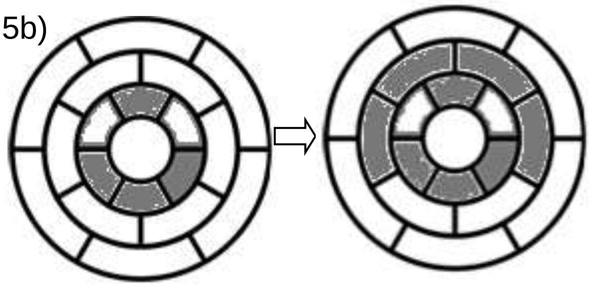
Caso 4c)



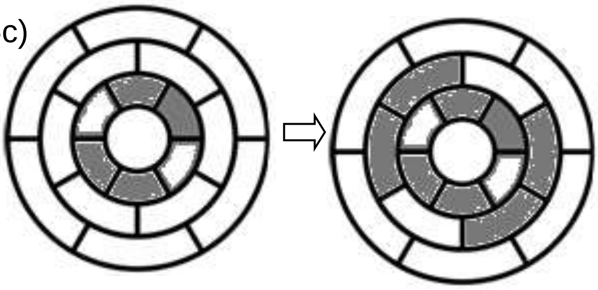
Caso 5a)



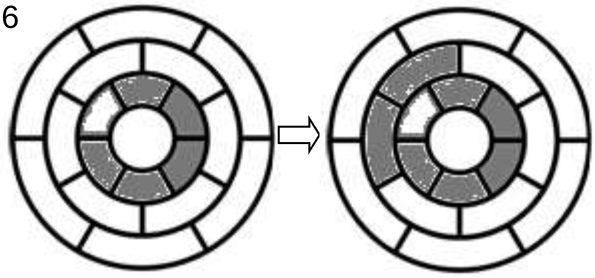
Caso 5b)



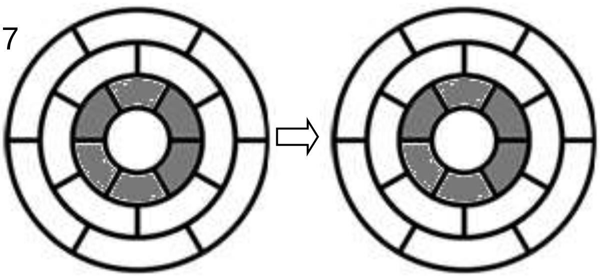
Caso 5c)



Caso 6



Caso 7



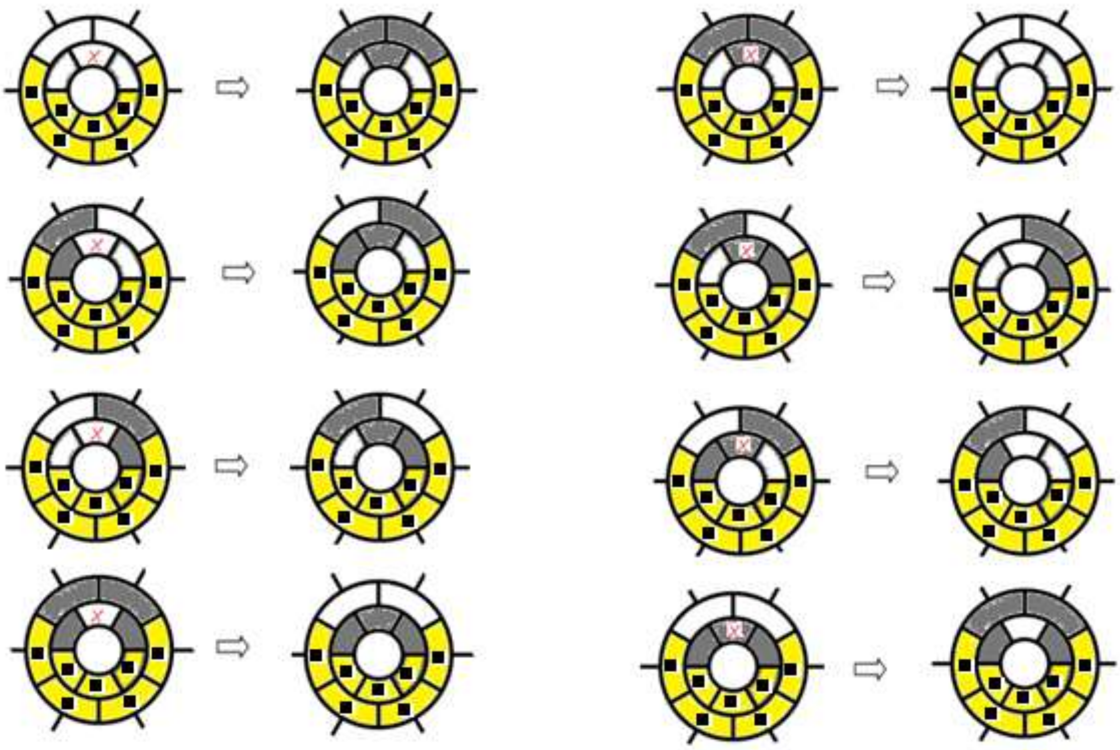
Em cada um desses casos, o segundo anel tem sempre uma quantidade par de partes pintadas de cinza. Para passar do segundo anel para o terceiro, o procedimento é análogo, exceto que os casos análogos a 2, 4a), 4b), 4c) e 6) não mais ocorrerão, pois não há no segundo anel uma quantidade ímpar de partes pintadas de cinza, e exatamente o mesmo que ocorreu da transição do primeiro para o segundo anéis ocorrerá também do segundo para o terceiro. Esse processo continua indefinidamente. Assim, a quantidade de partes pintadas de cinza de um anel, do segundo em diante, será sempre par.

