Aula 01 – Ciclo 02

Professora Laís Pereira
EMEF Antônio Aires de Almeida
Gravataí

Exemplo 1. Quantos são os números inteiros entre 1 e 20 que são múltiplos de 3 ou múltiplos de 7?

Solução. Existem 6 múltiplos de 3 entre 1 e 20:

{3, 6, 9, 12, 15, 18}

E existem 2 múltiplos de 7 neste conjunto:

{7, 14}

Como esses conjuntos são disjuntos, então existem

6+2=8

múltiplos de 3 ou de 7 entre 1 e 20.

Exemplo 2. Em uma escola, 153 alunos estudam pela manhã, outros 92 estudam a tarde e outros 136 estudam a noite. Quantos alunos desta escola estudam pela manhã ou à noite?

Solução. Pela manhã estudam 153 alunos e a noite estudam 136 alunos. Como são alunos diferentes, o total de alunos que estudam de manhã ou a noite é igual a 153+136=289.

Exemplo 3. Maria é muito indecisa. Ela pretende sair com suas amigas e está pensando em qual roupa vestir. Ela pode combinar três blusas diferentes com duas saias diferentes. De quantas maneiras diferentes Maria pode se vestir?

Exemplo 5. Quantos são os números de dois algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4?

Solução: Para resolver este problema podemos listar todas as possibilidades.

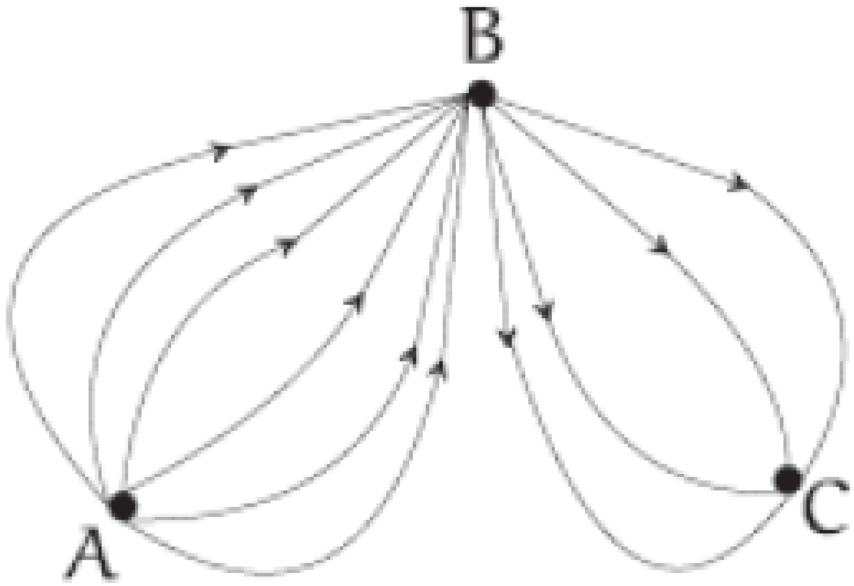
- Se o número começa com o algarismo 1 temos: 12, 13 e 14. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 2 temos: 21, 23 e 24. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 3 temos: 31, 32 e 34. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 4 temos: 41, 42 e 43. São três possibilidades.

Então ao todo temos 3+3+3+3=12 números possíveis.

	1	**2**	**3**	**4**
1	x	12	13	14
2	21	x	23	24
3	31	32	x	34
4	41	42	43	x

Logo, 4x3=12

Exemplo 6. (Fomin, capítulo 2) No País das Maravilhas existem três cidades A, B e C. Existem seis estradas ligando A a B e quatro estradas ligando B a C. De quantas maneiras é possível dirigir de A a C?



Solução. Vamos numerar as cidades de A até B com os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Vamos numerar as cidade de B até C também com números 1, 2, 3 e 4. E vamos representar um caminho de A até C como, por exemplo assim 5-3 em que pegamos a estrada 5 para ir de A até B e pegamos a estrada 3 para ir de B até C.

