Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Semelhanças entre Figuras e Polígonos.

8^o **ano/**9^a **série E.F.**

Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales
Semelhanças entre Figuras e Polígonos.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Observe a figura abaixo e responda:

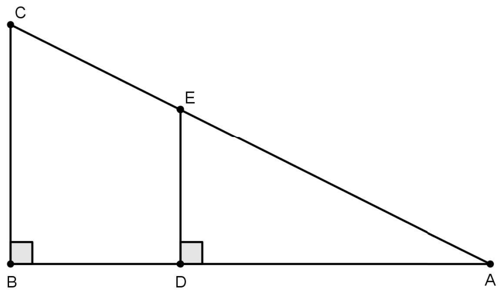

Figura 1

a) os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ são semelhantes?

b) caso sejam semelhantes, quais são os lados homólogos?

Exercício 2. Determine se os triângulos $\triangle KLM$ e $\triangle MPQ$ são semelhantes.

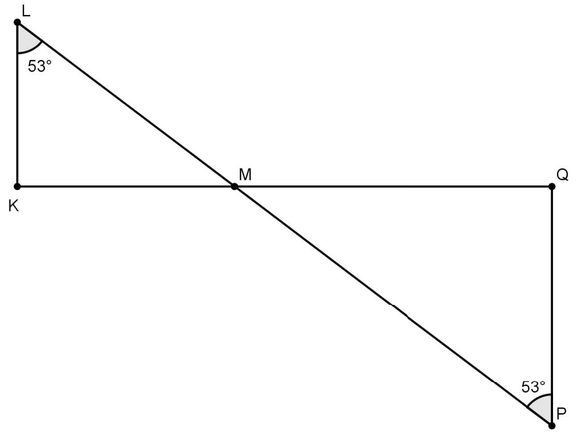

Figura 2

Exercício 3. Qual a razão de semelhança dos triângulos abaixo?

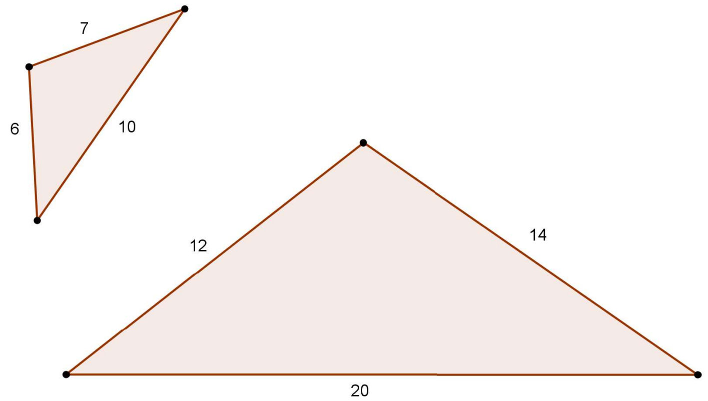

Figura 3

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Como João pode medir a altura de um poste, conhecendo sua altura, $1,60$m, o comprimento de sua sombra, 2m, o comprimento da sombra do poste no mesmo instante que mediu sua sombra, 7m?

Exercício 5. Na figura abaixo, $BC = 12$cm e $AH = 8$cm, sendo $\overline{AH}$ altura do $\triangle ABC$. Determine o lado do quadrado $MNPQ$.

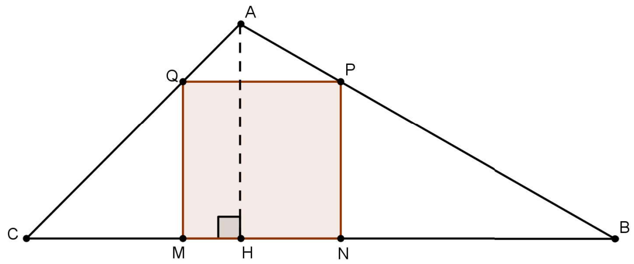

Figura 4

Exercício 6. Na figura abaixo, temos uma reta que passa pelos pontos A, B e C e outra que passa por A e é tangente às circunferências de centros B e C e raios 3cm e 5cm. Se $AB = 7$cm, determine BC.