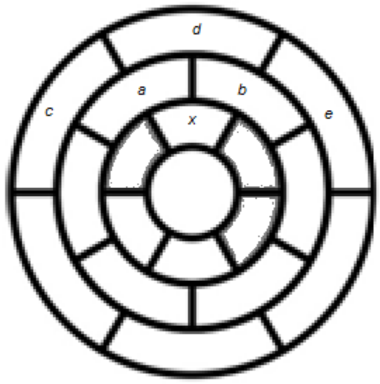
Solução 2: Com exceção do primeiro, as cores das partes de um anel são determinadas de modo único pelas cores das partes do anel anterior. Se, em uma configuração inicial de cores do primeiro anel, modificarmos a cor de uma única de suas partes, trocando branco por cinza ou cinza por branco, essa modificação provocará a mudança de cor em exatamente duas partes do próximo anel, a saber, as duas casas do anel exterior que estão em contato com a casa que foi modificada. As outras quatro casas continuarão com as cores que já tinham.

Conclusão: modificar a cor de uma parte de um anel provoca a modificação das cores de exatamente duas partes do anel seguinte e, mais ainda, as cores dessas partes são trocadas (branco vira cinza e vice-versa).

Joãozinho inicia a pintura das partes do primeiro anel a partir do anel totalmente branco (nenhuma parte cinza, lembre-se de que 0 é par); a cada casa que ele escolhe pintar são automaticamente modificadas duas casas (vizinhas) do próximo anel, logo, independentemente de como ele pintar o primeiro anel, o segundo anel sempre terá uma quantidade par de partes pintadas de cinza. Isso porque, a cada casa pintada do primeiro anel, a quantidade de partes cinza do segundo anel continua a mesma, ou é diminuída de 2 ou acrescida de 2.

A título de ilustração, observe o que ocorre quando modificamos somente a cor da casa marcada com x. As casas marcadas com um quadradinho (e na cor amarela) podem ter a cor branca ou cinza, elas não são modificadas com a mudança de cor da casa marcada com x.



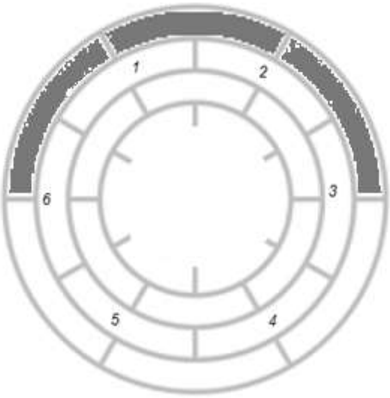


Um processo análogo se repete do segundo para o terceiro anel. Vejamos o motivo: como vimos, uma modificação de cor em uma casa do primeiro anel provoca alterações de cores em duas casas vizinhas do segundo anel, as quais chamaremos de casas *a* e *b*. A modificação de cor da casa *a*, seguida da modificação de cor da casa *b,* tem o mesmo efeito, nas casas do terceiro anel, que primeiro modificar a cor de *b*, depois a de *a*. Podemos então concluir que, no mesmo anel, uma casa após a outra é modificada, sem nos preocuparmos com a mudança simultânea de cores em várias casas, qual casa foi modificada em primeiro lugar ou a ordem em que as modificações aconteceram.