- Se a primeira estrada é a 1, então podemos fazer quatro percursos diferentes:

  1-1, 1-2, 1-3, 1-4

- Se a primeira estrada é a 2, então também podemos fazer quatro percursos diferentes:

  2-1, 2-2, 2-3, 2-4

- De modo análogo se a primeira estrada é a 3, então também podemos fazer quatro percursos diferentes:

  3-1, 3-2, 3-3, 3-4

Então para cada escolha da estrada de A até B, podemos fazer quatro percursos diferentes para sair de A e chegar até C. Como temos 6 escolhas de estradas de A até B, o número total de percursos de A até C é igual a 4+4+4+4+4+4=6x4=24.

Exemplo 10. Suponha que temos uma coleção com 5 livros de álgebra, 7 livros de combinatória e 10 livros de geometria. Se todos os livros são diferentes, de quantas maneiras podemos selecionar dois livros de assuntos diferentes?

- Álgebra-combinatória: 5x7=35
- Álgebra-geometria: 5x10=50
- Combinatória-geometria: 7x10=70

Ao todo vemos que existem 35+50+70=155 escolhas diferentes.

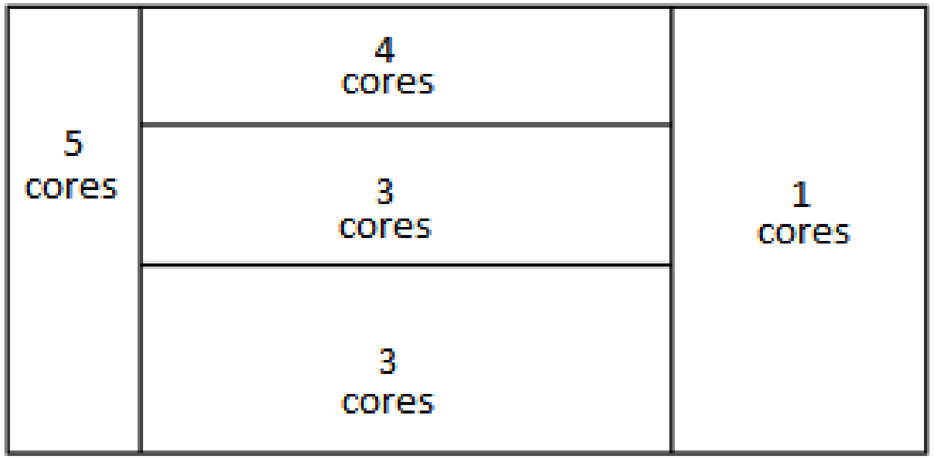
Exemplo 12. Quantos são os números naturais de três algarismos distintos?

Solução: Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda. O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a zero. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois ele não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo. A resposta é 9x9x8=648.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
	porém não podemos usar o que já foi usado na centena.	porém não podemos usar o que já foi usado na centena e na dezena.

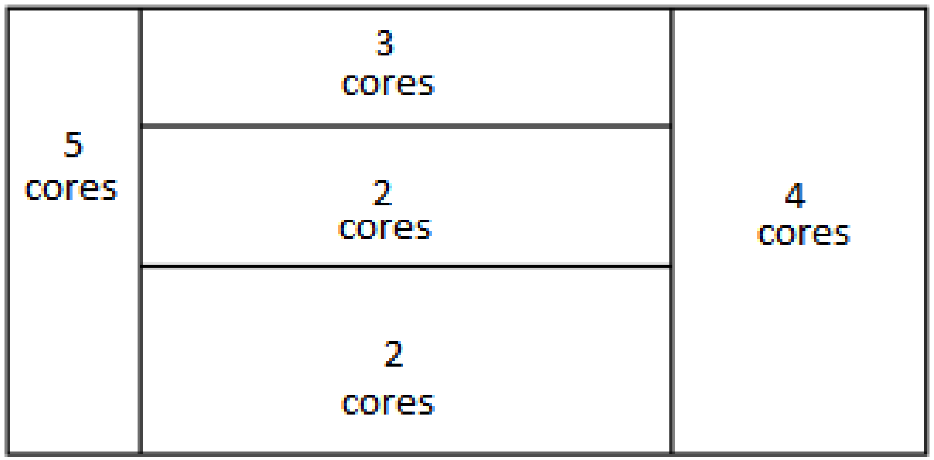
Exemplo 13. O retângulo a seguir está dividido em 5 regiões. Se temos 5 cores a nossa disposição, de quantas maneiras podemos colorir este retângulo de modo que cada região receba uma cor e regiões adjacentes sejam coloridas com cores diferentes?