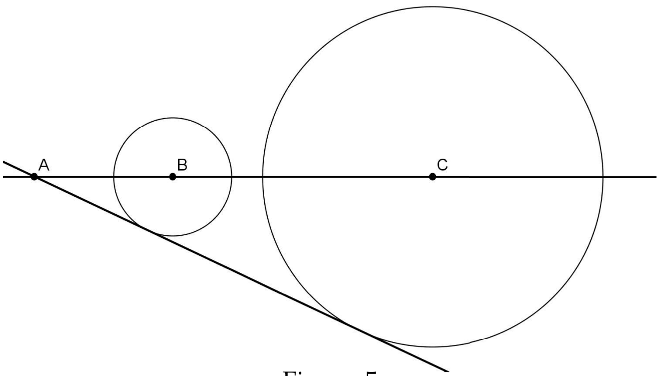

Figura 5

Exercício 7. Sabendo que $AB = 15$, $BC = 20$, $AD = 10$ e $DC = 15$, determine a medida de $\overline{DE}$ na figura abaixo.

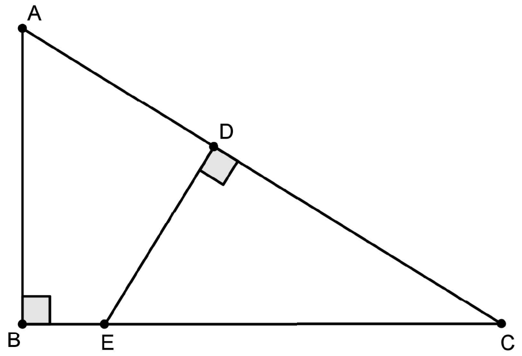

Figura 7

Exercício 8. Na figura abaixo, temos $AC = 4$ e $AB = 6$. Determine o perímetro do quadrado $AEDF$.

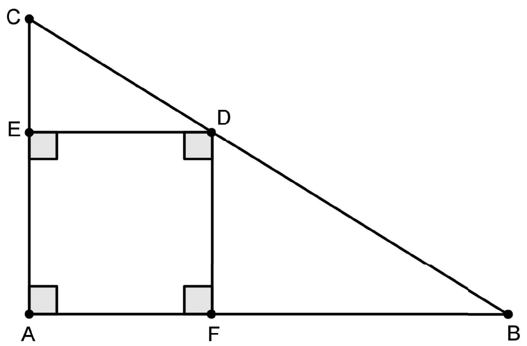

Figura 8

Exercício 9. No retângulo da figura abaixo temos que $AB = 20$, $BC = 12$ e $AM = MB$. Detemine a medida de $\overline{EF}$.

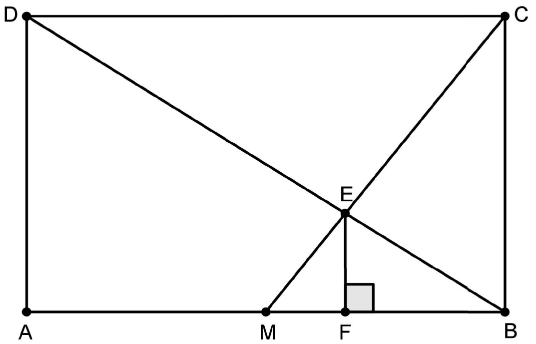

Figura 9

Exercício 10. Determine x na figura abaixo, na qual existem três quadrados de lados 9, x e 4.

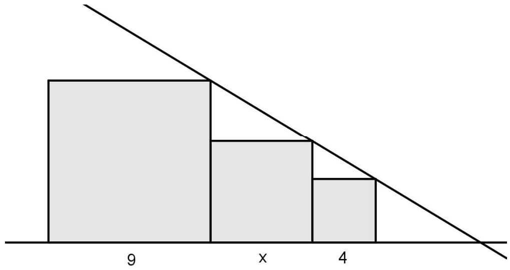

Figura 10

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. Na figura abaixo, temos um triângulo inscrito. Se $AB = 10$, $AC = 12$ e $AH = 4$, determine o raio da circunferência.

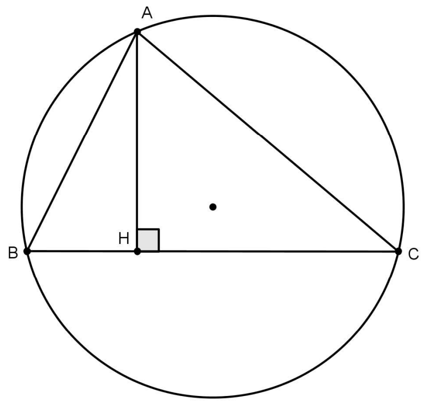

Figura 12

Exercício 12. Na figura abaixo, temos $AC = CB = 10$cm, $AB = 6$cm e $AM = MB$. Além disso, o segmento BH tangencia a semicircunferência com centro em M. Determine o raio dessa semicircunferência.

