

Questões da Avaliação Presencial 2 – Nível 3 – 11 PIC

Questão 1 (3,0 pontos):

De quantos modos podemos distribuir 11 brinquedos diferentes entre três garotos de idades diferentes, de modo que os dois mais velhos recebam 4 brinquedos cada e o mais novo receba 3 brinquedos?

Resolução esperada:

Para o garoto mais velho, escolhamos 4 dos 11 brinquedos. Isso pode ser feito de $C_{11}^4 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 330$ formas.

Para o garoto de idade intermediária, escolhamos 4 dos $11 - 4 = 7$ brinquedos restantes. Isso pode ser feito de $C_7^4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ formas.

Finalmente, o garoto mais novo fica com os 3 brinquedos restantes de 1 única forma, pois $C_3^3 = 1$.

Pelo Princípio Multiplicativo, a distribuição dos brinquedos entre os três garotos pode ser feito de $330 \cdot 35 \cdot 1 = 11550$ formas.

Critério de pontuação:

- Contou o número de modos de escolher os brinquedos para o primeiro garoto: 1,0 ponto;
- Contou o número de modos de escolher os brinquedos para o segundo garoto: 1,0 ponto;
- Concluiu que há só uma forma de escolher os brinquedos para o último garoto e aplicou o Princípio Multiplicativo para concluir o resultado: 1,0 ponto.

Questão 2 (3,0 pontos):

Ache os algarismos x e y para que o número $45xy$ seja divisível por 4 e por 9.

Resolução esperada:

O número $45xy$ é divisível por 4 quando $10x + y$ é divisível por 4. Como o resto da divisão de 10 por 4 é igual a 2, então $45xy$ é divisível por 4 quando $2x + y$ é divisível por 4. Por outro lado, $45xy$ é divisível por 9 quando $9 + x + y$ é divisível por 9. Como 9 é divisível por 9, então $45xy$ é divisível por 9 quando $x + y$ é divisível por 9. Como x e y são inteiros entre 0 e 9, $x + y$ é divisível por 9 quando $x + y = 0$ ou $x + y = 9$ ou $x + y = 18$. Assim, $45xy$ é divisível por 9 quando $x + y = 0$ ou $x + y = 9$ ou $x + y = 18$. Tem-se $x + y = 0$ se, e somente se, $x = y = 0$ e, neste caso, $2x + y = 0$, que é divisível por 4. Assim, obtemos o número 4500, divisível por 4 e por 9. Tem-se $x + y = 18$ se, e somente se, $x = y = 9$; mas, neste caso, $2x + y = 27$, que não é divisível por 4. No caso em que $x + y = 9$, tem-se $y = 9 - x$ e, neste caso, $2x + y = 2x + 9 - x = x + 9$ é divisível por 4 se, e somente se, $x = 3$ ou $x = 7$, sendo $y = 6$ ou

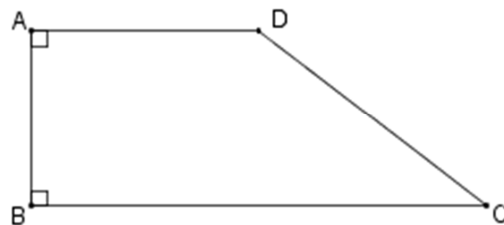
$y = 2$, respectivamente. Assim, obtemos os números 4536 e 4572, divisíveis por 4 e por 9. Portanto, os possíveis valores para x e y são $(x, y) = (0, 0)$, $(x, y) = (3, 6)$ e $(x, y) = (7, 2)$.

Critério de pontuação:

- Aplicou o critério de divisibilidade por 4 para condicionar x e y : 1,0 ponto;
- Aplicou o critério de divisibilidade por 9 para condicionar x e y : 1,0 ponto;
- Achou os três possíveis pares (x, y) : 1,0 ponto, sendo 0,2 ponto para o par $(0, 0)$ e 0,4 ponto para cada um dos pares $(3, 6)$ e $(7, 2)$.

Questão 3 (4,0 pontos):

Calcule a medida da diagonal BD do trapézio retângulo da figura abaixo, sabendo que $AD = 4$ cm, $BC = 9$ cm e $CD = \sqrt{34}$ cm.



Resolução esperada:

Trace o segmento de reta DP paralelo a AB , sendo P um ponto de BC . Como $ABPD$ é um retângulo, então $BP = AD = 4$ e $AB = DP$. Como $BC = 9$ e $BC = BP + CP$, então $CP = 5$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo CDP , tem-se $DP = \sqrt{CD^2 - CP^2} = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - 5^2} = 3$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo BPD , tem-se $BD = \sqrt{DP^2 + BP^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm. Alternativamente, como $AB = DP = 3$, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABD , tem-se $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm.

Critério de pontuação:

- Traçou o segmento de reta DP paralelo a AB , sendo P um ponto de BC : 1,0 ponto;
- Concluiu que $BP = AD = 4$: 0,5 ponto;
- Calculou $CP = BC - BP = 5$: 0,5 ponto;
- Aplicou o Teorema de Pitágoras ao triângulo CDP , calculando DP : 1,0 ponto;
- Aplicou o Teorema de Pitágoras ao triângulo BPD ou ao triângulo ABD , calculando BD : 1,0 ponto.