1º Caso: direita e esquerda iguais.



$5x1x4x3x3=180$

2º Caso: direita e esquerda diferentes.



$5x4x3x2x2=240$

Total 420

Exercício 1. Um grupo de 4 alunos (Alice, Bernado, Carolina e Daniel) tem que escolher um líder e um vice-líder para um debate.

(a) Faça uma lista de todas as possíveis escolhas.

(b) Conte o número de possíveis escolhas e verifique que o Princípio Multiplicativo fornece a resposta correta.

Solução do exercício 1. (apostila 2, exercício 1, página 11)
(a) Os pareces (líder,vice) podem ser listados assim:

(Alice, Bernardo)	(Alice, Carolina)	(Alice, Daniel)
(Bernardo, Alice)	(Bernardo, Carolina)	(Bernardo, Daniel)
(Carolina, Alice)	(Carolina, Bernardo)	(Carolina, Daniel)
(Daniel, Alice)	(Daniel, Bernardo)	(Daniel, Carolina)

(b) Por uma contagem direta verifica-se que são 12 pares (líder, vice). Aplicando o princípio multiplicativo vemos que existe 4 escolhas para o líder. Depois de escolhido o líder, existem 3 escolhas para o vice-líder. Daí a quantidade de pares (líder, vice) é igual ao produto 4x3=12.

Exercício 2. Um time de futebol de campo com 11 jogadores precisa eleger um capitão e um vice capitão.

(a) De quantas maneiras esta escolha pode ser feita?

(b) Neste caso é viável listar todas estas possibilidades?

Solução do exercício 2. O capitão pode ser escolhido de 11 maneiras diferentes. Depois de escolhido o capitão, podemos escolher o vice-capitão de 10 maneiras diferentes. Daí a quantidade possível de escolhas de um par (capitão, vice) é igual a 11x10=110. Neste caso, como são 110 casos possíveis, pode ser bastante trabalhoso e não muito eficiente a listagem explicita de todas estas possibilidade.

Se você ainda não está convencido, liste todas as possibilidades de escolhas de 6 números para um sorteio da Mega-Sena.

Exercício 3.

Um professor de matemática, escreveu no quadro a seguinte pergunta:

“De quantos modos podem-se escolher três dos jogadores de um time de futebol (composto por 11 jogadores) para representá-lo em uma cerimônia de premiação?”

Alguns minutos para o término da aula um aluno apresentou a solução:

“O primeiro jogador pode ser escolhido de 11 modos distintos. O segundo, de 10 e o terceiro, de 9. Logo, pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades distintas para a escolha dos jogadores parece ser $11 \times 10 \times 9 = 990$*.”*

A solução está certa ou errada? Se estiver errada, então encontre a solução correta.

Solução do Exercício 3. (Apostila “Métodos de Contagem e Probabilidade”, página 10)

Esta solução está incorreta, mas podemos “consertá-la” para chegar à resposta certa. Suponha que tivéssemos escolhido, sucessivamente, os jogadores A, B e C. A comissão de representantes assim formada seria exatamente a mesma se tivéssemos selecionado, por exemplo, primeiro B, depois A, depois C. No entanto, as duas escolhas foram contadas por nós como se fossem distintas. O que nos permite corrigir o resultado da contagem é o fato de que todas as possíveis comissões são repetidas o mesmo número de vezes, correspondente a todas as suas possíveis ordenações. Por exemplo, A, B e C vão surgir, em nosso processo de enumeração, $3 \times 2 \times 1 = 6$ vezes, o mesmo ocorrendo com todas as possíveis comissões. Logo, o número correto de comissões é igual a $990/6=165$.

Exercício 3. (OBMEP 2011 - N2Q13 – 1ª fase) Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?