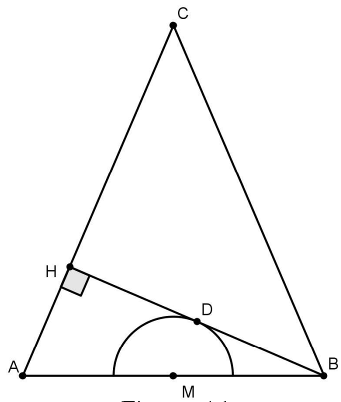

Figura 14

Exercício 13. Na figura abaixo, temos duas semicircunferências. Se $AD = 36$ e $BC = CD$, determine CD.

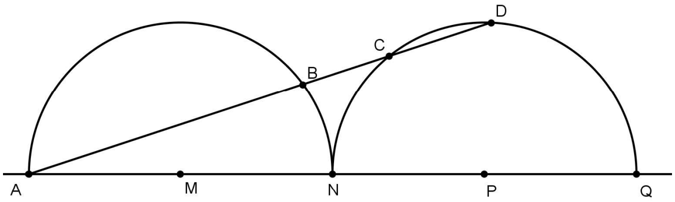

Figura 15

Exercício 14. Na figura abaixo, $\overline{DE}//\overline{AC}$, $\angle ACD \equiv \angle BCD$, $BC = m$ e $AC = n$. Determine a medida de $\overline{DE}$ em função de m e n.

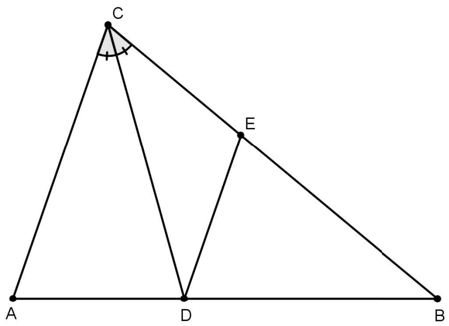

Figura 17

Exercício 15. No desenho abaixo, o triângulo ABC é equilátero e $BD = CE = AF = AB/3$. Determine a razão EG/GD.

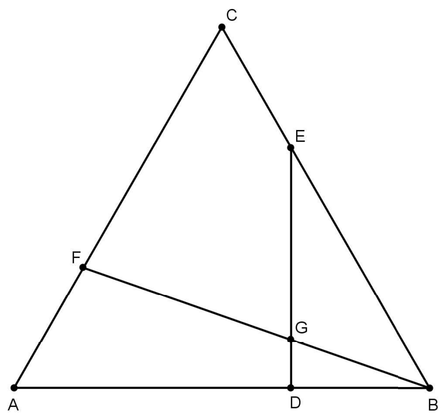

Figura 18

Exercício 16. O quadrado $ABCD$ está inscrito em um círculo cujo raio mede 30. A corda $\overline{AM}$ intercepta a diagonal $\overline{BD}$ no ponto P. Se o segmento $\overline{AM}$ mede 50, determine a medida do segmento $\overline{AP}$.

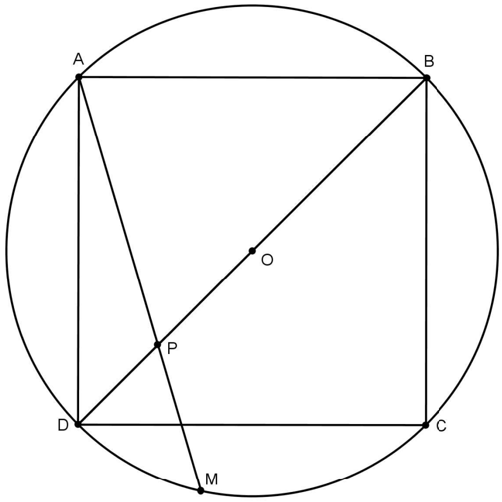

Figura 19

Respostas e Soluções.