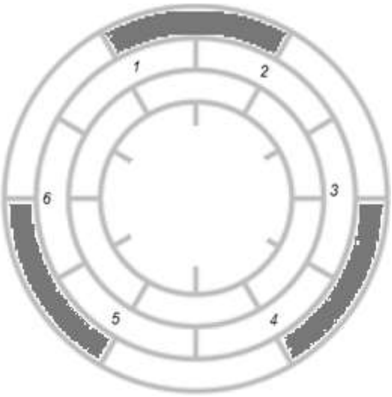
Para ilustrar, veja a figura acima; ao modificarmos a cor da casa x, modificamos as cores das casas *a* e *b*, as quais, por sua vez, provocam modificações de cores nas casas *c*, *d* e *e*. Ao mudarmos a cor da casa x, a casa *c* ficará com cor oposta à que tinha, a casa *d* ficará com a mesma cor que tinha e a casa *e* terá sua cor trocada. Disso segue que, se a quantidade de casas pintadas de cinza for par antes da modificação da cor na casa x, então ela continuará sendo par depois da modificação. Como vimos acima, no segundo anel teremos sempre uma quantidade par de casas pintadas de cinza e, daí para a frente, como a paridade é conservada, todos os demais anéis deverão ter uma quantidade par de casas coloridas de cinza.

Solução 3: Suponhamos, primeiramente, que haja somente uma parte pintada de cinza em um anel e que esse anel não seja o primeiro. Vejamos o que pode acontecer com o anel imediatamente anterior, que está em contato com ele. Para ilustrar, observe a figura abaixo, em que as partes do anel anterior são numeradas de 1 a 6.
Se a casa com o número 1 fosse branca, a de número 2 seria cinza, bem como as casas numeradas com 2, 3, 4, 5 e 6, pois as partes do anel externo em contato com essas últimas são todas brancas. Assim, as casas 1 e 6 teriam cores diferentes e, portanto, a parte do anel externo em contado com essas duas casas deveria ser cinza, mas não é (isto é uma contradição). De modo análogo, chegaremos a uma situação contraditória se a casa com o número 1 fosse da cor cinza.

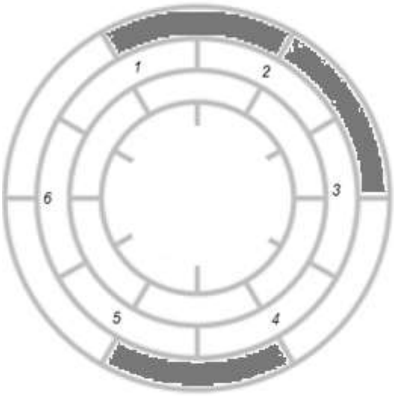
Vamos considerar agora o caso em que exatamente três casas são da cor cinza. Devido à simetria, há apenas três casos a considerar. Eles estão ilustrados nas figuras a seguir:



Três casas cinzas juntas



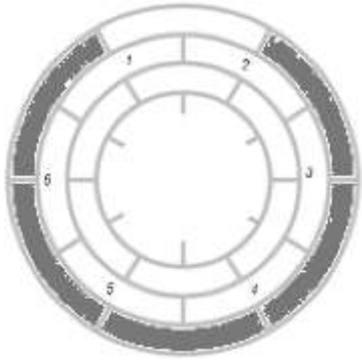
Três casas cinzas separadas entre si



Duas casas cinzas juntas e uma separada

Essas configurações também geram contradições quando analisarmos as cores das partes do anel interior que estão em contato com o que já está pintado. Como os casos são completamente análogos, analisaremos somente a terceira configuração. Neste caso, se a cor da parte 1 fosse branca, então a parte 2 deveria ser cinza, a parte 3 branca, a parte 4 branca, a parte 5 cinza e a parte 6 também cinza. Logo, as partes numeradas com 1 e 6 teriam cores opostas, o que entra em conflito com a cor da parte branca do anel exterior que faz fronteira com elas. Analogamente, se iniciarmos admitindo que a parte 1 fosse cinza, também chegaríamos a uma contradição.

Finalmente, vejamos o que ocorre quando 5 partes estão pintadas de cinza, como ilustra a figura ao lado. A análise é similar às anteriores: se a parte 1 fosse branca, 2 deveria ser branca, a casa 3, cinza, a casa 4 deveria ser branca, a casa 5 cinza e, a casa 6, branca. Nesse caso, as casas 1 e 6 teriam a mesma cor, mas isso é impossível, pois a parte do anel exterior em contato com elas é cinza, denunciando que elas deveriam ter cores diferentes. Contradição análoga aparece se iniciarmos supondo que a casa 1 é cinza.