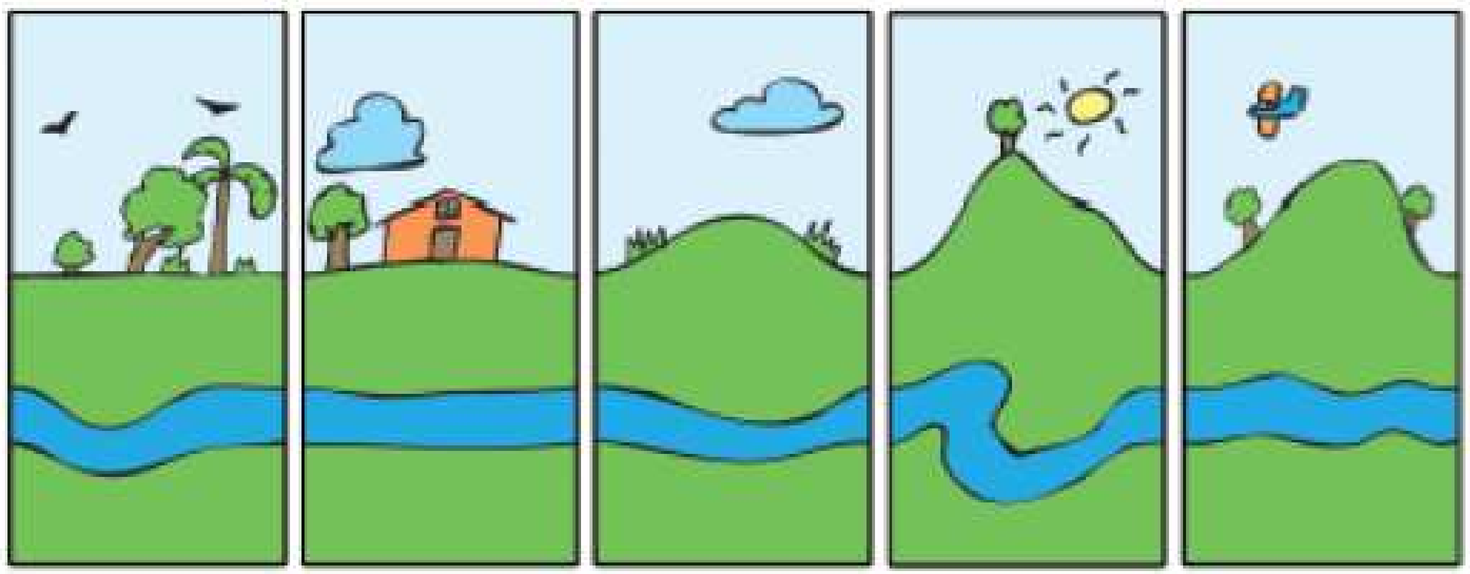
(a) uma semana

(b) um mês

(c) dois meses

(d) quatro meses

(e) seis meses

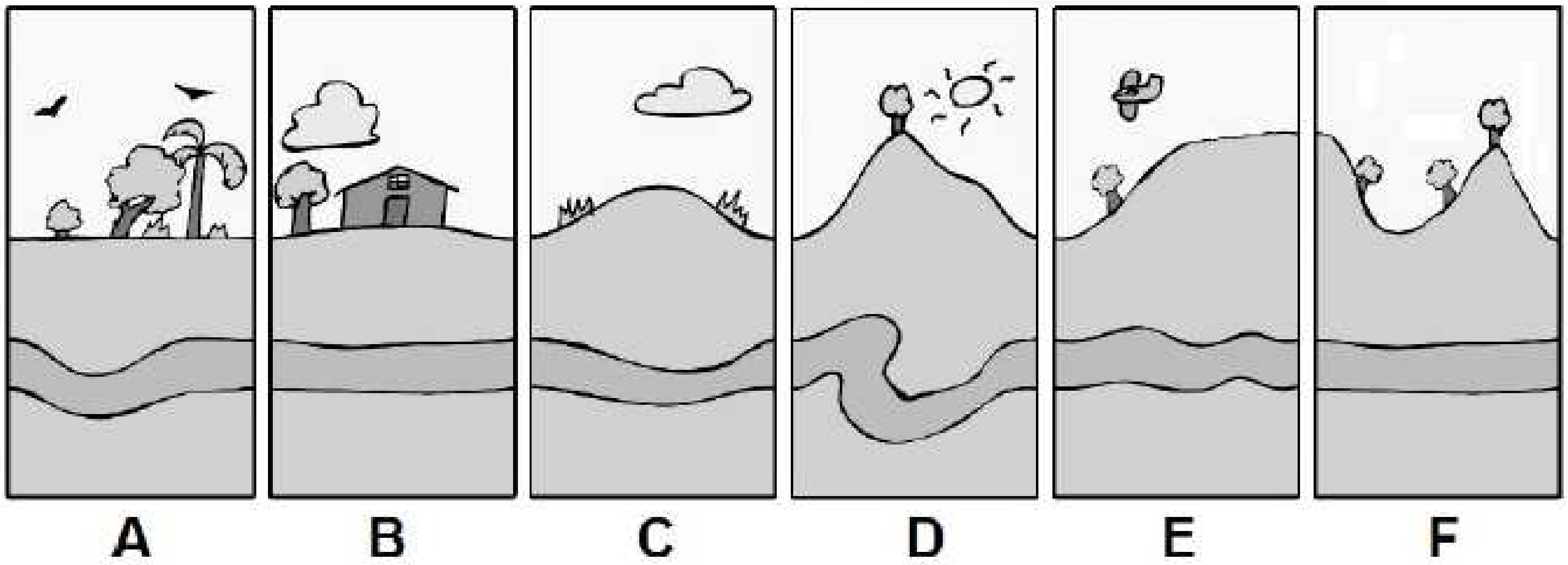


Solução do exercício 3. Temos cinco posições distintas para colocarmos cinco quadros também distintos. Na primeira posição temos 5 escolhas distintas possíveis. Em seguida, na segunda posição temos 4 escolhas distintas, e assim por diante. Pelo princípio multiplicativo, podemos formar $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ paisagens distintas. Como um mês tem, aproximadamente, 30 dias, podemos mudar a paisagem por aproximadamente $120 \div 30 = 4$ meses.

Exercício 10.

Podemos montar paisagens colocando lado a lado os seis quadros da figura. Observe que o lado direito do quadro **E** e o lado esquerdo do quadro **F** não se encaixam com os quatro primeiros quadros formando uma paisagem, enquanto que os outros dois lados sem encaixam com quaisquer um dos quadros A, B, C e D. Além disso, os quadros A, B, C e D se encaixam entre si em quaisquer posição.

Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo é possível evitar que uma mesma paisagem se repita? (Dê sua resposta final em semanas e dias.)



Vamos dividir a solução em dois casos:

1ª) Fixamos o quadro F na primeira e quadro E na sexta posição, deste modo os quadros A, B, C e D ocuparão as quatro posições centrais em quaisquer ordem.

_F_   ___   ___   ___   ___   _E_

Nesse caso, usando o princípio multiplicativo, totalizamos 4 x 3 x 2 x 1 = **24** diferentes paisagens.

2ª) Consideramos os quadros E e F agrupados formando um só quadro EF. Observe que este quadro EF se encaixa com os outros 4 formando diferentes paisagens. Usando o princípio multiplicativo, os cinco quadros A, B, C, D e EF, formam
5 x 4 x 3 x 2 x 1 = **120** diferentes paisagens.

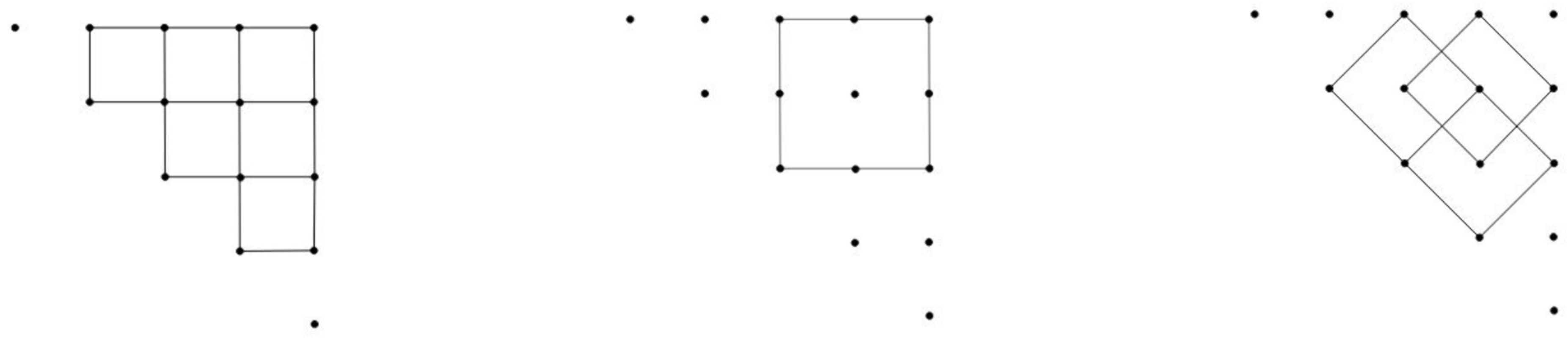
Usando o princípio aditivo, obtemos um total de 24 + 120 = **144** diferentes paisagens. Efetuando a divisão 144 ÷ 7, obtemos 144 = 20 x 7 + 4, ou seja, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita durante **20 semanas e 4 dias**.