1.

a) Sim, pois $\angle BAC \equiv \angle DAE$ e $\angle CBA = \angle EDA = 90^o$ (caso Ângulo-Ângulo).

b) Os lados homólogos são: $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$; $\overline{AC}$ e $\overline{AE}$; e $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$.

2. Como $\angle KLM = \angle QPM = 53^o$ e $\angle KML \equiv \angle QMP$ (opostos pelo vértice), então $\triangle KLM \simeq \triangle MPQ$, pelo caso AA.

3. Como $\dfrac{20}{10} = \dfrac{14}{7} = \dfrac{12}{6} = 2$, a razão de semelhança é 2 ou $\dfrac{10}{20} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{6}{12} = 1/2$.

4. O triângulo formado por João e sua sombra e o triângulo formado pelo poste e sombra do mesmo são semelhantes. Usando a razão de semelhança, temos

$$\begin{aligned} \frac{1,6}{2} &= \frac{x}{7} \\ 2x &= 11,2 \\ x &= 5,6. \end{aligned}$$

Assim, a altura do poste é 5,6m.

5. Como $MNPQ$ é um quadrado, então $\overline{PQ}//\overline{MN}//\overline{BC}$, o que implica que $\triangle ABC$ $\triangle APQ$. Chamando o lado do quadrado de x e aplicando a razão de semelhança, temos

$$\begin{aligned} \frac{12}{8} &= \frac{x}{8-x} \\ 8x &= 96 - 12x \\ x &= \frac{24}{5}. \end{aligned}$$

6. Traçando raios ligando os centros das circunferências aos pontos de tangências, obtemos a figura abaixo.

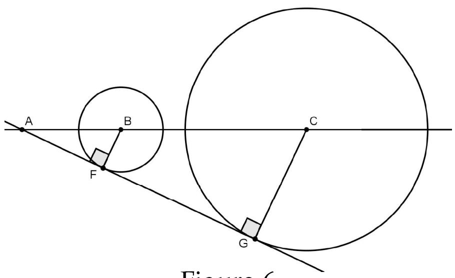

Figura 6

Perceba que $\triangle ABF$ $\triangle ACG$. Chamando a distância entre os centros de x e aplicando a razão de semelhança, temos

$$\begin{aligned} \frac{7}{3} &= \frac{7+x}{5} \\ 21 + 3x &= 35 \\ x &= \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

7. (Extraído da Vídeo Aula) Como $\angle ECD \equiv \angle ACB$ e $\angle ABC = \angle EDC = 90^o$, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EDC$ são semelhantes. Aplicando a razão de semelhança, temos:

$$\begin{aligned} \frac{20}{15} &= \frac{15}{DE} \\ 20DE &= 225 \\ DE &= \frac{45}{4}. \end{aligned}$$

8. (Extraído da Vídeo Aula) Como os triângulos $\triangle CED$ e $\triangle DFB$ são semelhantes, pois $\angle CED = \angle DFB = 90^o$ e $\angle CDE \equiv \angle DBF$, vamos aplicar a razão de semelhança, chamando o lado do quadrado de x. Temos então

$$\begin{aligned} \frac{4-x}{x} &= \frac{x}{6-x} \\ x^2 &= 24 - 10x + x^2 \\ x &= \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

Assim, temos que o perímetro do quadrado $AEDF$ é $\dfrac{48}{5}$.

9. (Extraído da Vídeo Aula)

Fazendo $EF = x$, $FB = y$, temos $FM = 10 - y$. Podemos observar a semelhança dos triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle FEB$, além dos triângulos $\triangle CBM$ e $\triangle EFM$. Aplicando a razão de semelhança em ambos os casos, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y}{20} = \dfrac{x}{12} \\ \dfrac{10-y}{10} = \dfrac{x}{12} \end{cases}$$

Simplificando, chegamos ao sistema equivalente

$$\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ 5x + 6y = 60 \end{cases}$$

Segue que $EF = x = 4$.

10. (Extraído da Vídeo Aula) Nomeando alguns pontos importantes, obtemos a figura abaixo.

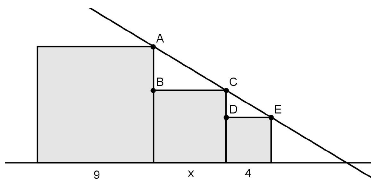

Figura 11

Como os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CDE$ são semelhantes,