Esses casos esgotam todas as possibilidades e mostram que nenhum anel, a partir do segundo, terá uma quantidade ímpar de partes pintadas de cinza.

item d)

Se um anel, a partir do terceiro, fosse pintado todo de cinza, o anel imediatamente anterior teria cores alternadas (três partes pintadas de cinza e três partes brancas, como ocorreu no item b)). Como 3 é ímpar, isto é impossível, devido ao item c). Logo, a partir do terceiro, nenhum anel será pintado todo de cinza.

N2Q4 – Solução

item a)

Como o algarismo das unidades do número 2A5 é 5, os possíveis algarismos das unidades para o produto dos números 2A5 e 13B é 0 ou 5. Como esse produto é múltiplo de 36, que é par, o produto também é par. Logo, seu último algarismo não pode ser 5, logo, é 0.

item b)

Como 2A5 é ímpar e o produto dos números 2A5 e 13B é par, segue que 13B deve ser par; porém, como o produto também é múltiplo de 4 (já que é múltiplo de 36), e como o fator 2A5 não é múltiplo de 4, segue que o fator 13B tem de ser um múltiplo de 4, isto é, o número 3B tem de ser múltiplo de 4. Logo, as únicas possibilidades para B são os algarismos 2 ou 6, já que 30, 34 e 38 não são divisíveis por 4.

item c)

De acordo com o item b), devemos analisar o que ocorre em dois casos: quando B = 2 ou quando B = 6.

Se B é o algarismo 2, 13B = 132, que é múltiplo de 2, 3 e 4, mas não é múltiplo de 9. Logo, o produto de 2A5 e 132 também é múltiplo de 2, 3 e 4, e, para ser múltiplo de 9, o fator 2A5 tem de ser um múltiplo de 3. Logo, pelo critério de divisibilidade por 3, o algarismo A tem de ser tal que a soma 2 + A + 5 seja múltiplo de 3. Temos então as possibilidades 2, 5 e 8 para o algarismo A.

Se B é o algarismo 6, 13B = 136, que é múltiplo de 2 e 4, mas não é múltiplo de 3 nem de 9. Logo, o produto de 2A5 e 136 também é múltiplo de 2 e 4, e, para ser múltiplo de 3 e 9, o fator 2A5 tem de ser múltiplo de 9. Logo, o algarismo A tem de ser tal que a soma 2 + A + 5 seja um múltiplo de 9. Neste caso, temos somente a possibilidade de A ser o algarismo 2.

Resumindo, todas as possibilidades para o produto dos números 2A5 e 13B ser um múltiplo de 36 são:

- 225 x 132 = 29700
- 255 x 132 = 33660
- 285 x 132 = 37620
- 225 x 136 = 30600

O maior desses números é 37620.

Outra solução:

Uma vez que B = 6 ou B = 2, podemos obter o maior valor possível de 2A5 x 13B, testando os valores de A, do maior para o menor.

Se A = 9 e B = 6, 295 x 136 = 40120 não é múltiplo de 36.

Se A = 9 e B = 2, 295 x 132 = 38940 não é múltiplo de 36.

Se A = 8 e B = 6, 285 x 136 = 38760 não é múltiplo de 36.

Se A = 8 e B = 2, 285 x 132 = 37620 é múltiplo de 36 e, portanto, esse é o maior valor possível para o produto.

N2Q5 – Solução

item a)

Os possíveis algarismos da 5.ª posição são 6, 7, 8 ou 9. Como 6, 7 e 9 já foram escolhidos, só há uma possibilidade para escolha do algarismo na da 5.ª posição: o algarismo 8.

item b)

Os possíveis algarismos da 4.ª posição são 5, 6, 7, 8 ou 9; entretanto, como 7 foi utilizado na 5.ª posição, há apenas 4 possibilidades de escolha para a 4.ª posição (5, 6, 8 ou 9).

item c)

Observamos primeiramente que há 4 possibilidades de escolha para a 5.ª. posição (6, 7, 8 ou 9). Feita uma dessas escolhas, vemos que há somente 4 possibilidades de escolha para a 4.ª posição.

De fato, o item b) ilustra o que ocorre se o algarismo 7 ocupasse a 5.ª posição e, é claro, o mesmo ocorre se 6, 8 ou 9 ocupar a última posição. Em cada um dos casos, há 4 possibilidades para a 4.ª posição.

Feitas as escolhas das duas últimas posições, vemos também que há 4 escolhas para a terceira posição (das possibilidades 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 devemos excluir duas escolhas já feitas).