Exercício 7.

O professor Ciconete desenhou no quadro os seguintes 15 pontos:

Em seguida, ele perguntou aos seus alunos quantos quadrados com vértices em tais pontos é possível desenhar.

Qual é a resposta correta para a pergunta do professor?

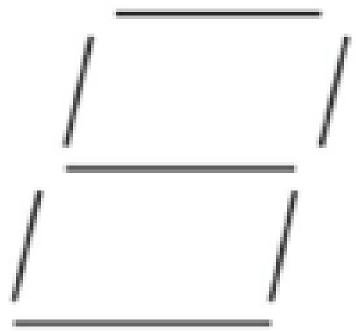


Assim, concluímos que a resposta para a pergunta do professor Ciconete é 6 +1 + 3 = 10.

Exercício 9.

Cada dígito de uma calculadora é mostrado no visor acendendo filamentos dispostos como mostra a figura a seguir.

Quantos símbolos diferentes podem ser representados? (Não inclua o caso em que nenhum filamento é aceso.)



Solução do Exercício 9. (Apostila “Métodos de Contagem e Probabilidade”, página 12).

Note que cada dígito é formado ascendendo ou apagando filamentos. Além disso, o dígito 8 é o que apresenta a maior quantidade de filamentos acessos (são 7 filamentos acessos). Neste sentido, devemos estudar o comportamento (apagar e ascender) de 7 filamentos. Listamos as possibilidades:

Filamento 1: 2 possibilidades - aceso ou apagado
Filamento 2: 2 possibilidades - aceso ou apagado
....
Filamento 6: 2 possibilidades - aceso ou apagado
Filamento 7: 2 possibilidades - aceso ou apagado

Portanto, pelo princípio multiplicativo, concluímos que existem 2x2x2x2x2x2x2 = 2^7 símbolos diferentes que podem ser representados pelos 7 filamentos (contando aquele com todos os filamentos apagados). Excluindo o caso onde todos os filamentos estão apagados, obtemos $2^7 - 1$ símbolos.

EXERCÍCIO 13.

Um número natural é chamado “*número circunflexo*” quando:

- ele tem cinco algarismos;
- seus três primeiros algarismos a partir da esquerda estão em ordem crescente;
- seus três últimos algarismos estão em ordem decrescente.

Por exemplo, 13864 e 78952 são números circunflexos, mas 78851 e 79421 não o são. Quantos são os números circunflexos maiores do que 77777?

Solução do Exercício 13. (Prova da OBMEP 2010, EXERCÍCIO 18, nível 1, 1ª fase).
Não existem números circunflexos começando com 8, pois nesse caso o segundo algarismo seria 9, não sobrando nenhum algarismo maior para aparecer no centro. Por outro lado, qualquer número começando com 6 à esquerda é menor do que 77777. Assim, os circunflexos maiores do que 77777 são da forma 789**AB**, onde **A** e **B** denotam algarismos de 0 a 9. Notamos que **A** não pode ser 0, pois nesse caso não seria possível escolher um algarismo para **B**. Além disso **A** também não pode ser 9, pois os três últimos algarismos devem estar em ordem decrescente. Logo **A** só pode assumir valores de 1 a 8.

Se **A** for 8, **B** pode ser escolhido entre os algarismos de 0 a 7, temos 8 escolhas.
Se **A** for 7, temos 7 escolhas para **B.**
...
Se **A** for 1, temos 1 escolha para **B.**

Logo o número total de números circunflexos é 8+7+6+5+4+3+2+1=136.