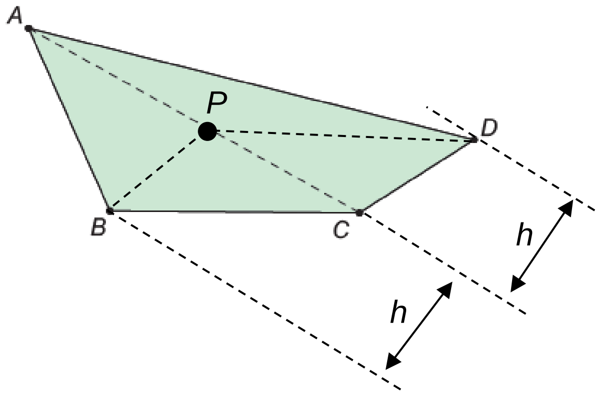
Utilizando exatamente o mesmo raciocínio, teremos também 4 escolhas para a segunda posição e 4 escolhas para a primeira posição.

Pelo Princípio Multiplicativo, há $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$ senhas diferentes que Fernanda poderá formar.

N2Q6 – Solução

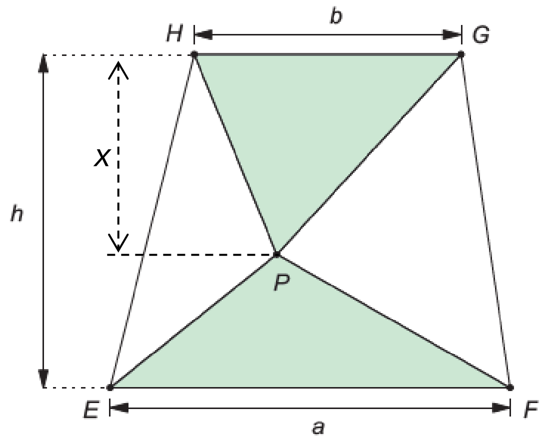
item a)

Os triângulos *ABC* e *ACD* têm a mesma área e a base comum *AC*. Logo, ambos têm a mesma altura *h*. Se *P* é um ponto da diagonal *AC*, então todos os quatro triângulos *PAB*, *PBC*, *PCD* e *PDA* têm a mesma altura *h* relativa à reta *AC*. Para que suas áreas sejam iguais, as medidas de suas bases *AP* ou *PC* devem ser iguais, isto é, *AP* = *PC*. Portanto, *P* é o ponto médio da diagonal *AC*.



item b)

Se a altura do triângulo *PGH* é *x*, então sua área é $\frac{HG\cdot x}{2}=\frac{b\cdot x}{2}$ e a área do triângulo *PEF* é $\frac{EF\cdot(h-x)}{2}=\frac{a\cdot(h-x)}{2}$. Como essas áreas são iguais, temos $\frac{b\cdot x}{2}=\frac{a\cdot(h-x)}{2}\Leftrightarrow bx=ah-ax\Leftrightarrow(a+b)x=ah\Leftrightarrow x=\frac{ah}{a+b}$.



Logo, as áreas dos triângulos *PEF* e *PGH* são ambas iguais a $\frac{b\cdot x}{2}=\frac{b}{2}\cdot\frac{ah}{a+b}=\frac{abh}{2(a+b)}$.

item c)

Se *P* está no interior do trapézio do item anterior, então a soma das áreas dos quatro triângulos *PEF*, *PFG*, *PGH* e *PHE* é igual à área do trapézio. A área do trapézio *EFGH* é igual a $\frac{(a+b)h}{2}$ e se as áreas daqueles quatro triângulos são iguais, então cada um deles tem área igual a $\frac{1}{4}\cdot\frac{(a+b)h}{2}=\frac{(a+b)h}{8}$. Entretanto, pelo item anterior, se os triângulos *PEF* e *PGH* têm a mesma área, esta é igual a $\frac{abh}{2(a+b)}$. Consequentemente,

$$\frac{(a+b)h}{8}=\frac{abh}{2(a+b)}\Leftrightarrow(a+b)^2=4ab\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=4ab\Leftrightarrow$$
$$a^2-2ab+b^2=0\Leftrightarrow(a-b)^2=0\Leftrightarrow a-b=0\Leftrightarrow a=b.$$

Mas *a* não pode ser igual a *b*, pois, sabemos do enunciado que *a* > *b*. Logo, não existe um ponto *P* no interior do trapézio *EFGH* tal que os quatro triângulos *PEF*, *PFG*, *PGH* e *PHE* têm a mesma área.